

УДК 539.3

© 2002 г. В.К. ЛАЩЕНОВ

О СТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ УПРУГИХ БАЛОК ПО ГРАНИЦЕ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Рассматривается стационарная смешанная задача о движении конечной упругой балки по границе изотропной полосы. Задача решается методом кусочно-однородных решений (КОР) [1] с использованием одного из соотношений обобщенной ортогональности для однородных решений. Решение задачи о полубесконечной балке и система КОР построены в квадратурах методом Винера – Хопфа. Приводятся числовые примеры.

Ранее изучались стационарные смешанные задачи о контакте движущихся штампов с полуплоскостью и полосой [2–6], а также аналогичные задачи для составной плоскости [7–8].

1. Ортогональность однородных решений. Соотношения ортогональности для однородных решений, приведенные в [9], позволили эффективно применять метод кусочно-однородных решений к динамическим контактным задачам теории упругости, отвечающим стационарному движению конечных обойм и штампов по границе бесконечных ортотропных цилиндров и слоев. Докажем соотношения обобщенной ортогональности для стационарных контактных задач о движении конечных тонкостенных элементов типа балок и стрингеров (гусеничный ход) по изотропной полосе.

Пусть вдоль оси абсцисс прямоугольной системы координат Oxy движется с постоянной скоростью c изотропная полоса $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < 1$. Рассмотрим систему однородных решений, порожденную для определенности следующими условиями на границах полосы

$$u = \eta(x) = 0 \quad (y = 1), \quad v = \tau_{xy} = 0 \quad (y = 0) \quad (1.1)$$

Здесь u , v – компоненты вектора смещений \mathbf{u} в направлении осей x и y ; $\eta(x) \equiv D\partial^4 v / \partial x^4 + \sigma_y$ – балочная функция, D – жесткость балки, τ_{xy} , σ_y – касательное и нормальное напряжения.

В подвижной системе координат $O_1x_1y_1$, $x_1 = x - ct$, $y_1 = y$ воспользуемся уравнением Ламе

$$\mu \Delta \mathbf{u}_1 + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u}_1 = \rho \partial^2 \mathbf{u}_1 / \partial t^2 \quad (1.2)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\mathbf{u}_1 = \{u_1, v_1\}$ – вектор смещений, компоненты которого зависят от координат x_1 , y_1 и времени t , ρ – плотность, λ , μ – постоянные Ламе.

В силу стационарности решения

$$\mathbf{u}_1(x_1, y_1, t) = \mathbf{u}_1(x_1 + ct, y_1, 0) = \mathbf{u}_1(x, y, 0) \quad (1.3)$$

Положим

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}_1(x, y, 0) \quad (1.4)$$

Тогда из (1.3)–(1.4) следует

$$\mathbf{u}'_t(x_1, y_1, t) = \mathbf{u}'_{1x}(x, y, 0)x'_t = c\mathbf{u}'_x(x, y) \quad (1.5)$$

Аналогично

$$\mathbf{u}'_{1x_1}(x_1, y_1, t) = \mathbf{u}'_x(x, y), \quad \mathbf{u}'_{1y_1}(x_1, y_1, t) = \mathbf{u}'_y(x, y) \quad (1.6)$$

Разделим переменные $u(x, y) = U_1(p, y)e^{px}$; $v(x, y) = U_2(p, y)e^{px}$, где p – параметр, определяемый однородными граничными условиями задачи. Тогда в координатах x, y уравнение (1.2) согласно (1.5)–(1.6) равносильно системе

$$(c_1^2 - c^2)p^2 U_1(p, y) + c_2^2 U_1''(p, y) + (c_1^2 - c_2^2)p U_2'(p, y) = 0 \quad (1.7)$$

$$(c_2^2 - c^2)p^2 U_2(p, y) + c_1^2 U_2''(p, y) + (c_1^2 - c_2^2)p U_1'(p, y) = 0$$

$$c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \quad c_2^2 = \mu/\rho,$$

где c_1, c_2 – скорости волн сжатия и сдвига в изотропном материале, штрих – производная по y .

Собственные числа p_m ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) однородной задачи (1.1), (1.7) образуют точечный спектр, симметричный относительно вещественной и мнимой оси комплексной плоскости с предельной точкой на бесконечности. Пусть $U_j^m(y) \equiv U_j(p_m, y)$ – собственные функции, соответствующие собственному числу p_m и отвечающие $u, v, \tau_{xy}, \sigma_x, \sigma_y$ при $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

В системе координат Oxy в силу (1.6) формулы Коши и закон Гука

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \quad \sigma_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y, \dots$$

сохраняют свою форму. Поэтому

$$\begin{aligned} U_3^m(y) &= \mu[U_1^{m'}(y) + p_m U_2^m(y)], \quad U_4^m(y) = \rho[c_1^2 p_m U_1^m(y) + (c_1^2 - 2c_2^2)U_2^{m'}(y)] \\ U_5^m(y) &= \rho[(c_1^2 - 2c_2^2)p_m U_1^m(y) + c_1^2 U_2^{m'}(y)] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Первое уравнение системы (1.7) при $p = p_m$ умножим на $U_1^n(y)$, n – любое целое, кроме нуля, второе уравнение при $p = p_n$ – на $U_2^m(y)$. Полученные уравнения проинтегрируем по y от 0 до 1 и из результирующих равенств с учетом (1.8) составим линейную комбинацию с коэффициентами p_m и p_n :

$$\rho(p_m U_{mn} + p_n V_{mn}) - [p_m U_2^m(y) U_5^n(y) + p_n U_1^n(y) U_3^m(y)]_{y=0}^{y=1} = 0 \quad (1.9)$$

$$U_{mn} = \int_0^1 [c_1^2 U_2^{m'}(y) U_2^n(y) - (c_1^2 - c^2) p_m p_n U_1^m(y) U_1^n(y)] dy$$

$$V_{mn} = \int_0^1 [c_2^2 U_1^{m'}(y) U_1^n(y) - (c_2^2 - c^2) p_m p_n U_2^m(y) U_2^n(y)] dy$$

