

УДК 539.3

© 2002 г. В.Г. БАЖЕНОВ, А.И. КИБЕЦ, Ю.И. КИБЕЦ,
А.Н. САМЫГИН

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИХ СТЕРЖНЕВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Методы решения задач нелинейного деформирования стержней в статической и динамической постановках изложены в [1–6]. Поскольку стержни могут использоваться как составная часть более сложных объектов, представляется актуальной разработка численных моделей и алгоритмов, позволяющих эффективно решать трехмерные нестационарные задачи динамики составных конструкций в геометрически и физически нелинейной постановке. В качестве уравнений состояния используются соотношения теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением. Уравнение движения конструкции выводится из вариационного принципа Журдена. Гипотезы, принятые в теории тонкостенных элементов конструкций (стержней, пластин и оболочек), вводятся на этапе дискретизации определяющей системы уравнений. Это позволяет учесть особенности напряженно-деформированного состояния элементов конструкции, упростить стыковку разнородных конструктивных элементов и повысить тем самым эффективность методики. Решение задачи основано на методе конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа "крест". Для расчета напряженно-деформированного состояния массивных тел и оболочек реализован 8-узловой изопараметрический элемент с полилинейными функциями формы [7, 8]. Для дискретизации криволинейных стержней применяются 2-узловые конечные элементы с линейными функциями формы [5]. В каждом из них вводится локальный базис, текущее положение в пространстве которого определяется осью стержня и главными осями инерции поперечного сечения. Принимая гипотезу плоских сечений, компоненты скорости перемещений стержня аппроксимируются линейными функциями, определяемыми скоростью перемещения оси стержня и углами поворота его поперечного сечения. Стыковка стержневых конечных элементов осуществляется в общем базисе. Для соединения стержня с массивным телом или оболочкой компоненты скорости перемещений последних в области контакта преобразуются к обобщенным переменным, характеризующим движение поперечного сечения стержня. Эффективность предлагаемой методики иллюстрируется результатами решения нелинейной задачи соударения двух трубопроводов по оболочечной и оболочечно-стержневой моделям.

1. Динамика конструкции описывается в переменных Лагранжа с позиций механики сплошных сред. Уравнение движения выводится из вариационного принципа Журдена:

$$\int_{\Omega} \delta\{\dot{\epsilon}\}^T [C] \{\sigma\} dV + \int_{\Omega} \delta\{\dot{U}\}^T \rho \{\ddot{U}\} dV = \int_{\Gamma_q} \delta\{\dot{U}\}^T \{q\} d\gamma + \int_{\Gamma_p} \delta\{\dot{U}\}^T \{p\} d\gamma$$

$$[C] = \text{diag} \| 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \| \quad (1.1)$$

где $\{\epsilon\} = [\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} \epsilon_{12} \epsilon_{23} \epsilon_{31}]^T$, $\{\sigma\} = [\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{31}]^T$ – векторы, составленные из компонент тензоров деформаций и напряжений, $\{U\} = [U_1 U_2 U_3]^T$ – перемещения в об-

щей системе координат, ρ – плотность, $\{q\}$ – контактное давление, $\{p\}$ – распределенная нагрузка, Ω – область, занимаемая конструкцией, Γ_q – поверхность контакта, Γ_p – область действия внешнего давления, точка над символом означает частную производную по времени t . Скорости деформаций определяются в метрике текущего состояния:

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D_r] \{\dot{U}\}, \quad [D_r] = \begin{Bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2/2 & 0 & \partial_3/2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1/2 & \partial_3/2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_2/2 & \partial_1/2 \end{Bmatrix}^T \quad (1.2)$$

$$\partial_i = \partial / \partial X_i, \quad X_i = \int_0^t \dot{U}_i dt + X_i|_{t=0} \quad (i = \overline{1,3})$$

При упругопластическом деформировании полные деформации раскладываются на пластические и упругие компоненты. Пластические деформации вычисляются с помощью соотношений теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением [7]. Тензор напряжений определяется тензором упругих деформаций с помощью обобщенного закона Гука. На контактной поверхности формулируются условия непроникания или жесткой склейки [8].

