

УДК 539.3

© 2002 г. В.Т. ГРИНЧЕНКО, А.Ф. УЛИТКО

РОЛЬ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ УЧЕТЕ СИЛ ТРЕНИЯ В ЗОНЕ КОНТАКТА

В механике контактного взаимодействия деформируемых твердых тел при наличии сил трения в зоне контакта, учет которых чаще всего проводится по закону сухого трения Амонтона – Кулона, часто не акцентируется внимание на истории нагружения [1, 2]. Между тем даже в условиях чисто упругой деформации контактирующих тел истинное распределение контактных напряжений нельзя отделить от теоретически возможных без учета истории нагружения [3, 4]. Исходя из общетеоретических рассуждений зависимость решений контактных задач с трением от истории нагружения можно обосновать, обратив внимание на то обстоятельство, что из-за необратимой потери энергии в зонах проскальзывания процесс нагрузки и разгрузки не будет идеально упругим. А как известно, при отходе от модели идеально упругого тела необходимо учитывать историю нагружения. Ярким примером этому являются замечательные работы А.А. Ильюшина по теории пластичности [5, 6].

Роль истории нагружения в контактных задачах с трением ниже проиллюстрирована на примере классической задачи сжатия двух идентичных упругих дисков, дополнительно нагруженных крутящими моментами [7]. Заметим, что в работе [7] история нагружения несвободно вращающихся с постоянными угловыми скоростями сжатых дисков учтена введением в рассмотрение так называемой "защемленной" деформации, через которую находится область упругого проскальзывания в зоне контакта и объясняется наблюдаемое в эксперименте различие угловых скоростей ведущего и ведомого дисков (угловая скорость ведомого диска всегда меньше угловой скорости ведущего диска).

Два идентичных упругих диска радиуса R с жесткими валами радиуса ϵ в их центрах находятся в контакте под действием сосредоточенных сил P_0, Q_0 и крутящих моментов $M_0 = Q_0 R_0$, приложенных к валам дисков (фиг. 1). Вращение дисков отсутствует. Область контакта расположена симметрично относительно оси, проходящей через центры валов дисков, т.е. $-a \leq y \leq a$ в области контакта, причем $a/R \ll 1$. Незвестные в области контакта нормальные и касательные напряжения обозначим соответственно через $\sigma(x)$ и $\tau(x)$. Заранее неизвестен также размер области контакта $2a$. Придерживаясь традиционного подхода, ведущего свое начало для задачи контакта двух дисков еще из работы [7], исходим из формулировки рассматриваемой задачи в виде сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных контактных напряжений σ и τ . Точная система сингулярных интегральных уравнений контактных задач для диска представлена в [8]. Для относительно малых размеров области контакта (по сравнению с радиусами дисков) ядра Гильберта в точных уравнениях можно заменить ядром Коши и опустить слагаемые, учитывающие расположение внешних сил, т.е. исходить из формулировки задачи в предположении теории Герца [9].

В результате таких упрощений уравнения (18) работы [8] записываются в виде (плоская деформация):

$$-\frac{m-2}{m}\tau_+(y)+2\frac{m-1}{m}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a\frac{\sigma_-(t)dt}{t-y}=2G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^+$$

$$-\frac{m-2}{m}\tau_-(y)+2\frac{m-1}{m}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a\frac{\sigma_+(t)dt}{t-y}=2G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^-$$

(1)

$$\frac{m-2}{m}\sigma_+(y)+2\frac{m-1}{m}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a\frac{\tau_-(t)dt}{t-y}=2G\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^+$$

$$\frac{m-2}{m}\sigma_-(y)+2\frac{m-1}{m}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a\frac{\tau_+(t)dt}{t-y}=2G\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^-$$

Здесь знаком (+) обозначены четные, а знаком (-) нечетные функции на промежутке $(-a, a)$; принято, что $\sigma(y) = \sigma^+(y) + \sigma^-(y)$, $\tau(y) = \tau^+(y) + \tau^-(y)$, а через G и m обозначены соответственно модуль сдвига материала дисков и число Пуассона. Раздельная запись интегральных уравнений для четных и нечетных слагаемых искомых напряжений является предпочтительной в контактных задачах с трением, поскольку учет истории нагружения в каждом конкретном случае проводится заданием производных от перемещений в зоне контакта, входящих в правые части уравнений (1). В зависимости от условий четности правых частей устанавливается порядок их интегрирования.