Из (1.9) в силу граничных условий (1.1) имеем

$$\rho(p_m U_{mn} + p_n V_{mn}) + D p_m p_n^4 U_2^m(1) U_2^n(1) = 0$$

Отсюда в силу симметрии $U_{mn} = U_{nm}$, $V_{mn} = V_{nm}$ приходим для $p_m^2 \neq p_n^2$ к соотношениям

$$\rho U_{mn} - D p_m^2 p_n^2 U_2^m(1) U_2^n(1) = 0, \quad \rho V_{mn} + D p_m p_n (p_m^2 + p_n^2) U_2^m(1) U_2^n(1) = 0 \quad (1.10)$$

Положим

$$W_{mn} = \int_0^1 \left\{ \lambda \frac{c^2}{c_1^2} U_2^m + \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) U_4^m \right\} U_1^n - U_2^m \left[\mu \frac{c^2}{c_2^2} U_1^n + \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) U_3^n \right] dy$$

Нетрудно проверить, что $\rho V_{mn} = p_m W_{mn}$. Сопоставив это равенство со вторым соотношением из (1.10), находим

$$W_{mn} + D p_n (p_m^2 + p_n^2) U_2^m(1) U_2^n(1) = 0, \quad p_m^2 \neq p_n^2 \quad (1.11)$$

и следовательно,

$$W_{nm} + D p_m (p_m^2 + p_n^2) U_2^m(1) U_2^n(1) = 0, \quad p_m^2 \neq p_n^2 \quad (1.12)$$

Таким образом, соотношения обобщенной ортогональности с нагрузкой для балки имеют вид

$$\int_0^1 (M_1^m u^n - v^m M_2^n) dy + M^m \frac{\partial v^n}{\partial x} + v^m P^n = 0, \quad p_m^2 \neq p_n^2 \quad (1.13)$$

$$\int_0^1 (u^m M_1^n - M_2^m v^n) dy + \frac{\partial v^m}{\partial x} M^n + P^m v^n = 0, \quad p_m^2 \neq p_n^2 \quad (1.14)$$

$$u^m = U_1^m(y) e^{p_m x}, \quad v^m = U_2^m(y) e^{p_m x}$$

$$M_1^m(y) = \lambda \frac{c^2}{c_1^2} \frac{\partial v^m}{\partial y} + \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \sigma_x^m, \quad M_2^m(y) = \mu \frac{c^2}{c_2^2} \frac{\partial u^m}{\partial y} + \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) \tau_{xy}^m$$

где $M^m = D \partial^2 v^m / \partial x^2$, $P^m = D \partial^3 v^m / \partial x^3$ – момент и перерезывающая сила, соответствующие собственному числу p_m и найденные, как и все внеинтегральные члены, в точке $x = 0, y = 1$.

Пусть изотропная полоса находится в контакте со стрингером

$$\sigma_y = f(x), \quad SEh^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \tau_{xy} = g(x) \quad (y = 1); \quad u = v = 0 \quad (y = 0) \quad (1.15)$$

где S – сечение, E – модуль упругости стрингера, h – толщина пластины, $f(x)$, $g(x)$ – заданные функции.

Используя в (1.9) однородные граничные условия (1.15), приходим к равенству

$$\rho (p_m U_{mn} + p_n V_{mn}) - SEh^{-1} p_m p_n U_1^m(1) U_1^n(1) = 0$$

из которого, повторив вывод соотношений (1.10)–(1.12), для $p_m^2 \neq p_n^2$ получим

$$\rho U_{mn} - SEh^{-1} p_m p_n U_1^m(1) U_1^n(1) = 0, \quad V_{mn} = 0$$

$$W_{mn} + SEh^{-1} p_m U_1^m(1) U_1^n(1) = 0, \quad W_{nm} + SEh^{-1} p_n U_1^m(1) U_1^n(1) = 0$$

Отсюда находим соотношения обобщенной ортогональности с нагрузкой для стрингера

$$\int_0^1 (M_1^m u^n - v^m M_2^n) dy + h^{-1} T^m u^n = 0, \quad p_m^2 \neq p_n^2 \quad (1.16)$$

$$\int_0^1 (u^m M_1^n - M_2^m v^n) dy + h^{-1} u^m T^n = 0, \quad p_m^2 \neq p_n^2 \quad (1.17)$$

где $T^m = SEdu^m / dx$ – продольная сила, соответствующая собственному числу p_m , приложенная в точке $x = 0, y = 1$. Соотношения обобщенной ортогональности (1.13), (1.14) и (1.16), (1.17) справедливы для любой системы однородных решений, порожденной естественными механическими условиями: контакт с винклеровским основанием, скользящая и антискользящая заделка и т.п.