2. Для дискретизации определяющей системы уравнений по пространственным переменным используется метод конечных элементов, а по времени – явная конечно-разностная схема типа "крест". Оси криволинейных стержней разбиваются на ряд 2-узловых конечных элементов с линейными функциями формы [5]. В каждом из них вводится локальный базис $\{x\} = [x_1 x_2 x_3]^T$, текущее положение в пространстве которого определяется осью стержня и главными осями инерции его поперечного сечения (фиг. 1, а). Принимая гипотезу плоских сечений, предполагаем, что деформации малы, а смещения и углы поворота поперечного сечения стержня произвольны. В пределах конечного элемента распределение скорости перемещений в поперечном сечении определяется формулами

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_1^0 - x_2 \dot{\phi}_3 + x_3 \dot{\phi}_2, \quad \dot{u}_2 = \dot{u}_2^0 - x_3 \dot{\phi}_1, \quad \dot{u}_3 = \dot{u}_3^0 + x_2 \dot{\phi}_1 \quad (2.1)$$

где $\{u^0\} = [u_1^0 u_2^0 u_3^0]^T$ – перемещение центра КЭ, $\{\varphi\} = [\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3]^T$ – углы поворота поперечного сечения относительно осей местного базиса $\{x\}$. Текущие значения скорости перемещений оси стержня $\{\dot{u}^0\}$ и угловые скорости $\{\dot{\varphi}\}$ поворота поперечного сечения определяются в узлах конечных элементов в общей системе координат $\{X\}$. При вычислении деформаций и напряжений они проецируются в местный базис. Скорости деформаций аппроксимируются в стержневом КЭ линейными функциями в виде суммы безмоментных и моментных составляющих

$$\begin{aligned} \{\dot{\epsilon}\} &= \{\dot{\epsilon}_0\} + \{\dot{\chi}_2\} x_2 + \{\dot{\chi}_3\} x_3, & \{\dot{\epsilon}_0\} &= [\dot{\epsilon}_{11}^0 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{\epsilon}_{12}^0 \quad 0 \quad \dot{\epsilon}_{31}^0] \\ \{\dot{\chi}_2\} &= [\dot{\epsilon}_{11,2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{\epsilon}_{31,2}], & \{\dot{\chi}_3\} &= [\dot{\epsilon}_{11,3} \quad 0 \quad 0 \quad \dot{\epsilon}_{12,3} \quad 0 \quad 0] \\ \dot{\epsilon}_{11}^0 &= \dot{u}_{1,1}^0, & \dot{\epsilon}_{12}^0 &= -\dot{\phi}_3 + \dot{u}_{2,1}^0, & \dot{\epsilon}_{31}^0 &= \dot{\phi}_2 + \dot{u}_{3,1}^0 \\ \dot{\epsilon}_{11,2} &= -\dot{\phi}_{3,1}, & \dot{\epsilon}_{11,3} &= \dot{\phi}_{2,1}, & \dot{\epsilon}_{31,2} &= -\dot{\epsilon}_{12,3} = \dot{\phi}_{1,1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.2) и далее индекс i после запятой означает частную производную $\partial/\partial x_i$. С учетом принятых гипотез уравнение (1.1) для стержневого конечного элемента длиной Δ запишется в виде

$$\int_0^\Delta \delta\{\dot{\epsilon}\}^T \{T\} dx_1 + \int_0^\Delta \rho \delta\{\dot{w}\}^T \{F\} \{\ddot{w}\} dx_1 - \int_0^\Delta \delta\{\dot{w}\}^T \{T^1\} dx_1 - (\delta\{\dot{w}\}^T \{T^2\})|_{x_1=0,L} = 0 \quad (2.3)$$

$$\{\mathbf{T}\} = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ I_1 \ I_2 \ I_3]^T, \quad T_1 = \int_S \sigma_{11} ds, \quad T_2 = \int_S \sigma_{12} ds, \quad T_3 = \int_S \sigma_{31} ds$$

