

УДК 533.6.013.42

© 2002 г. М.В. ВИЛЬДЕ, Ю.Д. КАПЛУНОВ, В.А. КОВАЛЕВ

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ РЕЗОНАНСОВ ВОЛН  
ТИПА ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ  
АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН УПРУГИМИ ЦИЛИНДРАМИ  
И СФЕРАМИ**

Изучаются резонансы парциальных мод больших номеров в задаче рассеяния стационарных акустических волн упругими цилиндрами и сферами. Применяются коротковолновые асимптотические модели, позволяющие описать резонансы волн типа шепчущей галереи. На основе этих моделей получены приближенные формулы для резонансного компонента парциальных мод, а также элементарные локальные аппроксимации резонансных кривых в окрестности резонансных частот. Приведено сравнение с точным решением, подтверждающее высокую эффективность предложенного подхода.

Изучение резонансов парциальных мод является одним из основных элементов резонансной теории рассеяния [1]. При этом простые приближенные формулы, описывающие поведение резонансных кривых, имеют большое значение для выявления качественных закономерностей процесса рассеяния. Так, применение асимптотических методов, основанных на малости толщины, позволяет изучать рассеяние акустических волн упругими оболочками как в случае длинноволновых, так и в случае коротковолновых колебаний (см., например, [2]). Для толстостенных или сплошных тел асимптотический анализ возможен, как правило, только для парциальных мод больших номеров, что соответствует коротковолновым колебаниям тела.

В работе [3] исследованы в коротковолновом приближении резонансы волн Рэлея в задачах рассеяния для упругих цилиндров и сфер. При этом использовалась приближенная модель, в рамках которой в уравнениях теории упругости сохранялись только старшие производные, а радиальная координата замораживалась на поверхности контакта, т.е., описание движения тела сводилось к рассмотрению уравнений плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат. Эта модель позволила оценить резонансные частоты и аппроксимировать резонансные кривые.

В настоящей статье аналогичный подход применяется для приближенного описания резонансов волн типа шепчущей галереи при рассеянии акустических волн упругими цилиндрами и сферами. Эти волны возникают в цилиндре или сфере вследствие их конечной кривизны и являются аналогом акустических волн шепчущей галереи [4]. При фиксированном номере парциальной моды соответствующие им резонансные частоты лежат выше резонансной частоты волны Рэлея. Здесь радиальная координата не может быть заморожена на поверхности контакта, поскольку колебания тела не затухают экспоненциально при удалении от границы. Однако применение асимптотических свойств волн шепчущей галереи [4] позволяет и в этом случае упростить исходные уравнения и построить коротковолновые модели, описывающие колебания тела. На основе этих моделей получены приближенные формулы для резонансного компонента парциальных мод, а также элементарные локальные аппроксимации резонансных кривых в окрестности резонансных частот. Эффективность предлагаемых формул проверяется путем сравнения с точным решением задачи.

**1. Постановка задачи о рассеянии плоской акустической волны упругим цилиндром.** Рассмотрим стационарную задачу рассеяния для сплошного упругого кругового цилиндра. Введем следующие безразмерные параметры, характеризующие процесс рассеяния

$$\gamma = \frac{c_2}{c_1}, \quad \kappa = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad x = ka, \quad \beta_i = \frac{c_i}{c}, \quad x_i = \beta_i^{-1} x \quad (i=1,2) \quad (1.1)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – скорости продольной и поперечной волн в упругом теле,  $\rho_1$  – плотность упругого тела,  $c$  и  $\rho$  – скорость звука и плотность акустической среды,  $a$  – радиус цилиндра,  $\omega$  – круговая частота; считается, что колебания развиваются во времени по закону  $\exp(-i\omega t)$ .

Введем цилиндрическую систему координат, ось которой совпадает с осью цилиндра. Будем рассматривать двумерную задачу, т.е., будем считать, что все искомые величины являются функциями только двух координат  $r, \theta$ . Тогда описание колебаний цилиндра можно свести к решению уравнений для упругих потенциалов Ламе  $\phi$  и  $\psi$ :

$$\Delta\phi + \beta_1^{-2} k^2 \phi = 0, \quad \Delta\psi + \beta_2^{-2} k^2 \psi = 0 \quad (1.2)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Перемещения и напряжения в цилиндре связаны с функциями  $\phi$  и  $\psi$  формулами

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (1.3)$$

$$\sigma_r = \rho_1 c^2 \left[ -k^2 \phi + 2\beta_2^2 \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \rho_1 c^2 \left[ k^2 \psi + 2\beta_2^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right]$$

Граничные условия на поверхности цилиндра имеют вид

$$u_r |_{r=a} = \frac{1}{\rho c^2 k^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \Big|_{r=a}, \quad \sigma_r |_{r=a} = -(p_i + p_s) |_{r=a}, \quad \sigma_{r\theta} |_{r=a} = 0 \quad (1.4)$$

где  $p_i$  и  $p_s$  – давление в падающей и рассеянной волне, соответственно. Они должны удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (1.5)$$

при этом давление  $p_s$  должно также удовлетворять условию излучения на бесконечности.

Пусть на цилиндр падает плоская акустическая волна, направление распространения которой нормально к боковой поверхности цилиндра, тогда давление  $p_i$  можно представить в виде [1]:

$$p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n J_n(kr) \cos n\theta, \quad E_0 = 1, \quad E_n = 2 \quad (n \geq 1) \quad (1.6)$$

где  $J_n$  – функция Бесселя,  $p_0$  – постоянная, имеющая размерность давления.

Рассеянное давление  $p_s$  будем искать в виде

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n B_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\theta \quad (1.7)$$

где  $B_n$  – искомые постоянные,  $H_n^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода.

