

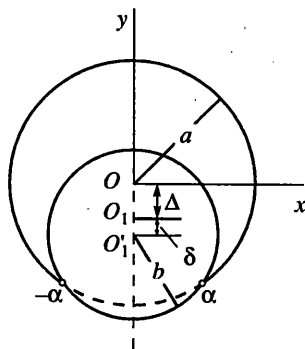
УДК 539.3

© 2002 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, А.А. ШМАТКОВА
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ
С ПОКРЫТИЯМИ

Рассмотрена задача о взаимодействии упругой плоскости с круговым отверстием и упругого круглого диска меньшего радиуса, когда их поверхности имеют тонкие усиливающие покрытия (абсолютно гибкие, но жесткие на растяжение – сжатие). Относительно контактного давления получено интегральное уравнение первого рода с разностным ядром, имеющим особенность логарифмического вида. Для приближенного решения этого уравнения использован модифицированный метод Мультиппа – Каландия [1]. Даны численные результаты.

Ранее в [2] другим методом решалась задача о вдавливании упругого круглого диска в границу кругового отверстия в упругой плоскости, усиленную тонким покрытием.

1. Постановка задачи. Пусть упругий диск радиуса $b = a - \Delta$ вдавливается приложенной в его центре силой P в поверхность отверстия радиуса a в упругой плоскости. Для простоты будем далее полагать, что взаимодействие между диском и плоскостью с отверстием осуществляется только давлением (трение отсутствует), диск и плоскость с отверстием изготовлены из одного материала, величина $\Delta/a \ll 1$. Будем также предполагать, что поверхности диска и плоскости с отверстием усилены тонкими покрытиями (абсолютно гибкими, но жесткими на растяжение – сжатие).



Фиг. 1

Под действием силы P диск переместится поступательно в направлении силы на величину δ и между поверхностями диска и плоскости с отверстием образуется область контакта $|\theta| \leq \alpha$ (фиг. 1) (величины Δ и δ для ясности утрированы). В области контакта возникает контактное давление $p(\theta)$, уравновешивающее силу P . Условие контакта диска и плоскости с отверстием, учитывающее разность радиусов диска и отверстия на величину Δ и жесткое смещение диска в направлении силы на вели-

чину δ , можно записать в виде [1, 2]:

$$-u_1(\theta) + u_2(\theta) = (\Delta + \delta) \cos \theta - \Delta \quad (1.1)$$

где $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ – соответственно радиальные перемещения в области контакта точек диска и плоскости с отверстием, т.е. при $r = a$ и $|\theta| \leq \alpha$.

Чтобы найти выражения для $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ в виде интегральных операторов от $p(\theta)$, нужно рассмотреть две вспомогательные краевые задачи:

(1) для диска

$$d^2 u_\theta^{(1)} / d\theta^2 + du_r^{(1)} / d\theta = 0 \quad (r = a) \quad (1.2)$$

$$\sigma_r^{(1)} = -p(\theta) \quad (|\theta| \leq \alpha, r = a), \quad \sigma_r^{(1)} = 0 \quad (\alpha < |\theta| \leq \pi, r = a) \quad (1.3)$$

(2) для плоскости с отверстием

$$d^2 u_\theta^{(2)} / d\theta^2 + du_r^{(2)} / d\theta = 0 \quad (r = a) \quad (1.4)$$

$$\sigma_r^{(2)} = -p(\theta) \quad (|\theta| \leq \alpha, r = a), \quad \sigma_r^{(2)} = 0 \quad (\alpha < |\theta| \leq \pi, r = a) \quad (1.5)$$

Здесь u_r и u_θ – перемещения в радиальном и окружном направлениях, σ_r – радиальное нормальное напряжение. Условия (1.2) и (1.4) являются условиями недеформируемости поверхностей диска и плоскости с отверстием в окружном направлении. Они следуют из уравнения деформирования кольцевой накладки [2]:

$$\frac{2Gh}{a^2(1-\nu)} \left(\frac{d^2 u_\theta}{d\theta^2} + \frac{du_r}{d\theta} \right) = \tau(\theta) \quad (1.6)$$

где $G \rightarrow \infty$; G и ν – упругие характеристики накладки, h – ее толщина, $\tau(\theta)$ – распределенные по ее границе касательные усилия.