В работе [10] и позже в [11] построено решение контактных задач для полупространства при нагружении тангенциальными силами. Приведенное в [11] решение о контакте двух дисков при наличии тангенциальных сил соответствует таким условиям нагружения: вначале диски прижаты друг к другу сосредоточенными силами P_0 , приложенными к валам дисков, а затем к валам дисков одновременно приложены равные по величине крутящие моменты M_0 (фиг. 1). По терминологии работы [7] такие условия нагружения соответствуют физически не реализуемому случаю, - оба диска являются ведущими. Правильное, по нашему мнению, описание процесса передачи нагрузки от крутящего момента на валу верхнего (ведущего) диска к валу нижнего (ведомого) диска дано ниже.

Исходя из уравнений (1), воспроизведем вкратце решение Каттенео - Миндлина [10, 11]. На этапе сжатия дисков силами P_0 касательные напряжения в зоне контакта отсутствуют, $\tau_+(y) = \tau_-(y) = 0$, а нормальные напряжения представляются только четным слагаемым $\sigma_+(y)$ ($\sigma_-(y) = 0$). С учетом кривизны ободов сжимаемых дисков

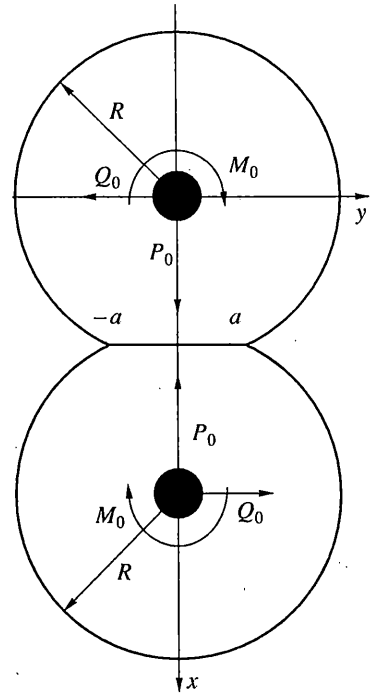
$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{x=0} = \left.\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^-\right|_{x=0} = \frac{y}{R}$$

(2)

второе уравнение системы (1) запишется так

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^a\frac{\sigma_+(t)}{2G}\frac{dt}{t-y} = \frac{m}{2(m-1)}\frac{y}{R} \quad (-a \leq y \leq a)$$

(3)



Фиг. 1

Отсюда следует известное решение Герца для нормальных контактных напряжений:

$$\frac{\sigma_+(y)}{2G} = -\frac{m}{2(m-1)} \frac{1}{R} \sqrt{a^2 - y^2} \quad (4)$$

Окружная деформация в зоне контакта находится алгебраическим путем из третьего уравнения системы (1):

$$\varepsilon_y = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^+ = \frac{m-2}{m} \frac{\sigma_+(y)}{2G} = -\frac{m-2}{2(m-1)} \frac{1}{R} \sqrt{a^2 - y^2} \quad (5)$$

Размер площадки контакта зависит от величины прижимающих сил P_0 и радиуса дисков R и вычисляется по формуле

$$a = 2 \sqrt{\frac{m-1}{m\pi} \frac{P_0 R}{2G}} \quad (6)$$

На следующем этапе нагружения уже сжатых дисков крутящими моментами равной величины, одновременно приложенными к валам дисков, в условиях отсутствия проскальзывания в зоне контакта перемещения u_y будут равны нулю. Отсутствие горизонтальных перемещений ($u_y = 0$, $-a \leq y \leq a$) следует из условий симметрии задачи. Касательные напряжения будут четной функцией координаты y . Для их определения из последнего уравнения системы (1) получаем однородное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau_+(t)}{2G} \frac{dt}{t-y} = 0 \quad (-a < y < a) \quad (7)$$

нетривиальное решение которого имеет вид

$$\tau_+(y)/2G = C / \sqrt{a^2 - y^2} \quad (8)$$

Постоянная интегрирования C находится из условия статического равновесия через сдвигающие силы $Q_0 = M_0/R$. В результате приходим к решению Каттенео – Миндлина

$$\tau_+(y) = \frac{1}{\pi} \frac{Q_0}{\sqrt{a^2 - y^2}} \quad (9)$$

Естественно предполагается, что $Q_0 < \mu_0 P_0$, где μ_0 – коэффициент сухого трения.