Потенциалы Ламе, напряжения и перемещения также представим в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} \{\varphi, u_r, \sigma_r\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi_n(r), u_{r,n}(r), \sigma_{r,n}(r)\} \cos n\theta \\ \{\psi, u_\theta, \sigma_{r\theta}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{\psi_n(r), u_{\theta,n}(r), \sigma_{r\theta,n}(r)\} \sin n\theta \end{aligned} \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.2), (1.3), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для функций  $\varphi_n$ ,  $\psi_n$  и выражения  $n$ -х компонент напряжений и перемещений через эти функции. Решения уравнений для  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  имеют вид

$$\varphi_n(\zeta) = C_{1n} J_n(\beta_1^{-1} kr), \quad \psi_n(\zeta) = C_{2n} J_n(\beta_2^{-1} kr) \quad (1.9)$$

Постоянные  $C_{1n}$ ,  $C_{2n}$  и  $B_n$  определяются из граничных условий (1.4). В частности, для постоянных  $B_n$  получается следующее выражение:

$$B_n = - \frac{\kappa x_2^2 D_2 J_n(x) - x D_1 J_n'(x)}{\kappa x_2^2 D_2 H_n^{(1)}(x) - x D_1 H_n^{(1)'}(x)} \quad (1.10)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$$b_{11} = x_1 J_n'(x_1), \quad b_{12} = n J_n(x_2), \quad b_{21} = (x_2^2 - 2n^2) J_n(x_1) + 2x_1 J_n'(x_1) \quad (1.11)$$

$$b_{22} = 2n[J_n(x_2) - x_2 J_n'(x_2)], \quad b_{31} = 2n[J_n(x_1) - x_1 J_n'(x_1)]$$

$$b_{32} = (x_2^2 - 2n^2) J_n(x_2) + 2x_2 J_n'(x_2)$$

Получим также выражения для величин  $u_{r,n}$  и  $u_{\theta,n}$ :

$$u_{r,n} = \frac{1}{a} C_{1n} \left[ x_1 J_n' \left( x_1 \frac{r}{a} \right) - \frac{na}{r} \frac{b_{31}}{b_{32}} J_n \left( x_2 \frac{r}{a} \right) \right] \quad (1.12)$$

$$u_{\theta,n} = \frac{1}{a} C_{1n} \left[ -\frac{na}{r} J_n \left( x_1 \frac{r}{a} \right) + \frac{b_{31}}{b_{32}} x_2 J_n' \left( x_2 \frac{r}{a} \right) \right]$$

Введем новую переменную  $\zeta$  по формуле  $\zeta = 1 - r/a$ , тогда уравнения для функций  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  примут вид

$$\frac{d^2 \varphi_n}{d\zeta^2} - \frac{1}{1-\zeta} \frac{d\varphi_n}{d\zeta} - \frac{n^2 \varphi_n}{(1-\zeta)^2} + x_1^2 \varphi_n = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{d^2 \psi_n}{d\zeta^2} - \frac{1}{1-\zeta} \frac{d\psi_n}{d\zeta} - \frac{n^2 \psi_n}{(1-\zeta)^2} + x_2^2 \psi_n = 0$$

В выражениях для напряжений и перемещений также перейдем к переменной  $\zeta$ :

$$u_{r,n} = \frac{1}{a} \left( -\frac{d\varphi_n}{d\zeta} + \frac{n}{1-\zeta} \varphi_n \right), \quad u_{\theta,n} = \frac{1}{a} \left( -\frac{n}{1-\zeta} \varphi_n + \frac{d\psi_n}{d\zeta} \right) \quad (1.14)$$

$$\sigma_{r,n} = \frac{\rho_1 c^2 \beta_2^2}{a^2} \left[ -x_2^2 \varphi_n + 2 \left( \frac{n^2 \varphi_n}{(1-\zeta)^2} + \frac{1}{1-\zeta} \frac{d\varphi_n}{d\zeta} - \frac{n}{1-\zeta} \frac{d\psi_n}{d\zeta} - \frac{n\psi_n}{(1-\zeta)^2} \right) \right] \quad (1.15)$$

$$\sigma_{r\theta,n} = \frac{\rho_1 c^2 \beta_2^2}{a^2} \left[ x_2^2 \psi_n + 2 \left( \frac{n}{1-\zeta} \frac{d\varphi_n}{d\zeta} + \frac{n\varphi_n}{(1-\zeta)^2} - \frac{n^2 \psi_n}{(1-\zeta)^2} - \frac{1}{1-\zeta} \frac{d\psi_n}{d\zeta} \right) \right]$$

В качестве амплитудно-частотной характеристики возьмем резонансный компонент парциальных мод [1] при рассеянии назад ( $\theta = 0$ ). Для фонового компонента, соответствующего акустически жесткому цилиндру, он выражается формулой [1]:

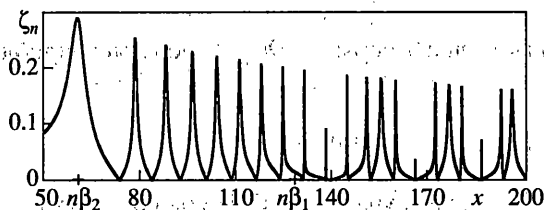
$$\zeta_n = \frac{4}{\sqrt{\pi x}} \left| B_n + \frac{J'_n(x)}{H_n^{(1)'}(x)} \right| \quad (1.16)$$

На фиг. 1 представлена зависимость  $\zeta_n$  от  $x$  для  $n = 30$  при следующих значениях физических параметров:

$$c_1 = 6420 \text{ м/с}, c_2 = 3040 \text{ м/с}, c = 1493 \text{ м/с}, \rho = 1000 \text{ кг/м}^3, \rho_1 = 2700 \text{ кг/м}^3 \quad (1.17)$$

шаг счета 0.01 при  $50 < x < 130$  и 0.002 при  $130 < x < 200$ . Крайний слева резонансный пик соответствует волне Рэлея, остальные – волнам типа шепчущей галереи.

Примем, что параметры задачи удовлетворяют следующим соотношениям:  $n \gg 1$ ,  $x_1 \sim x_2 \sim x \sim n$ .



Фиг. 1

Рассмотрим выражения  $s_1 = n^2 - x_1^2$  и  $s_2 = n^2 - x_2^2$ . Легко убедиться, что знак этих величин меняется на противоположный при  $x = n\beta_1$  и  $x = n\beta_2$ , соответственно, причем всегда выполняется неравенство  $n\beta_2 < n\beta_1$ . Знак величин  $s_1$  и  $s_2$  определяет характер поведения потенциалов  $\phi_n$  и  $\psi_n$  вблизи поверхности цилиндра. При  $x < n\beta_2$  величины  $s_1$  и  $s_2$  положительны, следовательно (см. (1.13)), функции  $\phi_n$  и  $\psi_n$  экспоненциально затухают. В этой области возможен резонанс только одной периферической волны – волны Рэлея. Резонансы волн типа шепчущей галереи появляются при  $x > n\beta_2$ , когда затухающий характер функции  $\psi_n$  сменяется осцилляцией. При  $n\beta_2 < x < n\beta_1$  эти резонансы представляют собой ряд пиков приблизительно одинаковой ширины. При  $x > n\beta_1$  функция  $\phi_n$  также начинает осциллировать. В этой области частот наблюдается периодическое изменение ширины резонансных пиков (см. фиг. 1). Таким образом, можно выделить две группы резонансов волн типа шепчущей галереи. Резонансы первой группы лежат в области  $n\beta_2 < x < n\beta_1$ , резонансы второй группы – в области  $x > n\beta_1$ . Заметим, что с уменьшением  $n$  число резонансов первой группы уменьшается, и при малых  $n$  все резонансы волн типа шепчущей галереи являются резонансами второй группы.