Для задачи 1 надо еще учесть, что при $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{- \pi}^{\pi} \int (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r,\theta} \sin \theta) d\theta = -P \quad (1.7)$$

($\tau_{r,\theta}$ – касательное напряжение) и

$$\lim (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) = 0 \quad (1.8)$$

Аналогичные соотношения должны иметь место для задачи 2 при $r \rightarrow \infty$.

Считая, что диск и плоскость с отверстием находятся в условиях плоского деформированного состояния, для решения задач (1.2), (1.3) и (1.4), (1.5) вместе с условиями (1.7), (1.8) при $r \rightarrow 0$ или при $r \rightarrow \infty$ воспользуемся общим решением уравнений Ламе в цилиндрических координатах, данным в [1]. В результате будем иметь

$$u_1(\theta) = -\frac{a}{\pi \vartheta l} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\psi) K_1(t) d\psi \quad (1.9)$$

$$K_1(t) = -\cos t \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| - \frac{1}{2} + \frac{\kappa^2 - 1}{8\kappa} - \frac{2 + \kappa}{4\kappa} \cos t$$

$$u_2(\theta) = \frac{a}{\pi \vartheta l} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\psi) K_2(t) d\psi \quad (1.10)$$

$$K_2(t) = -\cos t \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| - \frac{\kappa - 1}{4\kappa} + \frac{2 - \kappa}{4\kappa} \cos t$$

$$\vartheta = \frac{G}{1 - \nu}, \quad l = \frac{(\kappa + 1)^2}{4\kappa}, \quad \kappa = 3 - 4\nu, \quad t = \theta - \psi$$

Здесь G и ν – упругие характеристики материалов диска и плоскости с отверстием.

Принимая для $u_1(\theta)$ в (1.1) выражение (1.9) (ввиду малости Δ/a считаем, что $b = a$) и подставляя (1.9), (1.10) в (1.1), получим относительно контактного давления $p(\theta)$ интегральное уравнение

$$-\int_{-\alpha}^{\alpha} p(\psi) \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| d\psi = \frac{\pi \vartheta l}{2a} \delta(\theta) - \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\psi) F(t) d\psi \quad (1.11)$$

$$|\theta| \leq \alpha, \quad \delta(\theta) = (\Delta + \delta) \cos \theta - \Delta$$

$$F(t) = (1 - \cos t) \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| - \frac{1}{4} \cos t + \frac{l}{4} - \frac{1}{2}$$

Для завершения постановки задачи к уравнению (1.11) нужно добавить условие равновесия диска

$$P = a \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\psi) \cos \psi d\psi \quad (1.12)$$

и условие ограниченности контактного давления в точках $\theta = \pm \alpha$, которое обычно приводится к виду [3, 4]:

$$p(\pm \alpha) = 0 \quad (1.13)$$

2. Метод решения и результаты. В соответствии с известными результатами [3, 4] о структуре решения интегральных уравнений контактных задач будем искать решение уравнения (1.11) в форме

$$p(\theta) = \frac{\cos(\theta/2) \omega(\theta)}{\sqrt{2[\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\theta/2)]}} \quad (2.1)$$

Подставляя выражение (2.1) в (1.11) и производя замены переменных по формулам

$$x = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\alpha/2)}, \quad \xi = \frac{\sin(\psi/2)}{\sin(\alpha/2)} \quad (2.2)$$