Возвращаясь к системе (1), из первого уравнения находим наклон к оси ou первоначально горизонтальной площадки контакта

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^+ = -\frac{m-2}{m} \frac{\tau_+(y)}{2G} = -\frac{m-2}{m} \frac{Q_0}{2G} \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - y^2}} \quad (10)$$

и убеждаемся в том, что размер площадки контакта, возникающий при сжатии дисков, и распределение нормальных напряжений в зоне контакта остаются неизменными.

Ограниченное решение для тангенциальных напряжений $\tau_+(y)$ может быть получено путем введения симметрично расположенных зон скольжения вблизи концевых точек ($y = \pm a$) области контакта. Для построения такого решения можно использовать метод, разработанный при решении контактной задачи с проскальзыванием для штампа с плоским основанием [1].

Равновесное состояние дисков, сжатых силами P_0 и нагруженных на валах крутящими моментами M_0 (сдвигающими силами $Q_0 = M_0/R$), может быть достигнуто многими другими способами нагружения. Простейшим из них является квазистатический

процесс нагружения, когда к валам дисков одновременно прикладываются монотонно возрастающие сжимающие силы P_0 и крутящие моменты M_0 . При дополнительном условии линейной зависимости величины моментов на каждом из этапов нагружения от величины прижимающих сил, т.е.

$$M_0 = Q_0 R = \kappa R P_0 \quad (0 < \kappa < \mu_0) \quad (11)$$

следуя А.А. Ильюшину [5], процесс нагружения будем называть простым.

Для простого нагружения по мере возрастания зоны контакта в эту зону будут входить элементы ободов дисков с предварительной окружной деформацией ϵ_y . Для верхнего диска (фиг. 1) элементы, входящие в зону контакта справа от точки $y = a$, будут находиться в условиях сжатия, а слева от точки $y = -a$ – в условиях растяжения. Закон изменения "защемленной" деформации ϵ_y в зоне контакта устанавливается, исходя из условия неизменности этой части окружной деформации на последующих этапах нагружения. Это условие реализуется лишь для линейного закона изменения "защемленной" деформации

$$\epsilon_y^- = (\partial u_y / \partial y)^- = -C_0 y \quad (12)$$

Зависимость (12) можно трактовать как условие подобия контактных напряжений на всех стадиях нагружения. С таких позиций имеется полная аналогия рассматриваемой задачи с автомодельным решением Спенса [12, 13] задачи о вдавливании с трением жесткого кругового диска в упругую полуплоскость.

Распределение контактных напряжений $\sigma_+(y)$ и $\tau_+(y)$ (нечетные слагаемые $\sigma_-(y) = \tau_-(y) = 0$) находится из второго и четвертого уравнений системы (1) при значениях правых частей в этих уравнениях, представленных соответственно равенствами (2) и (12). Распределение нормальных напряжений снова представляется формулой Герца (4), а закон изменения касательных напряжений находится из решения уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau_+(t)}{2G} \frac{dt}{t-y} = -\frac{m}{2(m-1)} C_0 y \quad (13)$$

где C_0 – пока что произвольная постоянная. В отличие от уравнения (7), которое использовалось в работах Каттенео и Миндлина, неоднородное уравнение (13) допускает ограниченное в конечных точках зоны контакта $y = \pm a$ решение для касательных напряжений

$$\frac{\tau_+(y)}{2G} = \frac{m}{2(m-1)} C_0 \sqrt{a^2 - y^2} \quad (14)$$

Постоянная C_0 определяется из условий статического равновесия

$$\int_{-a}^a \tau(y) dy = Q_0 \quad (15)$$

Отсюда находим

$$C_0 = 4 \frac{m-1}{m} \frac{1}{\pi a^2} \frac{Q_0}{2G} = 4 \frac{m-1}{m} \frac{1}{\pi a^2} \frac{\kappa P_0}{2G} \quad (16)$$

Используя равенство (6), окончательно для C_0 получаем значение

$$C_0 = \kappa / R \quad (17)$$

а распределение касательных напряжений вычисляется по формуле

$$\frac{\tau_+(y)}{2G} = \frac{m}{2(m-1)} \frac{\kappa}{R} \sqrt{a^2 - y^2} \quad (18)$$

т.е. в точности следует закону распределения нормальных напряжений (4), отличаясь по величине от модуля последних множителем $\kappa < \mu_0$. Если $\kappa = Q_0 / P_0 = \mu_0$, то одновременно во всех точках области контакта будет наблюдаться скольжение на ободах сжатых дисков.