Получим приближенное решение, описывающее резонансы волн типа шепчущей галереи. Для этого упростим уравнения (1.13)–(1.15), используя асимптотические свойства волн шепчущей галереи при  $x \rightarrow \infty$ . Как известно, решение уравнения Гельмгольца, соответствующее волнам шепчущей галереи малых номеров, имеет изменяемость по нормальной координате порядка  $x^{2/3}$  и сосредоточено вблизи поверхности в слое толщины  $O(x^{-2/3})$  [4]. В случае волн типа шепчущей галереи в упругом теле таким свойством обладают потенциал  $\psi_n$  при

$$x = \beta_2 n + O(x^{1/3}) \quad (1.18)$$

и потенциал  $\varphi_n$  при

$$x = \beta_1 n + O(x_1^{1/3}) \quad (1.19)$$

**2. Резонансы волн типа шепчущей галереи первой группы.** Получим приближенное уравнение для потенциала  $\psi_n$  в области (1.18). В этой области величина  $s_2$  имеет порядок  $O(x_2^{4/3})$  и может быть представлена в виде

$$s_2 = 2x_2(n - x_2) + O(x_2^{2/3}) \quad (2.1)$$

Введем новую переменную  $z = x_2^{2/3}\zeta$ . При  $\zeta = O(x_2^{-2/3})$  переменная  $z$  порядка единицы, и дифференцирование по этой переменной не меняет порядок функции  $\psi_n$ . Умножим второе уравнение в (1.13) на  $(1 - \zeta)^2$  и перейдем в нем к переменной  $z$ :

$$(x_2^{4/3} - 2x_2^{2/3}z + z^2) \frac{d^2\psi_n}{dz^2} - (x_2^{2/3} - z) \frac{d\psi_n}{dz} - [2x_2(n - x_2) + 2x_2^{4/3}z - x_2^{2/3}z^2 + O(x_2^{2/3})] \psi_n = 0 \quad (2.2)$$

Оставляя в (2.2) только члены порядка  $O(x_2^{4/3})$ , получаем приближенное уравнение для функции  $\psi_n$ :

$$d^2\psi_n / dz^2 - 2(x_2^{-1/3}(n - x_2) + z)\psi_n = 0 \quad (2.3)$$

Заменой  $\eta = 2^{1/3}(x_2^{-1/3}(n - x_2) + z)$  уравнение (2.3) можно свести к уравнению Эйри

$$d^2\psi_n / d\eta^2 - \eta\psi_n = 0 \quad (2.4)$$

Оставляя только затухающее при  $\eta \rightarrow \infty$  решение уравнения (2.4) и возвращаясь к переменной  $\zeta$ , находим

$$\psi_n = C_{2n} \text{Ai}[(x_2/2)^{-1/3}(n - x_2(1 - \zeta))] \quad (2.5)$$

Решение (2.5) получено с относительной погрешностью порядка  $O(x_2^{-2/3})$ .

Получим теперь приближенное уравнение для функции  $\varphi_n$ . В области (1.18) эта функция имеет изменчивость порядка  $x_2$  и экспоненциально затухает с ростом  $\zeta$ . Отбрасывая в первом уравнении (1.13) первую производную и "замораживая" коэффициенты на поверхности цилиндра, приходим к уравнению

$$d^2\varphi_n / d\zeta^2 - \alpha_1^2\varphi_n = 0, \quad \alpha_1 = \sqrt{n^2 - x_1^2} \quad (2.6)$$

Затухающее решение уравнения (2.6) имеет вид

$$\varphi_n = C_{1n} \exp(-\alpha_1\zeta) \quad (2.7)$$

Соотношения

$$d\varphi_n / d\zeta \sim x_2\varphi_n, \quad d\psi_n / d\zeta \sim x_2^{2/3}\psi_n$$

позволяют оценить порядки всех членов в формулах (1.15). Отбрасывая малые члены, получаем следующие приближенные выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,n} &= \frac{\rho_1 c^2 \beta_2^2}{a^2} \left[ -x_2^2 \varphi_n + 2 \left( \frac{n^2 \varphi_n}{(1-\zeta)^2} - \frac{n}{1-\zeta} \frac{d\psi_n}{d\zeta} \right) \right] \\ \sigma_{r\theta,n} &= \frac{\rho_1 c^2 \beta_2^2}{a^2} \left[ x_2^2 \psi_n + 2 \left( \frac{n}{1-\zeta} \frac{d\varphi_n}{d\zeta} - \frac{n^2 \psi_n}{(1-\zeta)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Соотношения (2.3), (2.6), (1.14), (2.8) позволяют приближенно описать колебания цилиндра на частотах, лежащих в области (1.18).

Получим решение задачи рассеяния, исходя из построенной модели. Подставим в (1.4) соотношения (1.6)–(1.8), (1.14), (2.8). В результате граничные условия для функций  $\Phi_n$  и  $\Psi_n$  при  $\zeta = 0$  имеют следующий вид:

$$-\frac{d\Phi_n}{d\zeta} + n\Psi_n = \frac{a^2}{\rho c^2 x} p_0 E_n (-i)^n (J'_n(x) + B_n H_n^{(1)'}(x)) \quad (2.9)$$

$$-x_2^2 \Phi_n + 2 \left( n^2 \Phi_n - n \frac{d\Psi_n}{d\zeta} \right) = \frac{a^2}{\rho_1 c^2 \beta_2^2} p_0 E_n (-i)^n (J_n(x) + B_n H_n^{(1)}(x))$$

$$x_2^2 \Psi_n + 2 \left( n \frac{d\Phi_n}{d\zeta} - n^2 \Psi_n \right) = 0$$

Подставляя в систему (2.9) решения (2.5) и (2.7), находим произвольные постоянные  $C_{1n}$ ,  $C_{2n}$  и  $B_n$ . Приведем выражение для постоянных  $B_n$ :

$$B_n = -\frac{D_2^{(2)} J_n(x) - x D_1^{(2)} J'_n(x)}{D_2^{(2)} H_n^{(1)}(x) - x D_1^{(2)} H_n^{(1)'}(x)} \quad (2.10)$$

$$D_1^{(2)} = \frac{(2n^2 - x_2^2)^2}{\alpha_1} + 4n^2 x_2 \frac{\text{Ai}'(\tau_2)}{\text{Ai}(\tau_2)} \left( \frac{x_2}{2} \right)^{-1/3}, \quad D_2^{(2)} = \kappa x_2^4, \quad \tau_2 = \left( \frac{x_2}{2} \right)^{-1/3} (n - x_2)$$