2. Постановка и решение неоднородной задачи о полубесконечной балке. В прямоугольной системе координат Oxy рассмотрим задачу о контакте неподвижной полубесконечной балки с изотропной полосой, движущейся с постоянной дозвуковой скоростью c . На балку действует параболическая нагрузка $q(x)$, к торцу приложены изгибающий момент Q_1 и перерезывающая сила Q_2 . Сила направлена по оси y , момент – против часовой стрелки. Между балкой и полосой трения нет, на свободной от контакта части грани полосы напряжения отсутствуют, основание полосы находится в скользящей заделке. Локальная энергия деформации под краем балки ограничена. Граничные условия задачи имеют вид

$$\tau_{xy} = 0 \quad (y = 1), \quad \tau_{xy} = \nu = 0 \quad (y = 0) \quad (2.1)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (x < 0, y = 1), \quad \eta(x) = q(x) \quad (x \geq 0, y = 1) \quad (2.2)$$

$$(-1)^{n-1} D \frac{\partial^n v}{\partial x^n} = Q_{n-1} \quad (x = 0, y = 1) \quad (2.3)$$

$$q(x) = \alpha_0 x^2 - 2\alpha_0 l x + \alpha_2, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_2 - \alpha_0 l^2 \geq 1 \quad (n = 2, 3)$$

Решение задачи можно искать в форме Папковича – Нейбера

$$u_1(x_1, y_1, t) = \text{grad}(\varphi + \mathbf{R}\psi) - 4(1 - \nu)\psi \quad (2.4)$$

где \mathbf{R} – радиус-вектор точки (x_1, y_1) в подвижной системе координат, ν – коэффициент Пуассона, скалярная и векторная функции φ и ψ удовлетворяют волновым уравнениям

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mathbf{R} \left(\Delta\psi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = 0, \quad \Delta\psi = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

В случае плоской деформации $\varphi = F_0$, $\psi = \{F_1, F_2\}$, $F_j = F_j(x_1, y_1, t)$ ($j = 0, 1, 2$). Пользуясь произвольностью одной из функций F_j , считаем $F_1 = 0$.

Запишем векторные уравнения (2.4), (2.5) покомпонентно

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} (F_0 + y_1 F_2), \quad v_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} (F_0 + y_1 F_2) - 4(1 - \nu) F_2 \quad (2.6)$$

$$\Delta F_0 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial t^2} + y_1 \left(\Delta F_2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} \right) = 0, \quad \Delta F_2 = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

Согласно (1.5), (1.6) формулы (2.6), (2.7) принимают вид

$$u(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (F_0^c + y F_2^c), \quad v(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (F_0^c + y F_2^c) - 4(1 - \nu) F_2^c \quad (2.8)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 F_0^c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_0^c}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) y \frac{\partial^2 F_2^c}{\partial x^2} = 0, \quad b^2 \frac{\partial^2 F_2^c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2^c}{\partial y^2} = 0 \quad (2.9)$$

$$F_j^c(x, y) \equiv F_j(x_1 + ct, y_1, 0) \quad (j = 0, 2), \quad a^2 = 1 - c^2 / c_1^2, \quad b^2 = 1 - c^2 / c_2^2$$

В трансформантах Лапласа

$$\Phi_j(p, y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F_j^c(x, y)e^{-px} dx \quad (2.10)$$

для уравнений (2.9) имеем

$$a^2 p^2 \Phi_0 + \Phi_0'' + (a^2 - b^2)p^2 y \Phi_2 = 0, \quad b^2 p^2 \Phi_2 + \Phi_2'' = 0$$

Отсюда

$$\Phi_0(p, y) = \Psi(p, y) - y\Phi_2(p, y) + 2[(a^2 - b^2)p^2]^{-1} \Phi_2'(p, y)$$

$$\Psi(p, y) \equiv A_0 \cos apy + B_0 \sin apy, \quad \Phi_2(p, y) = A_2 \cos bpy + B_2 \sin bpy$$

где A_0, B_0, A_2, B_2 – произвольные функции аргумента p , определяемые граничными условиями задачи.

Путем обращения формул (2.10) из (2.8) получим

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [p\Psi(p, y) + 2((a^2 - b^2)p)^{-1} \Phi_2'(p, y)] e^{px} dp \quad (2.11)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [\Psi'(p, y) - 2(a^2 - b^2)^{-1} \Phi_2(p, y)] e^{px} dp$$

где L – прямая $\text{Re } p = \varepsilon$.

Используя последнее представление для $v(x, y)$ и формулу

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{\mu}{\pi i} \int_L p[\Psi'(p, y) - (1 + b^2)(a^2 - b^2)^{-1} \Phi_2(p, y)] e^{px} dp$$

из граничных условий (2.1) с точностью до произвольного множителя, найдем

$$A_0 = (1 + b^2) \sin bp, \quad B_0 = A_2 = 0, \quad B_2 = -a(a^2 - b^2)p \sin ap$$

Формулы (2.11) принимают вид

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p)U_1(p, y)e^{px} dp, \quad v(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p)U_2(p, y)e^{px} dp \quad (2.12)$$

$$U_1(p, y) = p[(1 + b^2) \sin bp \cos apy - 2ab \sin ap \cos bpy] \quad (2.13)$$

$$U_2(p, y) = ap[2 \sin ap \sin bpy - (1 + b^2) \sin bp \sin apy]$$

где $C(p)$ – произвольная функция.