Обратившись к формуле (12), убеждаемся, что так называемая "защемленная" деформация $\varepsilon_y^- = -C_0 y = -\kappa y / R$ не зависит ни от размера области контакта, ни от значений порознь прижимающих P_0 и сдвигающих Q_0 сил. Она зависит от отношения $Q_0 / P_0 = \kappa$ и радиусов дисков R .

Для полного исследования задачи о контактном сжатии дисков в условиях простого нагружения необходимо рассмотреть не использованные выше первое и третье уравнения системы (1). Из первого уравнения ($\sigma_y = 0$) находится наклон площадки контакта к оси oy :

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^+ = -\frac{m-2}{m} \frac{\tau_+(y)}{2G} \quad (19)$$

а из третьего уравнения – четная по y составляющая окружной деформации

$$\varepsilon_y^+ = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^+ = \frac{m-2}{m} \frac{\sigma_+(y)}{2G} \quad (20)$$

Таким образом, для простого нагружения распределение нормальных и касательных напряжений в зоне контакта следует закону Герца. В отличие от решения Каттенео – Миндлина, случай простого нагружения является физически содержательным, поскольку такой процесс нагружения соответствует сжатию шероховатых дисков наклонными силами [8] и полученное решение может быть использовано в теории косо го удара упругих дисков.

Возвратимся к решению Каттенео – Миндлина, изложенному в п. 1. Формализм указанного решения усматривается в том, что использованный авторами процесс нагружения является практически нереальным (оба диска ведущие). Практически реализуемым будет процесс нагружения, когда монотонно возрастающий крутящий момент M прикладывается к оси только ведущего верхнего диска, а вал нижнего диска заторможен и не вращается до тех пор, пока крутящий момент не достигает некоторого критического значения M_0 (фиг. 2). Очевидно, что при передаче моментной нагрузки с вала верхнего ведущего диска к валу нижнего ведомого диска в предположении об отсутствии проскальзывания в зоне контакта оба диска будут поворачиваться на некоторый угол γ . Величина угла поворота γ зависит от значения момента M на рассматриваемом этапе нагружения, упругих свойств и радиусов валов дисков ε . Используя элементарное решение для плоскости с круговым отверстием при задании касательных напряжений на отверстии, находим [8]

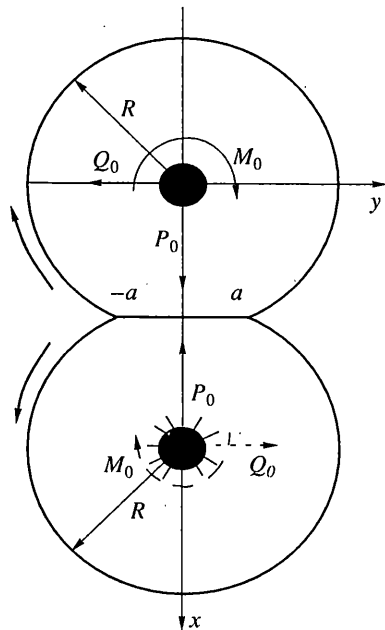
$$\gamma = \frac{1}{2G} \frac{M}{2\pi\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon}{R} \ll 1\right) \quad (21)$$

При этом в зону контакта ($-a \leq y \leq a$), образовавшуюся при сжатии дисков силами P_0 , будут входить предварительно напряженные элементы ободов дисков, расположенные на расстоянии

$$s = R\gamma = \frac{1}{2G} \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2 \quad (22)$$

справа от начала координат. Заметим, что для малых радиусов валов ($\varepsilon \leq 0,1R$) длина дуги s становится соизмеримой с длиной зоны контакта $2a$.

Для полной определенности в записи граничных условий задачи необходимо указать закон изменения "защемленной" деформации и расположение участков с "защемленной" окружной деформацией (сжатия для верхнего и растяжения для нижнего дисков) в зоне контакта. Поскольку в условиях упругой деформации напряженно-деформированное состояние прямо пропорционально неизменно приложенным к телу силам различной интенсивности и угол поворота дисков γ , согласно (21), также пропорциональный нагруженному крутящему моменту M , то для защемленной деформации, как в предыдущем разделе статьи, принимаем линейный закон изменения по координате y . Относительно расположения участка с "защемленной" деформацией сделаем предположение, что его длина меньше размера зоны контакта и для граничного значения крутящего момента $M = M_0$ занимает отрезок $y_1 \leq y < a$ ($y_1 > -a$) (см. фиг. 3: 1 – зона скольжения, 2 – зона растяжения).