$$I_1 = \int_S (\sigma_{31} x_2 - \sigma_{12} x_3) ds, \quad I_2 = \int_S \sigma_{11} x_3 ds, \quad I_3 = \int_S \sigma_{11} x_2 ds \quad (2.4)$$

$$\{\mathbf{T}^1\} = [T_1^1 T_2^1 T_3^1 I_1^1 I_2^1 I_3^1]^T, \quad T_i^1 = \int_S p_i ds \quad (i = \overline{1,3})$$

$$I_1^1 = \int_S (p_3 x_2 - p_2 x_3) ds, \quad I_2^1 = \int_S p_1 x_3 ds, \quad I_3^1 = \int_S p_1 x_2 ds \quad (2.5)$$

Здесь $\{\mathbf{T}\}$ – вектор обобщенных внутренних сил балочной модели; $\{\mathbf{T}^1\}$ – вектор сил и моментов от распределенной на боковой поверхности стержня нагрузки $\{\mathbf{p}\} = [p_1 p_2 p_3]^T$; $\{\mathbf{T}^2\} = [T_1^2 T_2^2 T_3^2 I_1^2 I_2^2 I_3^2]^T$ – вектор сил и моментов от распределенной нагрузки, приложенной на торцах стержня. Компоненты вектора $\{\mathbf{T}^2\}$ вычисляются по формулам (2.5); $\{\dot{\epsilon}\} = [\dot{\epsilon}_{11}^0 \dot{\epsilon}_{12}^0 \dot{\epsilon}_{31}^0 \dot{\epsilon}_{11,2}^0 \dot{\epsilon}_{11,3}^0 \dot{\epsilon}_{31,2}^0]^T$ – обобщенные скорости деформаций; ρ – плотность материала; $\{\dot{\mathbf{w}}\} = [\dot{u}_1^0 \dot{u}_2^0 \dot{u}_3^0 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_3]^T$ – вектор скорости обобщенных перемещений; $[\mathbf{F}] = \text{diag} \|S \ S \ S \ J_1 J_2 J_3\|$ – диагональная матрица, характеризующая геометрию поперечного сечения стержня; S – площадь поперечного сечения; J_2, J_3 – осевые моменты инерции; J_1 – полярный момент инерции. Обозначим через $\{\bar{\mathbf{w}}\}$ вектор скорости перемещений в вершинах конечного элемента

$$\{\bar{\mathbf{w}}\} = [\{\dot{\mathbf{w}}\}^1 \{\dot{\mathbf{w}}\}^2]^T = [\dot{u}_1^1 \dot{u}_2^1 \dot{u}_3^1 \dot{\phi}_1^1 \dot{\phi}_2^1 \dot{\phi}_3^1 \dot{u}_1^2 \dot{u}_2^2 \dot{u}_3^2 \dot{\phi}_1^2 \dot{\phi}_2^2 \dot{\phi}_3^2]^T \quad (2.6)$$

где $\dot{u}_k^i, \dot{\phi}_k^i$ – значение $\dot{u}_k^0, \dot{\phi}_k^0$ в узле i , спроецированные в местный базис $\{\mathbf{x}\}$. Дискретный анализ соотношений (1.2) можно записать в виде

$$\{\dot{\epsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\bar{\mathbf{w}}\}, \quad [\mathbf{B}] = [\mathbf{B}^1 \mathbf{B}^2]$$

$$[\mathbf{B}^i] = \begin{Bmatrix} A_1^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^i & 0 & 0 & 0 & -A_0^i \\ 0 & 0 & A_1^i & 0 & A_0^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_1^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1^i & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