Запишем смешанные граничные условия (2.2) в трансформантах Лапласа.

$$\sigma^+(p) = C(p)N_1(p), \quad \eta^+(p) + \eta^-(p) = C(p)N_2(p) \quad (2.14)$$

$$\sigma^+(p) \equiv \int_0^{+\infty} \sigma_y(x, 1)e^{-px} dx, \quad \eta^-(p) \equiv \int_{-\infty}^0 \eta(x)e^{-px} dx$$

$$\eta^+(p) \equiv \int_0^{+\infty} q(x)e^{-px} dx = (2\alpha_0 - 2\alpha_0 p + \alpha_2 p^2)p^{-3}$$

$$N_1(p) = \mu p^2 [4ab \sin ap \cos bp - (1 + b^2)^2 \cos ap \sin bp], \quad N_2(p) = N_1(p) + Dp^4 U_2(p, 1)$$

Верхние индексы плюс и минус означают аналитичность функций в правой и левой полуплоскости соответственно.

Поскольку $N_j(-p) = -N_j(p)$ и $N_j(\bar{p}) = \overline{N_j(p)}$ ($j = 1, 2$), то нули этих функций расположены симметрично относительно координатных осей комплексной плоскости. Точнее [10], они расположены в некоторой полосе комплексной плоскости, симметричной относительно вещественной оси. Функция N_1 для каждой скорости $c \in (c_R, c_2)$, где c_R – скорость волн Релея в изотропном материале, имеет одну пару чисто мнимых нулей $\pm i\beta_0$, в дорелеевском скоростном диапазоне таких нулей нет [11]. Полное описание структуры множества нулей функций N_1 и способы их вычисления приведены в работе [12]. Нули функции N_2 , лежащие в правой полуплоскости и имеющие неотрицательные мнимые части, перенумеруем в порядке возрастания их вещественных частей и обозначим b_k ($k = 1, 2, \dots$), $b_{-k} = -b_k$. Асимптотически b_k стремятся к d_k – нулям произведения $\sin ap \sin bp$, перенумерованным в порядке возрастания

$$b_k = d_k + O(k^{-3}) \quad (2.15)$$

Так как для $c \in (0, c_R)$ и положительных β :

$$\begin{aligned} iN_2(i\beta) &= \beta^2 \{ \mu [4ab \operatorname{sh} a\beta \operatorname{ch} b\beta - (1+b^2)^2 \operatorname{ch} a\beta \operatorname{sh} b\beta] + a(1-b^2)D\beta^3 \operatorname{sh} a\beta \operatorname{sh} b\beta \} > \\ &> \beta^2 \{ 4\mu ab \operatorname{sh}(a-b)\beta + a(1-b^2)D\beta^3 \operatorname{sh} a\beta \operatorname{sh} b\beta \} > 0 \end{aligned}$$

то чисто мнимые нули функция N_2 может иметь только для сверхрелеевских скоростей и, как нетрудно заметить, при исключительном сочетании параметров. Поэтому далее предполагаем $N_2(i\beta) \neq 0$, также считаем $N_2'(b_k) \neq 0$.

Исключив функцию $C(p)$ из уравнений (2.14), придем к уравнению Винера–Хопфа

$$\eta^+(p) + \eta^-(p) = K(p)\sigma^+(p), \quad p \in L \quad (2.16)$$

где $K(p) = N_2(p)N_1^{-1}(p)$. Контур L при $c \in (0, c_R)$ совпадает с мнимой осью, а при $c \in (c_R, c_2)$ согласно принципу Мандельштама обходит точки $-i\beta_0, i\beta_0$ соответственно справа и слева по полуокружностям малого радиуса.

Найдем решение однородного уравнения

$$\eta_0^-(p) = K(p)\sigma_0^+(p), \quad p \in L \quad (2.17)$$

Разобьем уравнение (2.17) на две задачи Римана [13]:

$$\eta_j^-(p) = K_j(p)\sigma_j^+(p) \quad (j = 1, 2)$$

$$\sigma_0^+(p) = \sigma_1^+(p)\sigma_2^+(p), \quad \eta_0^-(p) = \eta_1^-(p)\eta_2^-(p)$$

Заметив, что

$$K(0) = \lim_{p \rightarrow 0} K(p) = 1; \quad K(i\beta) \sim A|\beta|^3 \quad \text{при } \beta \rightarrow \pm\infty; \quad A = \frac{a(1-b^2)D}{\mu[4ab - (1+b^2)^2]}$$

положим

$$K_1(p) = Ap^3 \operatorname{ctg}^3 \pi p, \quad 0 < c < c_R$$

$$K_2(p) = Ap^3 \operatorname{ctg}^3 \pi p \operatorname{ctg} \pi(p - i\beta_0) \operatorname{ctg} \pi(p + i\beta_0), \quad c_R < c < c_2$$

Факторизация котангенса дает

$$\sigma_1^+(p) = A^{-1/2} \frac{\Gamma^3(1/2 + p)}{\Gamma^3(1 + p)}, \quad 0 < c < c_R$$

$$\sigma_1^+(p) = \frac{(p + i\beta_0)\Gamma^3(1/2 + p)\Gamma(1/2 + p - i\beta_0)\Gamma(1/2 + p + i\beta_0)}{(-A)^{1/2}\Gamma^3(1 + p)\Gamma(1 + p - i\beta_0)\Gamma(1 + p + i\beta_0)}, \quad c_R < c < c_2$$

Отсюда благодаря известной асимптотике отношения гамма-функций имеем $\sigma_1^+(p) \sim |A|^{-1/2} p^{-3/2}, p \rightarrow \infty$.