Фиг. 2

В средней части зоны контакта окружная деформация, обусловленная сдвигающими силами Q_0 , равна нулю, а вблизи точки выхода материала ободов дисков из зоны контакта ($y = -a$) имеет место проскальзывание материальных частиц дисков. Следовательно, в зоне сцепления для окружной деформации ϵ_y получаем выражение (фиг. 3, верхний диск):

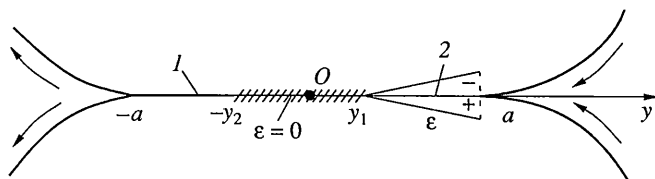
$$\epsilon_y = \left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_{x=0} = \begin{cases} -\epsilon_0 \frac{y - y_1}{a}, & y_1 \leq y \leq a \\ 0, & -y_2 \leq y \leq y_1 \end{cases} \quad (23)$$

где $\epsilon_0 > 0$ – неизвестная постоянная.

В зоне скольжения ($-a \leq y \leq -y_2$) искомые касательные напряжения вычисляются, используя закон сухого трения Амонтона – Кулона

$$\tau(y) = -\mu_0 \sigma(y) \quad (24)$$

Известно [13], что если тела, находящиеся в контакте, имеют одинаковые упругие свойства, то касательные напряжения, действующие в зоне контакта, не изменяют



Фиг. 3

размер зоны контакта и распределение нормальных сжимающих напряжений в этой зоне. Вследствие этого нормальные напряжения в (24) будут известны из решения Герца (4), а размер области контакта находится по формуле (6). Складывая третьи и

четвертое уравнения системы (1) и учитывая равенство (5) для $\sigma^+(y)$ и тождество $\sigma_-(y) \equiv 0$ приходим к интегральному уравнению для касательных напряжений

$$2 \frac{m-1}{m} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(t)}{2G} \frac{dt}{t-y} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \Big|_{x=0} \quad (25)$$

Правая часть этого уравнения задана, согласно (23), на промежутке $-y_2 < y < a$, а на промежутке $-a \leq y < -y_2$ касательные напряжения находятся по формуле (24). После подстановки в (24) значения $\sigma_y = \sigma_y^+$ из равенства (4) находим

$$\frac{\tau(y)}{2G} = \mu_0 \frac{m}{2(m-1)} \frac{1}{R} \sqrt{a^2 - y^2} \quad (-a \leq y < -y_2) \quad (26)$$

Распространяя формально равенство (26) на всю зону контакта, т.е. полагая

$$\frac{2}{m} \frac{m-1}{2G} \tau(y) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{R} \sqrt{a^2 - y^2} & (-a \leq y \leq -y_2) \\ \frac{\mu_0}{R} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{\tau^*(y)}{2G} & (-y_2 < y < a) \end{cases} \quad (27)$$

после подстановки этого представления в (25) для неизвестной функции $\tau^*(y)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-y_2}^a \frac{\tau^*(t)}{2G} \frac{dt}{t-y} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{R} y, & -y_2 < y \leq y_1 \\ \frac{\mu_0}{R} y - \varepsilon_0 \frac{y-y_1}{a}, & y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases} \quad (28)$$

Ограниченное в окрестности точки $y = a$ решение этого уравнения представляется формулой [8, 14]:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^*(y)}{2G} = & \sqrt{\frac{a-y}{y+y_2}} \left\{ -\frac{\mu_0}{R} \left(\frac{a+y_2}{2} + y \right) + \frac{\varepsilon_0}{\pi a} \left[\sqrt{(a-y_1)(y_1+y_2)} + \left(\frac{a+y_2}{2} + y - y_1 \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{a-2y_1-y_2}{a+y_2} \right) + (y-y_1) \sqrt{\frac{y+y_2}{a-y}} \ln \left(\frac{[\sqrt{(a-y_1)(y_2+y)} + \sqrt{(a-y)(y_2+y_1)}]^2}{|y_1-y|(a+y_2)} \right) \right] \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