Приближенная формула для резонансного компонента парциальных мод имеет вид (1.16), где коэффициенты  $B_n$  определяются соотношением (2.10). Ее можно преобразовать к виду

$$\zeta_n = \frac{8}{(\pi x)^{3/2}} \frac{Q}{|D_1^{(2)} - Q H_n^{(1)}(x) / H_n^{(1)'}(x)| |H_n^{(1)'}(x)|^2}, \quad Q = \frac{1}{x} D_2^{(2)} \quad (2.11)$$

используя формулу для вронскиана [5]  $W\{J_n(x), H_n^{(1)}(x)\} = 2i/(\pi x)$ .

Формула (2.11) показывает, что при значительном различии параметров упругого материала и жидкости изучаемые резонансы соответствуют нулям функции  $D_1^{(2)}(x)$ . Очевидно, что величина  $D_1^{(2)}$  может обратиться в нуль, только если порядок второго слагаемого станет равным порядку первого, т.е., если значение  $\tau_2$  лежит в области  $\tau_m + O(x_2^{-1/3})$ , где  $\tau_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) – корень функции Эйри. Таким образом, уравнение  $D_1^{(2)} = 0$  дает ряд резонансных частот  $x_{n,m}$ , лежащих в малой окрестности корня  $x_{n,m}^0$  уравнения  $x_2 = n - \tau_m (x_2/2)^{1/3}$ , которое с учетом (1.18) можно решить итерационным методом, в первом приближении  $x_{n,m}^0 = \beta_2 (n - \tau_m (n/2)^{1/3})$ . Величины  $\tau_m$  отрицательны, для них существует асимптотическое представление при больших  $m$ :

$$\tau_m \approx -\left[ \frac{3\pi}{2} \left( m - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3}$$

Заметим, что нули функции  $D_1^{(2)}(x)$  аппроксимируют изучаемые резонансы только при небольших значениях  $m$ , когда  $x_{n,m}$  попадает в область (1.18). С ростом  $n$  число аппроксимируемых резонансов увеличивается.

Перейдем в формуле (2.11) к разложению в окрестности резонансной частоты  $x_{n,m}$ . Для этого используем асимптотическое представление функций Ханкеля при больших значениях порядка. При  $x > n$  оно имеет вид [5]:

$$H_n^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n \operatorname{tg} \delta}} \exp\left\{i\left[n(\operatorname{tg} \delta - \delta) - \frac{\pi}{4}\right]\right\} \quad (2.12)$$

где  $\delta = \arccos(n/x)$ . При дифференцировании представления (2.12) следует оставить только величины старшего асимптотического порядка. При вычислении  $dD_1^{(2)}/dx$  также отбрасываем асимптотически малые члены. После элементарных преобразований получаем стандартное локальное представление

$$\zeta_{n,m} = A_{n,m} \frac{\Gamma_{n,m}}{|x - x_{n,m} + i\Gamma_{n,m}|} \quad (2.13)$$

$$A_{n,m} = \frac{4}{\sqrt{\pi x_{n,m}}}, \quad \Gamma_{n,m} = \frac{\kappa x_{n,m}^3}{\beta_2^2 p_2(x_{n,m}) \sqrt{x_{n,m}^2 - n^2}}$$

$$p_2(x) = 4n^2 \left[ \left( \frac{\operatorname{Ai}'(\tau_2)}{\operatorname{Ai}(\tau_2)} \right)^2 - \tau_2 \right] \left( \frac{x_2}{2} \right)^{-2/3}$$

Представление (2.13) применимо на интервале  $x - x_{n,m} \ll \beta_2$  при условии

$$\Gamma_{n,m} \ll \beta_2 \quad (2.14)$$

Найдем приближенные выражения для  $x_{n,m}$ . Положим  $\tau_2 = \tau_m + d(x_2/2)^{-1/3}$ ,  $d \sim 1$ , тогда имеем

$$\operatorname{Ai}(\tau_2) \approx d \operatorname{Ai}'(\tau_m) (x_2/2)^{-1/3}, \quad \operatorname{Ai}'(\tau_2) \approx \operatorname{Ai}'(\tau_m) \quad (2.15)$$

Подставим (2.15) в выражение для  $D_1^{(2)}$ . Заменяя  $x_2$  на  $n$  в соответствии с (1.18), из уравнения  $D_1^{(2)} = 0$  находим  $d = -4\sqrt{1 - \gamma^2}$ . Откуда следует

$$x_{n,m} \approx \beta_2 (n - \tau_m (n/2)^{1/3} + 4\sqrt{1 - \gamma^2}) \quad (2.16)$$

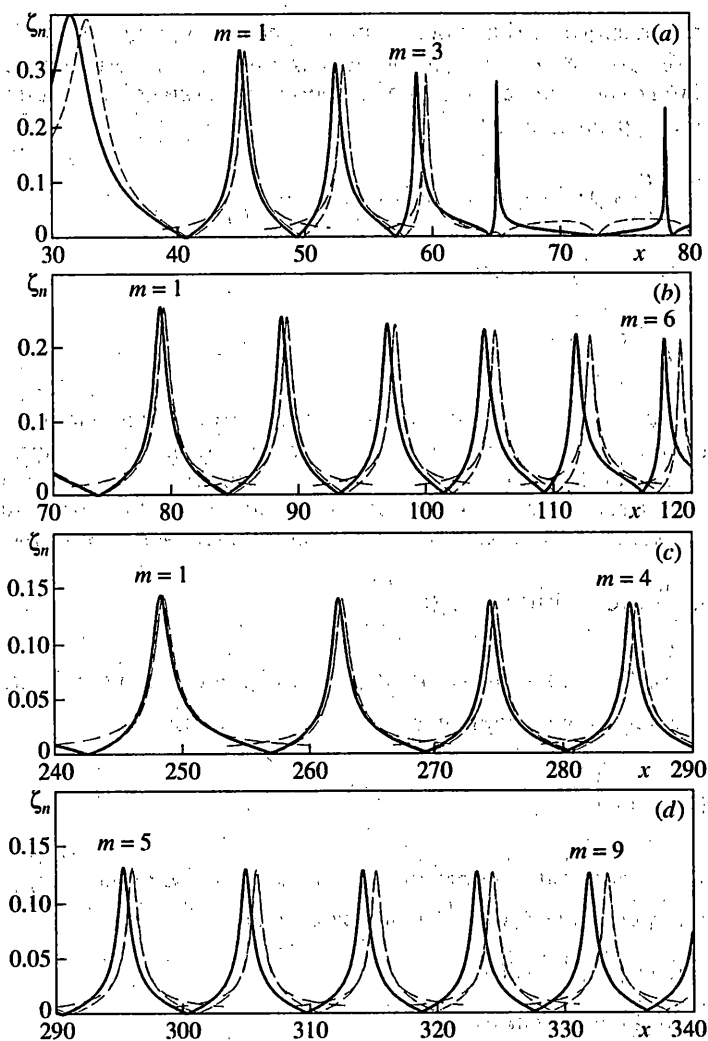
Формула (2.16) дает хорошее приближение только при достаточно больших значениях  $n$ , но ее можно использовать при численном определении корней уравнения  $D_1^{(2)} = 0$ . С учетом (2.15) и (1.18) получаем