Функция $K_2(p) = K(p)K_1^{-1}(p)$ на мнимой оси вещественна, не имеет нулей, полюсов,

$$K_2(0) = A^{-1}\pi^3, \quad 0 < c < c_R; \quad K_2(0) = A^{-1}\pi^3 \operatorname{th}^2 \pi\beta_0, \quad c_R < c < c_2$$

$$K_2(i\beta) = 1 + O(e^{-2\pi|\beta|}), \quad \beta \rightarrow \pm\infty$$

Поскольку индекс функции $K_2(p)$ на L равен нулю, решение второй задачи Римана имеет вид [13]

$$\sigma_2^+(p) = \exp\left\{-\frac{p}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln K_2(it)}{t^2 + p^2} dt\right\}, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\sigma_2^+(i\beta) = K_2^{-1/2}(i\beta) \exp\left\{\frac{\beta}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\ln[K_2(it)K_2^{-1}(i\beta)]}{t^2 - \beta^2} dt\right\}$$

Из уравнения (2.16) и (2.17) следует

$$\frac{\eta^-(p)}{\eta_0^-(p)} + \frac{\phi(p)}{p^3} = \frac{\sigma^+(p)}{\sigma_0^+(p)}, \quad p \in L$$

$$\phi(p) = (2\alpha_0 - 2\alpha_0/p + \alpha_2 p^2) / \eta_0^-(p)$$

Отсюда на основании асимптотических оценок $\sigma_0^+(p) = O(p^{-3/2}), \sigma^+(p)/\sigma_0^+(p) = O(p), p \rightarrow \infty$, найденных соответственно по теореме абелева типа [14], и в силу ограниченности локальной энергии деформации полосы в окрестности края балки получим

$$\sigma^+(p) = \sigma_0^+(p) f_-(p)$$

$$f_-(p) = \frac{1}{p\eta_0^-(0)} \left\{ 2\alpha_0 \left[\left(\frac{\eta_0^{*-}(0)}{\eta_0^-(0)} - \frac{1}{p} \right) \left(l - \frac{1}{p} \right) - \frac{\eta_0^{-**}(0)}{2\eta_0^-(0)} + \left(\frac{\eta_0^{*-}(0)}{\eta_0^-(0)} \right)^2 \right] + \alpha_2 \right\} +$$

$$+ D_1 p + D_2$$

Здесь и далее

$$\eta_0^-(0) = 1, \quad \eta_0^{*-}(0) = -6 \ln 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln[K_2(it)K_2^{-1}(0)]}{t^2} dt$$

звездочка означает дифференцирование по p .

Числовые значения постоянных D_1 и D_2 найдем, используя условия (2.3) на торце балки. На верхней грани полосы для вертикального смещения имеем

$$v(x, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \eta_0^-(p) N_2^{-1}(p) f_-(p) U_2(p, 1) e^{px} dp$$

где L_1 – контур интегрирования, совпадающий с мнимой осью, исключая окрестность точки $p = 0$, которую он обходит справа по полуокружности малого радиуса.

Для $x > 0$, замыкая контур L_1 налево полуокружностями, проходящими между нулями функции N_2 , получим

$$v(x, 1) = \operatorname{Res}_{p=0} \left[\frac{\eta_0^-(p) f_-(p) U_2(p, 1) e^{px}}{N_2(p)} \right] - \frac{1}{D} \left[\sum_{k=-1}^{-\infty} V(b_k) e^{b_k x} + \sum_{k \in Z_-^C} V(\bar{b}_k) e^{\bar{b}_k x} \right]$$

$$V(b_k) = \eta_0^-(b_k) f_-(b_k) N_1(b_k) [b_k^4 N_2'(b_k)]^{-1}, \quad \eta_0^-(p) = [\sigma_0^+(-p)]^{-1}$$

где Z_-^C – множество номеров комплексных нулей функции N_2 , расположенных в третьем квадранте комплексной плоскости. Путем почленного дифференцирования последнего ряда вычислим значение второй и третьей производной функции $v(x, 1)$ при $x = 0$. Условия (2.3) приводят к системе двух ($n = 2, 3$) уравнений относительно D_1 и D_2 :

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} b_k^n V(b_k) + \sum_{k \in Z_-^C} \bar{b}_k^n V(\bar{b}_k) = (-1)^n Q_{n-1}$$

В силу асимптотической формулы (2.15) k -е члены в этих разложениях убывают не медленнее, чем $|k|^{-7/2}$ при $n = 2$ и $|k|^{-5/2}$ при $n = 3$.

Возвращаясь к уравнениям (2.14) и (2.17), находим

$$C(p) = \frac{\eta_0^-(p)}{N_2(p)} f_-(p), \quad \operatorname{Re} p < 0 \quad (2.18)$$

Подстановка (2.18) в (2.12) позволяет найти решение неоднородной задачи (2.1)–(2.3):

$$u_{q-}^0(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\eta_0^-(p)}{N_2(p)} f_-(p) U_q(p, y) e^{px} dp \quad (q = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (2.19)$$

Здесь и далее

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = \tau_{xy}, \quad u_4 = \sigma_x, \quad u_5 = \sigma_y$$

$$U_3(p, y) = 2a(1+b^2)\mu p^2 (\sin ap \sin bpy - \sin bp \sin apy)$$

$$U_4(p, y) = \mu p^2 [(2a^2 - b^2 + 1)(1+b^2) \sin bp \cos apy - 4ab \sin ap \cos bpy]$$

$$U_5(p, y) = \mu p^2 [4ab \sin ap \cos bpy - (1+b^2)^2 \sin bp \cos apy]$$

3. Постановка задачи о конечной балке. Рассмотрим задачу о движении с постоянной дозвуковой скоростью c изотропной полосы $-\infty < x_1 < +\infty$, $0 \leq y_1 \leq 1$ относительно балки конечной длины. В неподвижной системе координат $O_0 x_0 y_0$, $x_0 = x_1 + ct$, $y_0 = y_1$ граничные условия задачи имеют вид (нулевые индексы текущих координат опущены):

$$\tau_{xy} = 0 \quad (y = 1), \quad \tau_{xy} = v = 0 \quad (y = 0)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (x < -l, \quad x > l, \quad y = 1), \quad \eta(x) = q(x) \quad (-l \leq x \leq l, \quad y = 1)$$

$$(-1)^{n-1} D \frac{\partial^n v}{\partial x^n} = Q_{n-1} \quad (x = -l, \quad y = 1), \quad (-1)^{n-1} D \frac{\partial^n v}{\partial x^n} = Q_{n+1} \quad (x = l, \quad y = 1)$$