$$A_0^i = 1/2, \quad A_1^2 = -A_1^1 = 1/\Delta \quad (i = \overline{1,2})$$

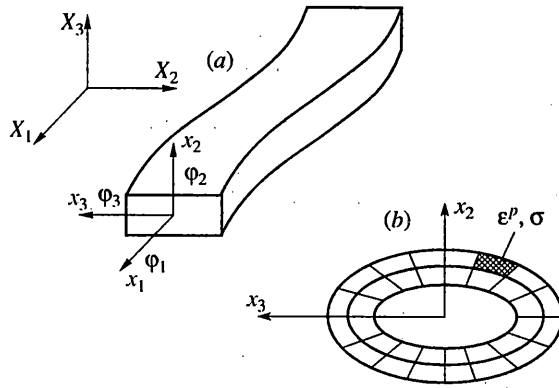
Для вычисления геометрических характеристик и компонент обобщенных внутренних сил поперечное сечение стержня покрывается четырехугольными ячейками (фиг. 1, б), внутри которых напряжения и пластические деформации предполагаются постоянными и равными их значениям в центрах ячеек.

Выражая вариации скорости деформаций $\delta\{\dot{\epsilon}\}$ через вариации скорости перемещений $\delta\{\bar{\mathbf{w}}\}$ и подставляя их в (2.3), получим:

$$(\delta\{\bar{\mathbf{w}}\}^T [\mathbf{B}]^T \{\mathbf{T}\} + \delta\{\bar{\mathbf{w}}\}^T \rho [\bar{\mathbf{F}}] \{\bar{\mathbf{w}}\} - \delta\{\bar{\mathbf{w}}\}^T \{\mathbf{T}^1\}) \Delta - (\delta\{\bar{\mathbf{w}}\}^T \{\bar{\mathbf{T}}^2\})|_{x_1=0, L} = 0$$

$$[\bar{\mathbf{F}}] = \text{diag}([\mathbf{F}][\mathbf{F}]), \quad \{\bar{\mathbf{T}}^1\} = [\{\mathbf{T}^1\}\{\mathbf{T}^1\}]^T \quad (2.8)$$

$$\{\bar{\mathbf{T}}^2\} = \begin{cases} [\{\mathbf{T}^2\}\{\emptyset\}]^T, & x_1 = 0, \\ [\{\emptyset\}\{\mathbf{T}^2\}]^T, & x_1 = L, \end{cases} \quad \{\emptyset\} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$



Фиг. 1

Стыковка стержневых конечных элементов осуществляется в общем базисе. Для этого ускорение $\{\ddot{\mathbf{w}}\}$ и вариации скорости $\delta\{\dot{\mathbf{w}}\}$ обобщенных перемещений проецируются [5] из сопутствующего базиса $\{\mathbf{x}\}$ в общую систему координат $\{\mathbf{X}\}$.

Для анализа нестационарного деформирования массивных тел и оболочек применяется 8-узловой изопараметрический элемент с полилинейными функциями формы [7]:

$$N_k = \frac{1}{8}(1 + \xi_1/\xi_1^k)(1 + \xi_2/\xi_2^k)(1 + \xi_3/\xi_3^k) \quad (k = \overline{1,8}) \quad (2.9)$$

Скорости деформаций аппроксимируются линейными функциями. Вклад в энергию моментных составляющих, характеризующих градиент скорости деформаций в элементе, регулируется весовыми коэффициентами, что позволяет в рамках единой схемы исследовать динамику массивных тел и оболочек. В пластинах и оболочках дискретные соотношения при таком подходе получаются аналогичными принятым в 6-модальном варианте теории оболочек типа Тимошенко [9]. Это позволяет решать задачу нестационарного деформирования тонкостенной конструкции на сетке с одним слоем конечных элементов по толщине. Численная схема для определения контактного давления и статически эквивалентных ему узловых сил приведена в [8].