$$\Gamma_{n,m} \approx 4\kappa\beta_2(1 - \gamma^2) / \sqrt{\beta_2^2 - 1} \quad (2.17)$$

т.е. ширина изучаемых резонансов определяется физическими параметрами упругого тела и жидкости и практически не зависит от величин  $n$  и  $m$ . Подставляя (2.17) в (2.14), получим условие для физических параметров задачи, при выполнении которого можно применять представление (2.13):

$$\kappa / \sqrt{\beta_2^2 - 1} \ll 1$$

Результаты тестирования полученных приближенных формул представлены на фиг. 2. Резонансные кривые, рассчитанные по формуле (1.16) (точное решение), показаны сплошной линией, по формулам (2.11) и (2.13) – штриховой и штрихпунктирной



Фиг. 2

линиями, соответственно для  $n = 15$  (a);  $n = 30$  (b);  $n = 110$  (c, d). Значения физических параметров те же, что и для фиг. 1 (см. (1.17)).

**3. Резонансы волн типа шепчущей галереи второй группы.** Рассмотрим область (1.19). Вывод приближенного уравнения для  $\varphi_n$  в этой области совпадает с выводом приближенного уравнения для  $\psi_n$  в области (1.18) с точностью до замены  $x_2$  на  $x_1$ . В результате приходим к уравнению

$$d^2 \varphi_n / dz^2 - 2(x_1^{-1/3}(n - x_1) + z)\varphi_n = 0 \quad (3.1)$$

где  $z = x_1^{2/3}\zeta$ . Решая его так же, как и уравнение (2.3), получаем приближенное выражение для функции  $\varphi_n$ :

$$\varphi_n = C_{1n} \text{Ai}[(x_1/2)^{-1/3}(n - x_1(1 - \zeta))] \quad (3.2)$$

имеющее относительную погрешность  $O(x_1^{-2/3})$ .



Уравнение для второго потенциала  $\psi_n$  не допускает упрощения, поскольку в рассматриваемой области частот он быстро осциллирует по переменной  $\zeta$ . Но можно получить приближенное решение для  $\psi_n$ , используя большую изменчивость этой функции. Запишем уравнение (1.13) в виде

$$\frac{d^2 \psi_n}{d\zeta^2} - \frac{1}{1-\zeta} \frac{d\psi_n}{d\zeta} + \mu^2(\zeta) \psi_n = 0, \quad \mu(\zeta) = \sqrt{x_2^2 - \frac{n^2}{(1-\zeta)^2}} \quad (3.3)$$

При переходе через точку поворота

$$\zeta_0 = 1 - \frac{n}{x_2}, \quad \left. \frac{d\mu^2}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_0} \neq 0 \quad (3.4)$$

осцилляция функции  $\psi_n$  сменяется экспоненциальным затуханием. Для того чтобы построить решение, описывающее переход через точку поворота, применим метод эталонных уравнений [6]. В качестве эталонного уравнения возьмем уравнение Эйри, из двух решений которого оставляем только экспоненциально затухающую после точки поворота функцию  $Ai$ . Будем искать решение уравнения (3.3) в виде

$$\psi_n = \left( a_0(\zeta) + \frac{1}{x_1} a_1(\zeta) \right) Ai(\eta) + \frac{1}{x_1} b_0(\zeta) \frac{d Ai}{d\eta} \quad (3.5)$$

где  $a_0(\zeta)$ ,  $a_1(\zeta)$ ,  $b_0(\zeta)$ ,  $\eta(\zeta)$  – функции, подлежащие определению. Подставляя (3.5) в (3.3) и приравнявая нулю величины порядка  $O(x_1^2)$ , находим

$$\eta = \left[ \frac{3}{2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (-\mu^2)^{1/2} d\zeta \right]^{2/3} \quad (3.6)$$

Приравнявая нулю величины порядка  $O(x_1)$ , находим функцию  $a_0(\zeta)$  и получим с относительной погрешностью  $O(x_1^{-1})$  решение в виде

$$\psi_n = C [(d\eta/d\zeta)(1-\zeta)]^{-1/2} Ai(\eta) \quad (3.7)$$

Заменяя функцию Эйри ее асимптотикой

$$Ai(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\eta|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} |\eta|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.8)$$

приходим к следующему приближенному выражению для функции  $\psi_n$ :

$$\psi_n = C_{2n} \frac{\alpha_2^{1/2}}{[\mu(1-\zeta)]^{1/2}} \cos\left[ (1-\zeta) \sqrt{x_2^2 - \frac{n^2}{(1-\zeta)^2}} - n \arccos\left(\frac{n}{x_2(1-\zeta)}\right) - \frac{\pi}{4} \right] \quad (3.9)$$

$$\alpha_2 = \mu(0) = \sqrt{x_2^2 - n^2}$$

Соотношения

$$d\psi_n/d\zeta \sim x_1^{2/3} \phi_n, \quad d\psi_n/d\zeta \sim x_1 \psi_n$$

позволяют упростить формулы (1.15). В результате снова получаем приближенные выражения для напряжений в виде (2.8).