после ряда преобразований перепишем интегральное уравнение (1.11) следующим образом:

$$-\int_{-1}^1 \frac{\omega_*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} [\ln |x-\xi| + L_\alpha] d\xi = \frac{\pi l \vartheta}{2\sqrt{2}a} \delta_*(x) - \int_{-1}^1 \frac{\omega_*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \Psi(x, \xi) d\xi \quad (2.3)$$

$$\omega_*(x) = \omega(g(x)), \quad L_\alpha = \ln[2 \sin(\alpha/2)], \quad \delta_*(x) = \delta(g(x))$$

$$\Psi(x, \xi) = \{F[g(x) - g(\xi)] + F[g(x) + g(\xi)]\} / 2$$

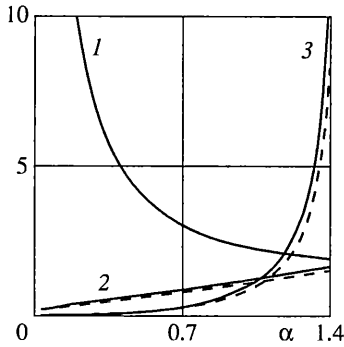
$$g(x) = 2 \arcsin(x \sin(\alpha/2))$$

Вновь произведем замены переменных теперь уже в интегральном уравнении (2.3) по формулам $x = \cos \theta'$, $\xi = \cos \psi'$ и перепишем его следующим образом (штрихи опускаем):

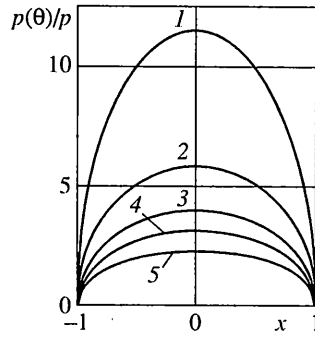
$$-\int_0^\pi \tilde{\omega}(\psi) [\ln |\cos \theta - \cos \psi| + L_\alpha] d\psi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \tilde{\delta}(\theta) - \int_0^\pi \tilde{\omega}(\psi) \Psi(\cos \theta, \cos \psi) d\psi$$

$$\tilde{\omega}(\theta) = (\vartheta/\delta)^{-1} a \omega_*(\cos \theta) \quad (2.4)$$

$$\tilde{\delta}(\theta) = \delta^{-1} \delta_*(\cos \theta) = (1 + \varepsilon) [1 - 2 \cos^2 \theta \sin^2(\alpha/2)] - \varepsilon, \quad \varepsilon = \Delta / \delta$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Для приближенного решения интегрального уравнения (2.4) применим модифицированный метод Мультиппа – Каландия – коллакации по чебышевским узлам [1, 5, 6]. Конкретные вычисления проведем при $\nu = 0,3$.

Введем коэффициент концентрации максимальных контактных давлений формулами [1,7]:

$$K = p(0) / p, \quad p = P / (\pi a) \quad (2.5)$$

На фиг. 2 даны зависимости от α : K (кривая 1), $P/(E\delta)$ (кривая 2, $E = 2G(1 + \nu)$), $P/(E\Delta)$ (кривая 3). Штриховые кривые 2 и 3 отвечают случаю отсутствия упрочняющих покрытий [1]. Соответствующая штриховая кривая 1 практически сливается со сплошной кривой 1.

На фиг. 3 даны графики отношения $p(\theta)/p$ как функции от x , кривые 1–5 отвечают значениям $\alpha = \pi/18, \pi/9, \pi/6, 2\pi/9, \pi/3$. Соответствующие штриховые кривые для случая отсутствия упрочняющих покрытий [1] практически сливаются со сплошными кривыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02–01–00346).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М., Шматкова А.А. Модифицированный метод Мультиппа – Каландия в контактных задачах для подшипника скольжения // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 691–697.
2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
5. Александров В.М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 91–94.
6. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
7. Теплый М.И. Контактные задачи для областей с круговыми границами. Львов: Вища шк., 1983. 176 с.