Здесь $q(x) = \alpha_0 x^2 - \alpha_0 l^2 + \alpha_2$ ($n = 2, 3$), момент Q_3 и сила Q_4 направлены соответственно по часовой стрелке и в направлении противоположном оси ординат.

В полуполосе $x_0 < 0, 0 \leq y_0 \leq 1$ решение строим в системе $Oxy, x = x_0 + l, y = y_0$ в виде суммы неоднородного решения (2.19) задачи (2.1)–(2.3) и ряда по КОР той же задачи с особенностями при $x = +\infty$. При $x_0 > 0, 0 \leq y_0 \leq 1, x = x_0 - l, y = y_0$ решение будем искать в аналогичной форме для основных (2.1) и следующих смешанных условий:

$$\eta(x) = \alpha_0 x^2 + 2\alpha_0 l x + \alpha_2 \quad (x \leq 0, y = 1), \quad \sigma_y = 0 \quad (x > 0, y = 1) \quad (3.1)$$

$$(-1)^{n-1} D \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = Q_{n+1} \quad (x = 0, y = 1, n = 2, 3) \quad (3.2)$$

с особенностями в КОР при $x = -\infty$.

Коэффициенты в рядах по КОР найдем при помощи соотношений ортогональности (1.13)–(1.14) из условия непрерывности решений на отрезке $x_0 = 0, 0 \leq y_0 \leq 1$.

4. Подсистемы КОР. Построим две подсистемы КОР. Согласно п. 3 каждый элемент первой подсистемы должен удовлетворять однородным условиям (2.1)–(2.3) и иметь особенность при $x = +\infty$. Эти элементы представимы в виде суммы решения основной задачи (2.1), $\eta(x) = 0$ ($-\infty < x < +\infty$), которое находится по формулам (2.13) при $p = b_k$, и решения корректирующей смешанной задачи, определяемой условиями (2.1),

$$\sigma_y = -N_1(b_k) e^{b_k x} \quad (x < 0, y = 1), \quad \eta(x) = 0 \quad (x > 0, y = 1) \quad (4.1)$$

$$D \partial^n u / \partial x^n = b_k^{n-4} N_1(b_k) \quad (x = 0, y = 1, n = 2, 3) \quad (4.2)$$

Здесь ненулевые правые части – это соответственно нормальное напряжение, момент и перерезывающая сила, возникающие в k -м однородном решении основной задачи.

Условия (4.1) приводят к уравнению Винера–Холфа

$$\eta^-(p) = K(p) [\sigma^+(p) + N_1(b_k)(p - b_k)^{-1}], \quad p \in L.$$

Повторив ход решения уравнения (2.16) с использованием условий (4.2) на торце, получим

$$C(p) = \frac{N_1(b_k) p^2 \eta_0^-(p)}{b_k^2 \sigma_0^+(b_k) N_2(p)(p - b_k)}$$

Таким образом, согласно принципу наложения решений элементы первой подсистемы КОР имеют вид

$$u_q^k(x, y) = C_k U_q(b_k, y) e^{b_k x} + \frac{C_k N_1(b_k)}{2\pi i b_k^2 \sigma_0^+(b_k)} \int_{L_1} \frac{p^2 \eta_0^-(p)}{N_2(p)(p - b_k)} U_q(p, y) e^{px} dp$$

где $q = 1, 2, 3, 4, 5; k = 1, 2, \dots, C_k$ – произвольные постоянные.

Элементы второй подсистемы с особенностью при $x = -\infty$ строятся аналогично

$$u_q^k(x, y) = C_k U_q(b_k, y) e^{b_k x} - \frac{C_k N_1(b_k)}{2\pi i b_k^2 \sigma_0^-(b_k)} \int_{L_2} \frac{p^2 \eta_0^+(p)}{N_2(p)(p - b_k)} U_q(p, y) e^{px} dp$$

$$k = -1, -2, \dots, \quad \eta_0^+(p) = [\sigma_0^+(p)]^{-1}, \quad \sigma_0^-(p) = [\eta_0^+(-p)]^{-1}$$

где контур L_2 обходит точку $p = 0$ слева.

5. Решение задачи о конечной балке. Согласно п. 3 решение этой задачи будем искать в виде

$$u_{q-}(x, y) = u_{q-}^0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} u_q^k(x, y) + \sum_{k \in Z_+^C} \bar{u}_q^k(x, y), \quad x < l$$

$$u_{q+}(x, y) = u_{q+}^0(x, y) + \sum_{k=-1}^{-\infty} u_q^k(x, y) + \sum_{k \in Z_-^C} \bar{u}_q^k(x, y), \quad x > -l \quad (5.1)$$

$$u_{q+}^0(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\eta_0^+(p)}{N_2(p)} f_+(p) U_q(p, y) e^{px} dp, \quad f_+(p) = f_-(-p)$$

где $u_{q+}^0(x, y)$ – решение задачи (2.1), (3.1), (3.2), Z_+^C – множество номеров комплексных нулей функции N_2 , расположенных в первом квадранте комплексной плоскости.