В записанном решении содержатся две неизвестные величины, – координата $y = -y_2$, отделяющая область скольжения ($-a \leq y \leq -y_2$) от области сцепления ($-y_2 < y \leq a$) и константа в выражении для "защемленной" деформации ε_0 . Для их вычисления необходимо воспользоваться условием непрерывности касательных напряжений в точке $y = -y_2$ и интегральным условием равновесия

$$\int_{-a}^a \tau(y) dy = Q_0 \quad (30)$$

Из условия непрерывности напряжений при пресечении точки $y = -y_2$ находим

$$\frac{\varepsilon_0}{\pi a} \left[\sqrt{(a-y_1)(y_1+y_2)} + \left(\frac{a+y_2}{2} - y_1 - y_2 \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{a-2y_1-y_2}{a+y_2} \right) \right] = \frac{\mu_0}{R} \frac{a-y_2}{2} \quad (31)$$

а удовлетворяя интегральное условие (30) и учитывая предыдущее равенство, получаем

$$\frac{\varepsilon_0}{2a} \left\{ \left[a(a-y_1) - y_1 \frac{a+y_2}{2} \right] \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{a-2y_1-y_2}{a+y_2} \right) + (2a-y_1) \sqrt{(a-y_1)(y_1+y_2)} \right\} = Q_0 / (2G) \quad (32)$$

Вводя безразмерные величины $y_1/a = \xi$, $y/a = \eta$, $y_2/a = z$, $a/R = \alpha$ и полагая

$$\frac{Q_0}{2G} = \kappa \frac{P_0}{2G} = \kappa \frac{m}{2(m-1)} \frac{\pi a^2}{2R} \quad (\kappa < \mu_0) \quad (34)$$

после исключения ε_0 в системе уравнений (31)–(32) для определения неизвестной z будем иметь трансцендентное уравнение

$$\left[\frac{1-z}{2} \left(1-2\xi + \xi \frac{1-z}{2} \right) - \frac{\kappa}{\mu_0} \frac{m}{2(m-1)} \left(\frac{1-z}{2} - \xi \right) \right] \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1-2\xi-z}{1+z} \right) + \left[\frac{1-z}{2} (2-\xi) - \frac{\kappa}{\mu_0} \frac{m}{2(m-1)} \right] \sqrt{(1-\xi)(\xi+z)} = 0 \quad (35)$$

Объединяя равенства (27) и (29) и учитывая введенные выше замены, для вычисления касательных напряжений в зоне контакта получаем выражение

$$\bar{\tau} = 2 \frac{m-1}{m} \frac{\tau(\eta)}{2G\mu_0\alpha} = \begin{cases} \sqrt{1-\eta^2}, & (-1 \leq \eta \leq -z) \\ \sqrt{1-\eta^2} - \sqrt{(1-\eta)(\eta+z)} + \frac{1+z}{2} \frac{1}{\Delta(\xi, z)} \left[\sqrt{(1-\eta)(\eta+z)} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1-2\xi-z}{1+z} \right) + (\eta-\xi) \ln \left(\frac{[\sqrt{(1-\xi)(\eta+z)} + \sqrt{(1-z)(\xi+z)}]^2}{|\eta-\xi|(1+z)} \right) \right] & (-z \leq \eta \leq 1) \end{cases} \quad (36)$$

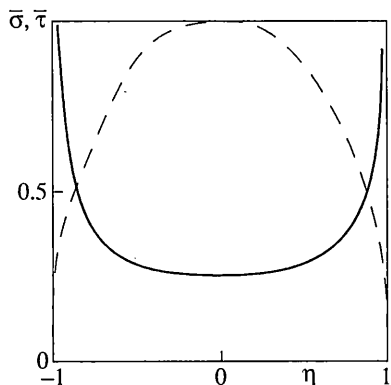
$$\Delta(\xi, z) = \left(\frac{1-z}{2} - \xi \right) \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1-2\xi-z}{1+z} \right) + \sqrt{(1-\xi)(\xi+z)} \quad (37)$$