Найдем теперь решение задачи рассеяния на основе модели (3.1), (3.3), (1.14), (2.8). Подставляя в (1.4) соотношения (1.6)–(1.8), (1.14), (2.8), и затем (3.2), (3.9), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_{1n}$ ,  $C_{2n}$  и  $B_n$ ,

решив которую, получаем

$$B_n = -\frac{D_2^{(1)} J_n(x) - x D_1^{(1)} J_n'(x)}{D_2^{(1)} H_n^{(1)}(x) - x D_1^{(1)} H_n^{(1)'}(x)} \quad (3.10)$$

$$D_1^{(1)} = -\frac{(x_2^2 - 2n^2)^2}{x_1} \frac{\text{Ai}(\tau_1)}{\text{Ai}'(\tau_1)} \left(\frac{x_1}{2}\right)^{1/3} + 4n^2 \alpha_2 \frac{\sin \chi(x)}{\cos \chi(x)}, \quad D_2^{(1)} = \alpha x_2^4$$

$$\tau_1 = \left(\frac{x_1}{2}\right)^{-1/3} (n - x_1), \quad \chi(x) = \sqrt{x_2^2 - n^2} - n \arccos\left(\frac{n}{x_2}\right) - \frac{\pi}{4}$$

Приближенное выражение для резонансного компонента парциальных мод имеет вид

$$\zeta_n = \frac{8}{(\pi x)^{3/2}} \frac{Q}{|D_1^{(1)} - Q H_n^{(1)}(x) / H_n^{(1)'}(x)| |H_n^{(1)'}(x)|^2}, \quad Q = \frac{1}{x} D_2^{(1)} \quad (3.11)$$

следовательно, при значительном различии параметров упругого материала и жидкости изучаемые резонансы соответствуют нулям функции  $D_1^{(1)}(x)$ .

Вид формулы для  $D_1^{(1)}$  позволяет сделать качественные выводы о положении резонансных частот. Во-первых,  $D_1^{(1)}$  может обратиться в нуль, если порядок первого слагаемого станет равным порядку второго, т.е., если  $\tau_1 = \tau_m + Q(x_1^{-1/3})$ , где  $\tau_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) – корень функции Эйри. Такие значения  $\tau_1$  соответствуют  $x = x_{n,m}^0 + O(1)$ , где  $x_{n,m}^0$  – корень уравнения

$$x_1 = n - \tau_m (x_1 / 2)^{1/3} \quad (3.12)$$

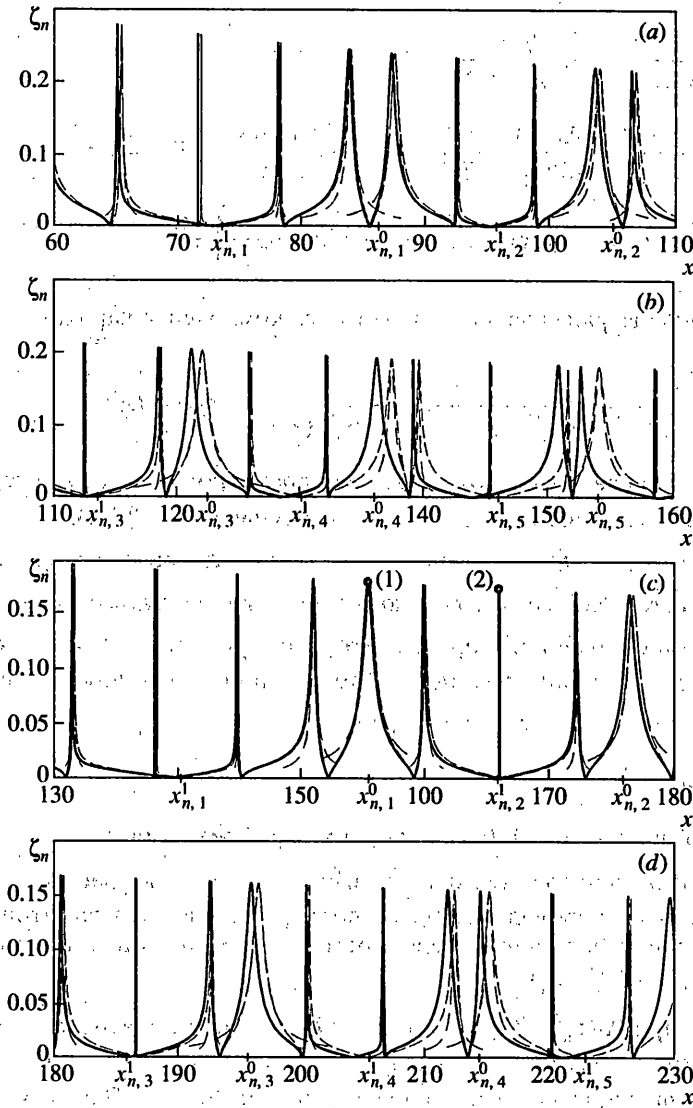
Принимая во внимание (1.19), в первом приближении находим  $x_{n,m}^0 = \beta_1(n - \tau_m(n/2)^{1/3})$ . В отличие от случая, рассмотренного в п. 2, не удается получить явную приближенную формулу вида (2.16), поскольку в данном случае второе слагаемое является функцией большой изменчивости и не может быть аппроксимировано константой при  $x = x_{n,m}^0 + Q(1)$ .

Во-вторых, при  $\text{Ai}(\tau_1) = O(1)$  величина  $D_1^{(1)}$  может обратиться в нуль в малой окрестности корней функции  $\cos \chi(x)$ , причем эта окрестность тем меньше, чем ближе корень функции  $\cos \chi(x)$  и корень функции  $\text{Ai}'(\tau_1)$ . Заметим, что соседние корни функции  $\text{Ai}'(\tau_1)$  расположены по оси  $x$  на расстоянии  $\Delta x = O(x_1^{1/3})$ , а соседние корни функции  $\cos \chi(x)$  – на расстоянии  $\Delta x = O(1)$ .