Постоянные C_k найдем из восьми условий непрерывности решения при $x_0 = 0$:

$$u_{q-}(l, y) = u_{q+}(-l, y), \quad 0 < y < 1 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^{q-1} u_{2-}(l, 1)}{\partial x^{q-1}} = \frac{\partial^{q-1} u_{2+}(-l, 1)}{\partial x^{q-1}} \quad (q = 1, 2, 3, 4) \quad (5.3)$$

заменяв в (5.2) два из них ($q = 3, 4$) на их линейные комбинации

$$u_{6\pm}(x, y) = \lambda \frac{c^2}{c_1^2} \frac{\partial u_{2\pm}}{\partial y} + \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) u_{4\pm}(x, y)$$

$$u_{7\pm}(x, y) = \mu \frac{c^2}{c_2^2} \frac{\partial u_{1\pm}}{\partial y} + \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) u_{3\pm}(x, y)$$

Трансформанты Лапласа функций $u_6(x, y)$, $u_7(x, y)$ имеют вид

$$U_6(p, y) = 2a\mu(1 + b^2)p^2(a \sin bp \cos apy - b \sin ap \cos bpy)$$

$$U_7(p, y) = a\mu p^2[4b^2 \sin ap \sin bpy - (1 + b^2)^2 \sin bp \sin apy]$$

Подставим (5.1) в новые условия (5.2) и разложим контурные интегралы в ряды по вычетам. Поменяв в двойных суммах порядок суммирования и заметив, что $U_q(-p, y) = (-1)^{q-1} U_q(p, y)$ ($q = 1, 2, 6, 7$), получим (δ_{kq} – символ Кронекера):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{+\infty} U_q^k(y) \left\{ X_k + (-1)^{q-1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n T_-(b_n, -b_k) + \sum_{n \in Z_+^C} \bar{X}_n T_-(\bar{b}_n, -b_k) + S_-(-b_k) \right] \right\} + \\ & + \sum_{k \in Z_+^C} \bar{U}_q^k(y) \left\{ \bar{X}_k + (-1)^{q-1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n T_-(b_n, -\bar{b}_k) + \sum_{n \in Z_+^C} \bar{X}_n T_-(\bar{b}_n, -\bar{b}_k) + S_-(-\bar{b}_k) \right] \right\} - \\ & - \sum_{k=-1}^{-\infty} U_q^k(y) \left\{ X_k + (-1)^{q-1} \left[\sum_{n=-1}^{-\infty} X_n T_+(b_n, -b_k) + \sum_{n \in Z_-^C} \bar{X}_n T_+(\bar{b}_n, -b_k) - S_+(-b_k) \right] \right\} - \\ & - \sum_{k \in Z_-^C} \bar{U}_q^k(y) \left\{ \bar{X}_k + (-1)^{q-1} \left[\sum_{n=-1}^{-\infty} X_n T_+(b_n, -\bar{b}_k) + \sum_{n \in Z_-^C} \bar{X}_n T_+(\bar{b}_n, -\bar{b}_k) - S_+(-\bar{b}_k) \right] \right\} = \\ & = \delta_{1q} R(y) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$(q=1,2,6,7), X_{\pm k} = C_{\pm k} e^{\pm b_{\pm k} l} \quad (k=1,2,\dots), T_{\pm}(t, \tau) = \frac{\tau^2 \eta_0^{\pm}(\tau) N_1(t) e^{\pm(b_k + b_n)l}}{t^2 \sigma_0^{\mp}(t) N_2'(\tau)(\tau - t)}$$

$$S_{\pm}(t) = \frac{\eta_0^{\pm}(t) f_{\pm}(t) e^{\mp l}}{N_2'(t)}, R(y) = 2\alpha_0 \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left[(l + \eta_0^{-*}(0)) g(p, y) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial p} g(p, y) \right] +$$

$$+ 2 \frac{2a^2 - b^2 - 1}{\mu[4a^2 - (1 + b^2)^2]} \{D_2 + D_4 + (l + \eta_0^{-*}(0))[\alpha_0(2\eta_0^{-*}(0)(l + \eta_0^{-*}(0)) - \eta_0^{-**}(0)) + \alpha_2]\}$$

$$g(p, y) = p U_1(p, y) \eta_0^{-}(p) e^{pl} N_2^{-1}(p)$$

Умножим обе части первого ($q = 1$) и четвертого ($q = 7$) уравнений системы (5.4) соответственно на $U_6^m(y)$ и $-U_2^m(y)$, второго ($q = 2$) и третьего ($q = 6$) на $-U_7^m(y)$ и $U_1^m(y)$. Сложим указанные пары уравнений и полученные равенства проинтегрируем по y от 0 до 1. В силу соотношений обобщенной ортогональности (1.13), (1.14) с учетом условий (5.3) это приводит к нормальной системе Пуанкаре–Коха с двусторонним определителем

$$X_m + X_{-m} - \sum_{n=1}^{+\infty} [X_n T_-(b_n, -b_m) + X_{-n} T_+(-b_n, b_m)] -$$

$$- \sum_{n \in Z_+^C} [\bar{X}_n T_-(\bar{b}_n, -b_m) + \bar{X}_{-n} T_+(-\bar{b}_n, b_m)] = 0$$

$$X_m - X_{-m} + \sum_{n=1}^{+\infty} [X_n T_-(b_n, -b_m) - X_{-n} T_+(-b_n, b_m)] +$$

$$+ \sum_{n \in Z_+^C} [\bar{X}_n T_-(\bar{b}_n, -b_m) - \bar{X}_{-n} T_+(-\bar{b}_n, b_m)] = h_m - 2S_-(-b_m)$$

$$h_m = \frac{\int_0^1 R(y) U_6^m(y) dy}{\int_0^1 [U_1^m(y) U_6^m(y) - U_2^m(y) U_7^m(y)] dy + 2D b_m^3 U_2^{m2}(1)} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