На приведенных фигурах сплошными линиями дано графическое представление распределения касательных напряжений $\bar{\tau}$ в зоне контакта для трех рассмотренных выше историй нагружения дисков. Штриховыми линиями изображено распределение нормальных напряжений, взятых с противоположным знаком

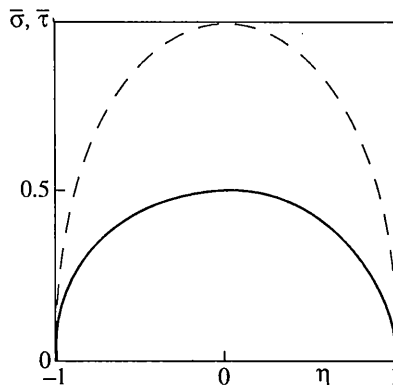
$$\bar{\sigma} = -2 \frac{m-1}{m} \frac{\sigma(\eta)}{2G\alpha} = \sqrt{1-\eta^2} \quad (38)$$

Конечное равновесное состояние дисков для всех трех условий нагружения характеризуется значениями прижимающих сил P_0 и сдвигающих сил $Q_0 = \kappa P_0 = \frac{1}{2} \mu_0 P_0 (M_0 = Q_0 R)$. Расчеты выполнены для числа Пуассона $m = 3$ (результаты, представленные на фиг. 4, соответствуют решению Каттенео – Миндлина, а на фиг. 5 – простому нагружению).

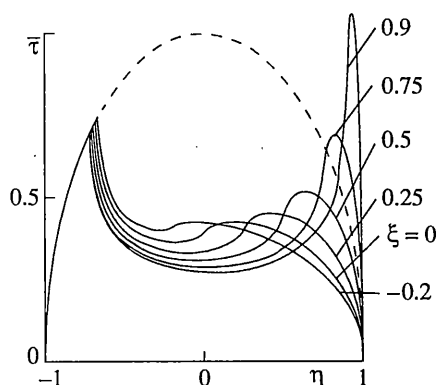
Графики на фиг. 6 характеризуют передачу нагрузки от ведущего к ведомому диску $\left(\kappa / \mu_0 = 0.5, \bar{\tau} = 2 \frac{m-1}{m} \frac{\tau^*(\eta)}{2G\mu_0\alpha} \right)$.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Параметр $\xi = y_1/a$ характеризует относительный размер предварительно нагруженного участка в зоне контакта. Видно, что если этот участок занимает значительную часть зоны контакта ($\xi \leq 0.5$), то для предельного значения крутящего момента M_0 , по достижению которого диски приходят во вращательное движение, касательные напряжения $\tau < \mu_0|\sigma|$ и скольжение у точки входа материалов дисков в зону контакта ($y = a$) отсутствуют. Такие системы в контактной механике называют мягкими. В жестких системах относительный размер "защемленной" деформации является малым ($\xi > 0.6$), и прежде чем будет достигнуто предельное значение крутящего момента M_0 , в этой части зоны контакта наступит упругое скольжение. Представленные графики наглядно иллюстрируют принципиально различный характер в распределении касательных контактных напряжений в зависимости от истории нагружения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
2. Штаерман И.Я. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат. 1949.
3. Ишлинский А.Ю. О трении качения // ПММ. 1939. Т. 2. С. 245–260.
4. Förrpl L. Die strenge Lösung für die rollende Reibung. München: Leibniz Verlag, 1947.
5. Ильюшин А.А. Пластичность. Упругопластические деформации. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
6. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.

7. *Fromm H.* Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben // *Z. Angew. Math. Mech.* 1927. B. 7. № 1. S. 27–58.
8. *Ulitko A.F.* Exakte Lösung des Kontaktproblems für zwei Zylinder unter Berücksichtigung der Reibung // *Z. Angew. Math. Mech.* 2000. B. 80. № 7. S. 435–455.
9. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // *J. Reine Angew. Math.* 1881. B. 92. S. 156–171.
10. *Cattaneo C.* Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rend. Acad. Nar. Lincei. Ser. 6.* 1938. S. 27, 342–348, 434–436, 474–478.
11. *Mindlin R.D.* Compliance of elastic bodies in contact // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1949. V. 16. P. 259–268.
12. *Spence D.A.* Self-similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading // *Proc. Roy. Soc.* 1968. V. A305. P. 55–80.
13. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
14. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

Киев

Поступила в редакцию
20.12.2000