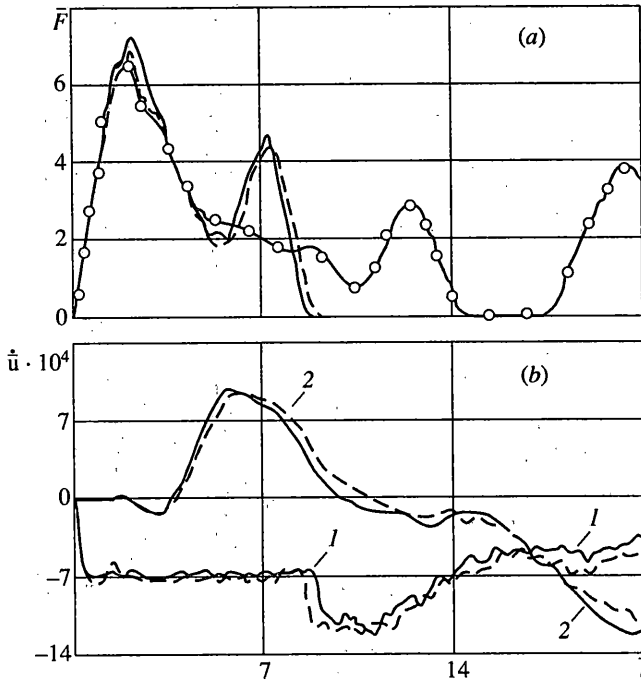
Для соединения стержня с массивным телом или оболочкой компоненты узловых скоростей перемещений последних в области контакта преобразуются к обобщенным переменным $\dot{u}_k^i, \dot{\phi}_k^i$, характеризующим движение поперечного сечения стержня. Интегрирование по области Ω в (1.1) заменяется суммированием по конечным элементам. Дискретный аналог уравнения движения конструкции запишется в виде

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{W}}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (2.10)$$

где $[\mathbf{M}]$ – матрица масс, $\{\mathbf{W}\}$, $\{\mathbf{R}\}$ – векторы обобщенных узловых перемещений и обобщенных узловых сил в системе координат $\{\mathbf{X}\}$ [5, 7]. Домножая обе части уравнения (2.10) на обратную матрицу $([\mathbf{M}])^{-1}$ слева, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$[\ddot{\mathbf{W}}] = ([\mathbf{M}])^{-1}\{\mathbf{R}\} \quad (2.11)$$

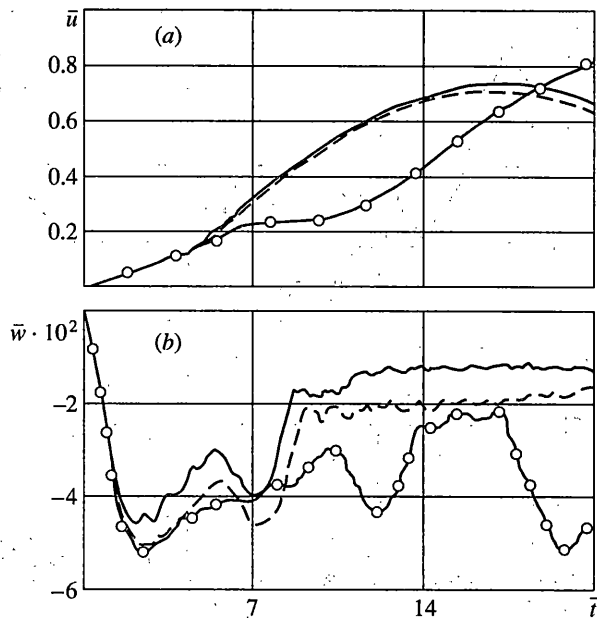
которая интегрируется по явной конечно-разностной схеме. Шаг по времени Δt определяется из условия устойчивости. Как показали исследования [5, 7] матрица масс $[\mathbf{M}]$ в (2.10), (2.11) может быть преобразована путем искусственного завышения моментов инерции вращения. Затрагивая лишь высокочастотные осцилляции численного реше-



Фиг. 2

ния, такой способ регуляризации позволяет существенно увеличить шаг интегрирования по времени Δt . Интегрированием (2.11) вычисляются скорости перемещений и перемещения узлов КЭ-сетки конструкции на следующем временном слое. После этого определяются базовые координаты $\{X\}$ ее геометрии и в каждом конечном элементе находится новое положение сопутствующего базиса $\{x\}$, что позволяет учесть геометрическую нелинейность. Изложенная выше схема решения трехмерных задач нестационарного деформирования составных конструкций реализована в пакете прикладных программ "Динамика-3". Работоспособность методики подтверждена результатами решения тестовых задач [5, 7, 8].