Обозначим через  $x_{n,m}^1$  корень уравнения  $x_1 = n - \tau'_m (x_1 / 2)^{1/3}$ , где  $\tau'_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) – корень производной функции Эйри, при больших  $m$ :

$$\tau'_m \approx -\left[\frac{3\pi}{2} \left(m - \frac{3}{4}\right)\right]^{2/3} \quad (3.13)$$

в первом приближении  $x_{n,m}^1 = \beta_1(n - \tau'_m(n/2)^{1/3})$ . Для всех корней уравнения  $D_1^{(1)} = 0$  введем нумерацию  $x_{n,m,k}$ , где  $k = \overline{0, K}$  – номер корня в интервале  $x_{n,m}^1 \leq x < x_{n,m+1}^1$ ,  $K+1 = O(n^{1/3})$  – число корней в этом интервале,  $k=0$  соответствует ближайшему к  $x_{n,m}^1$  корню. Для корней, лежащих слева от  $x_{n,1}^1$ , будем полагать  $m=1, k=-1, -2, \dots$



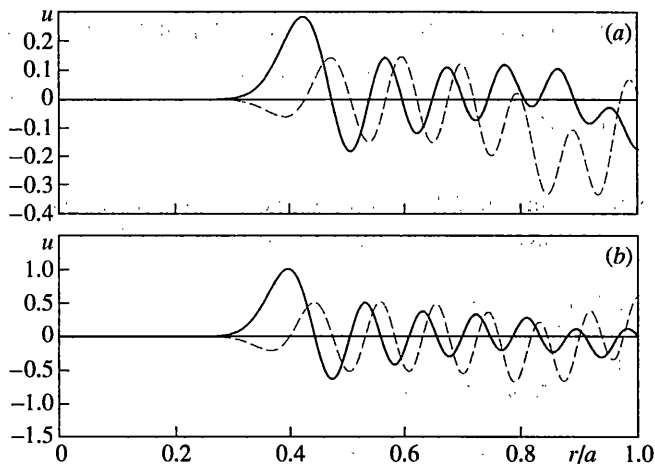
Фиг. 3

Перейдем в формуле (3.11) к разложению в окрестности резонансной частоты  $x_{n,m,k}$ , снова используя представление (2.12) и отбрасывая асимптотически малые члены при вычислении  $dD_1^{(1)}/dx$ . В результате приходим к стандартному локальному представлению

$$\zeta_{n,m,k} = A_{n,m,k} \frac{\Gamma_{n,m,k}}{|x - x_{n,m,k} + i\Gamma_{n,m,k}|} \quad (3.14)$$

$$A_{n,m,k} = \frac{4}{\sqrt{\pi x_{n,m,k}}}, \quad \Gamma_{n,m,k} = \frac{\alpha\beta_1}{p_1(x_{n,m,k})\sqrt{\beta_1^2 - 1}}$$

$$p_1(x) = (1 - 2\gamma^2)^2 \left[ 1 - \tau_1 \left( \frac{\text{Ai}(\tau_1)}{\text{Ai}'(\tau_1)} \right)^2 \right] + 4\gamma^2(1 - \gamma^2) \frac{1}{\cos^2 \chi(x)}$$



Фиг. 4

Представление (3.14) применимо на интервале  $x - x_{n,m,k} \ll \beta_1$  при условии  $\Gamma_{n,m,k} \ll \beta_1$ , что эквивалентно  $\kappa / \sqrt{\beta_1^2 - 1} \ll 1$ .

На фиг. 3 представлены результаты тестирования формул (3.11) и (3.14). Формуле (3.11) соответствует штриховая линия, формуле (3.14) – штрихпунктирная линия, точное решение показано сплошной линией для  $n = 15$  (а, в),  $n = 30$  (с, д). Значения физических параметров определяются соотношениями (1.17).

Выражение для величины  $p_1$  позволяет сделать качественные выводы о ширине резонансов. Если частота  $x_{n,m,k}$  лежит в окрестности корня функции  $\text{Ai}(\tau_1)$ , т.е., в окрестности частоты  $x_{n,m}^0$  то  $p(x_{n,m,k}) \sim 1$ , следовательно, ширина резонанса  $\Gamma_{n,m,k}$  имеет такой же порядок, как и ширина резонансов волн типа шепчущей галереи первой группы. Если же частота  $x_{n,m,k}$  лежит в окрестности корней функции  $\cos \chi(x)$ , то  $p(x_{n,m,k}) \gg 1$ , следовательно, в этом случае резонанс будет значительно уже, причем ширина резонанса будет тем меньше, чем ближе корень функции  $\cos \chi(x)$  и корень функции  $\text{Ai}'(\tau_1)$ . Таким образом, самые узкие резонансы лежат в окрестности частот  $x_{n,m}^1$ . Эти выводы полностью согласуются с численными результатами, представленными на фиг. 1 и фиг. 3.

На фиг. 4 показано поведение перемещений  $u_{r,n}$  (сплошная линия) и  $u_{\theta,n}$  (штриховая линия) на частотах, соответствующих вершинам широкого (точка 1 на фиг. 3; в) и узкого (точка 2 на фиг. 3, в) резонансных пиков. Перемещения рассчитаны по формулам (1.12) и нормированы на  $C_{1,n}a$ . Из фиг. 4 видно, что различие в ширине резонансов связано с тем, что в точке 1 колебания цилиндра вблизи его поверхности имеют преимущественно нормальный характер, а в точке 2 – преимущественно тангенциальный. В рассматриваемом случае идеальной жидкости тангенциальная составляющая не излучает энергию в окружающую среду.

**4. Рассеяние плоской акустической волны упругой сферой.** В задаче о рассеянии плоской акустической волны упругой сферой давления в падающей и рассеянной волне следует представить в виде [1]:

$$p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta) \quad (4.1)$$

где  $r, \theta$  – сферические координаты,  $j_n$  – сферическая функция Бесселя,  $P_n$  – полином Лежандра, и

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) B_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta) \quad (4.2)$$

где  $B_n$  – искомые постоянные,  $h_n^{(1)}$  – сферическая функция Ханкеля первого рода. Уравнения для потенциалов Ламе в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_0 \varphi + \beta_1^{-2} k^2 \varphi = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(\psi) + \beta_2^{-2} k^2 \psi = 0$$

$$k_0 = \text{ctg} \theta, \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \Phi(f) = \frac{\partial f}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta f$$

Перемещения и напряжения связаны с функциями  $\varphi$  и  $\psi$  формулами

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \Phi(\psi), \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \psi \quad (4.4)$$

$$\sigma_r = \rho_1 c^2 \left[ -k^2 \varphi + 2\beta_2^2 \left( -\frac{1}{r^2} \Delta_0 \varphi - \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Phi(\psi) - \frac{1}{r^2} \Phi(\psi) \right) \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \rho_1 c^2 \left[ k^2 \psi + 2\beta_2^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(\psi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \psi \right) \right]$$

Граничные условия на поверхности контакта по-прежнему имеют вид (1.4), где  $a$  – радиус сферы.