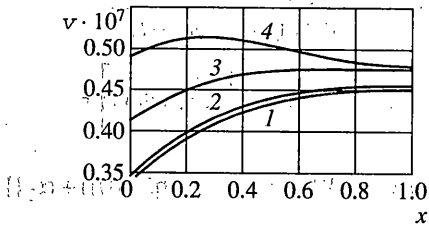
матричные элементы которой, согласно (2.15), экспоненциально убывают по номерам строк и столбцов.

В заключение отметим, что изложенная здесь методика естественным образом распространяется на случай любого конечного числа балок кусочно-постоянной жесткости, а также на задачи для периодических систем балок.

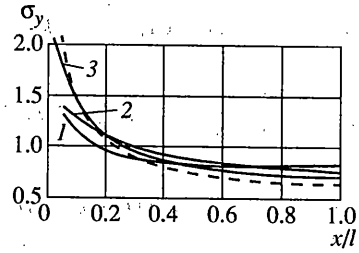
6. Примеры. Разработана программа, составленная на языке СИ, позволяющая для широкого диапазона параметров рассматриваемой задачи рассчитывать изгиб балок и деформации полосы, движущейся с дорелеевской скоростью. Алгоритм расчета основан на использовании аналитических результатов данной статьи.

Для различных параметров задачи приведем результаты расчета контактных напряжений и перемещений под балкой.

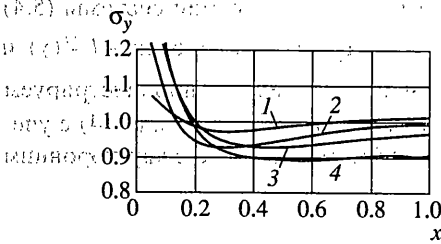
Пусть по изотропной полосе с модулем упругости $\mu = 8.2 \cdot 10^7$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.28$ движется балка длиной $2l$ ($l = 1$ – ширина полосы) и жесткостью $D = 1900$. На балку действует равномерно распределенная нагрузка с единичной плотностью, $\alpha_2 = 1$. На фиг. 1 приведены графики прогибов балки для скорости $c = 10, 1000, 2000, 2500$ (в рассматриваемом случае $c_R = 2970, c_2 = 3212$). Графики перенумерованы по возрастанию скорости. Расположение кривых показывает, что при скорости движения балки менее одной трети c_R решение стационарной динами-



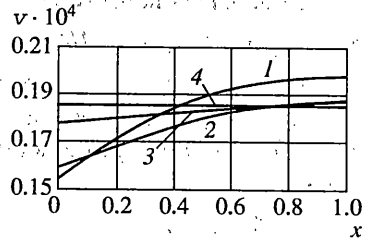
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ческой задачи практически не отличается от решения статической задачи. При дальнейшем увеличении скорости отличие в решениях становится существенным и с ростом c возрастает.

На фиг. 2 показано перераспределение контактных нормальных напряжений и их приближение с уменьшением длины балки к известному решению задачи Садовского о вдавливании плоского штампа в упругую полуплоскость. Здесь приняты следующие параметры задачи: $\mu = 3500$, $\nu = 0,3$, $D = 10^8$, $c = 100$, $c_R = 112$, $c_2 = 120$. Номера эюр соответствуют значениям параметра l : 0,5, 0,25, 0,15; штриховой линией показано решение задачи Садовского.

На фиг. 3, 4 изображены графики прогибов и напряжений под балкой, контактирующей с полосой при $l = 1$, $\alpha_2 = 1$, $c = 100$, $\mu = 2 \cdot 10^4$, $\nu = 0,28$; $c_R = 146$, $c_2 = 158$. Номера 1, 2, 3, 4 соответствуют жесткостям $D = 240, 1900, 8 \cdot 10^4, 10^8$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нуллер Б.М. Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 620–631.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
4. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
5. Бабейко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
6. Белоконов А.В., Шехов В.П. Смешанные задачи теории вязкоупругости с движущимися штампами // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов на/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1983. С. 231–246.
7. Симонов И.В. Динамика трещины отрыва – сдвига на границе раздела двух упругих материалов // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 65–68.
8. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М. О дозвуковом стационарном движении штампов и гибких накладок по границе упругой полуплоскости и составной плоскости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 134–144.

9. Лащенов В.К., Нуллер Б.М. Метод кусочно-однородных решений в стационарных задачах теории упругости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 321–331.
10. Bellman R., Cooke K.L. Differential-difference equations. N.Y.; L.: Acad. Press, 1963.
11. Гоголадзе В.Г. Дисперсия волн Релея в слое // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1947. Сб. 119. С. 27–38.
12. Лащенов В.К., Сулимов М.Г. Корни дисперсионного уравнения для задачи о движении упругой полосы // Вестн. СПбГУ. 1995. Сер. 1. Вып. 1. № 1. С. 82–88.
13. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
14. Noble B. Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L. etc.: Pergamon Press, 1958.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
3.03.2001