Резонансный компонент парциальных мод при рассеянии назад ( $\theta = 0$ ) для сферы выражается формулой [1]:

$$\zeta_n = \frac{4n_1}{x} \left| B_n + \frac{j'_n(x)}{h_n^{(1)'}(x)} \right|, \quad n_1 = n + 1/2 \quad (4.5)$$

Представим потенциалы Ламе, напряжения и перемещения в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\{\varphi, u_r, \sigma_r\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi_n(r), u_{r,n}(r), \sigma_{r,n}(r)\} P_n(\cos \theta) \quad (4.6)$$

$$\{\psi, u_\theta, \sigma_{r\theta}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\psi_n(r), u_{\theta,n}(r), \sigma_{r\theta,n}(r)\} \frac{1}{n_1} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}$$

Введем новую переменную  $\zeta$  по формуле  $\zeta = 1 - r/a$ . При подстановке представлений (4.6) в уравнения (4.3), (4.4) следует использовать соотношения

$$\Delta_0 P_n(\cos \theta) = -n(n+1) P_n(\cos \theta), \quad \Phi \left( \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta) \right) = \Delta_0 P_n(\cos \theta) \quad (4.7)$$

После элементарных преобразований получим

$$\frac{d^2\varphi_n}{d\zeta^2} - \frac{2}{1-\zeta} \frac{d\varphi_n}{d\zeta} - \frac{n_1^2\varphi_n}{(1-\zeta)^2} + x_1^2\varphi_n + \frac{\varphi_n}{4(1-\zeta)^2} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2\psi_n}{d\zeta^2} - \frac{2}{1-\zeta} \frac{d\psi_n}{d\zeta} - \frac{n_1^2\psi_n}{(1-\zeta)^2} + x_1^2\psi_n + \frac{\psi_n}{4(1-\zeta)^2} = 0$$

$$u_{r,n} = \frac{1}{a} \left( -\frac{d\varphi_n}{d\zeta} - \frac{n_1\psi_n}{1-\zeta} + \frac{\psi_n}{4n_1(1-\zeta)} \right), \quad u_{\theta,n} = \frac{1}{a} \left( \frac{n_1\varphi_n}{1-\zeta} + \frac{d\psi_n}{d\zeta} - \frac{\psi_n}{1-\zeta} \right) \quad (4.9)$$

$$\sigma_{r,n} = \frac{\rho_1 c^2 \beta_2^2}{a^2} \left[ -x_2^2\varphi_n + 2 \left( \frac{n_1^2\varphi_n}{(1-\zeta)^2} + \frac{2}{1-\zeta} \frac{d\varphi_n}{d\zeta} - \frac{\varphi_n}{4(1-\zeta)^2} + \right. \right. \quad (4.10)$$

$$\left. + \frac{n_1}{1-\zeta} \frac{d\psi_n}{d\zeta} + \frac{n_1\psi_n}{(1-\zeta)^2} - \frac{1}{4n_1(1-\zeta)} \frac{d\psi_n}{d\zeta} - \frac{\psi_n}{4n_1(1-\zeta)^2} \right]$$

$$\sigma_{\theta,n} = \frac{\rho_1 c^2 \beta_2^2}{a^2} \left[ x_2^2\psi_n + 2 \left( -\frac{n_1}{1-\zeta} \frac{d\varphi_n}{d\zeta} - \frac{n_1\varphi_n}{(1-\zeta)^2} - \frac{n_1^2\psi_n}{(1-\zeta)^2} - \frac{1}{1-\zeta} \frac{d\psi_n}{d\zeta} + \frac{5\psi_n}{4(1-\zeta)^2} \right) \right]$$

Аналогично тому, как это было сделано для цилиндра, для сферы можно построить коротковолновые модели в областях  $x = n_1\beta_2 + O(x_2^{1/3})$  и  $x = n_1\beta_1 + O(x_1^{1/3})$ .

С точностью до замены величины  $n$  на величину  $n_1$  приближенные уравнения для потенциалов Ламе будут иметь вид (2.3), (2.6) и (3.1), (3.3), соответственно, а приближенные выражения для перемещений и напряжений примут вид

$$u_{r,n} = \frac{1}{a} \left( -\frac{d\varphi_n}{d\zeta} - \frac{n_1}{1-\zeta} \psi_n \right), \quad u_{\theta,n} = \frac{1}{a} \left( \frac{n_1}{1-\zeta} \varphi_n + \frac{d\psi_n}{d\zeta} \right) \quad (4.11)$$

$$\sigma_{r,n} = \frac{\rho_1 c^2 \beta_2^2}{a^2} \left[ -x_2^2\varphi_n + 2 \left( \frac{n_1^2\varphi_n}{(1-\zeta)^2} + \frac{n_1}{1-\zeta} \frac{d\psi_n}{d\zeta} \right) \right]$$

$$\sigma_{\theta,n} = \frac{\rho_1 c^2 \beta_2^2}{a^2} \left[ x_2^2\psi_n + 2 \left( -\frac{n_1}{1-\zeta} \frac{d\varphi_n}{d\zeta} - \frac{n_1^2\psi_n}{(1-\zeta)^2} \right) \right]$$

Приближенные формулы для резонансного компонента и локальные аппроксимации в окрестности резонансных частот также сохраняют свой вид с точностью до замены цилиндрических функций Бесселя их сферическими аналогами, величины  $n$  на величину  $n_1$ , множителя  $8/(\pi x)^{3/2}$  в формулах (2.11) и (3.11) на  $4n_1/x^3$ , и выражений для амплитуд  $A_{n,m}$  и  $A_{n,m,k}$  в формулах (2.13) и (3.14) на  $4n_1/x_{n,m}$  и  $4n_1/x_{n,m,k}$ , соответственно.

В заключение отметим, что предложенный подход может быть распространен на некруговые цилиндры и произвольные тела вращения. При этом, однако, возникнут дополнительные трудности, связанные с приближенным решением уравнения Гельмгольца для давления в жидкости, а также с приближенным определением функции  $\psi_n$  в случае резонансов второй группы. Но приближенное решение для  $\varphi_n$ , даже без учета функции  $\psi_n$ , позволит определить положения широких резонансов, более важных в практическом отношении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00843) и ИНТАС (грант YSF 2001/1-7).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векслер Н.Д. Акустическая спектроскопия. Таллинн: Валгус, 1989. 324 с.
2. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. N.Y. etc.: Acad. Press, 1998. 226 p.
3. Каплунов Ю.Д., Ковалев В.А. Приближенное описание резонансов волны Рэлея в задачах рассеяния акустических волн упругими цилиндрами и сферами // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 180–186.
4. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
6. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., Мир, 1965. 238 с.

Саратов,  
Москва

Поступила в редакцию  
12.02.2002