3. Рассмотрим задачу динамического деформирования двух свободных трубопроводов при их перекрестном соударении. Размеры трубопроводов: диаметр $D = 142.2$ см, длина $L = 44D$, толщина стенки $h = 1.8$ см. В исходном положении оси трубопроводов находятся в горизонтальной плоскости и перпендикулярны друг другу. Ориентация осей локальной системы координат $\{x\}$ задается следующим образом: x_1 направлена вдоль оси трубопровода, x_2 – вертикально вверх, x_3 – перпендикулярно x_1 и x_2 . Область возможного контакта покрывалась более мелкой сеткой. Нижний трубопровод в начальный момент времени неподвижен, а верхний падает со скоростью 10 м/с. Трубы изготовлены из стали X70, имеющей следующие механические характеристики: плотность $\rho = 7.8$ г/см³, модуль сдвига $G = 0.807 \cdot 10^5$ МПа, модуль объемного сжатия $K = 1.75 \cdot 10^6$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 500$ МПа, модуль упрочнения $g = 50$ МПа. В соответствии с условиями эксплуатации трубы предварительно нагружаются внутренним статическим давлением $P = 7.5$ МПа. Рассматривались два варианта расчетной схемы. В первом – трубопроводы моделировались оболочечными конечными элементами. Во втором варианте центральные части трубопроводов $|x_1| \leq 2D$, примыкающие к зоне контакта, моделировались как оболочки, а концевые части длиной $20D$ – как стержни.



Фиг. 3

Результаты решения приведены на фиг. 2, 3, где сплошными и штриховыми линиями отмечены результаты, полученные с использованием оболочечного и стержневого КЭ. На фиг. 2, 3 представлены графики временных зависимостей: контактных сил $\bar{F} = F/(\sigma_T S)$; вертикальных компонент скорости перемещений $\bar{u} = \dot{u}/c$ (c – скорость распространения поперечных волн в материале) в центре контактной зоны нижней трубы и на торце, помеченных индексами 1, 2; разности вертикальных перемещений вдоль оси трубопровода $\bar{u} = (u_0 - u_L)/D$, где $u_0 = u(x_1 = 0)$, $u_L = u(x_1 = L)$ – значения перемещений в центре и на торце трубопровода; разности вертикальных перемещений в центральном поперечном сечении трубопровода $\bar{w} = (u_+ - u_-)/D$, где $u_+ = u(x_2 = D/2)$, $u_- = u(x_2 = -D/2)$.

В результате процесса соударения на этапе $\bar{t} < 2$ происходит смятие центральной части трубопроводов и образование волны сдвига и изгиба, которые распространяются к торцам (фиг. 2, 3). В зоне контакта возникают пластические деформации, величина которых не превышает 2%. Максимальный прогиб поперечного сечения трубопровода в зоне соударения составляет $\bar{w} = w/D \approx 0.05$ при $\bar{t} \approx 2$ ($\bar{t} = tc/22D$). При $\bar{t} > 2$ происходит уменьшение контактной силы. В последующем вертикальные скорости трубопроводов колеблются около значения, равного половине начальной скорости удара. Сопоставление результатов расчетов показало, что применение стержневых конечных элементов в данном случае сокращает время решения задачи примерно в три раза, не внося существенных погрешностей в численное решение.

Для анализа влияния длины трубопровода на процесс его деформирования проводились также расчеты соударения трубопроводов, длина которых задавалась в интервале от $4D$ до $88D$. На фиг. 2, 3 результаты расчета при $L = 88D$ отмечены светлыми точками. Как показал анализ при $L > 8D$ на начальном этапе соударения ($\bar{t} < 2$) деформирование центральной части трубопровода не зависит от его длины.

Статическое внутреннее давление $P = 7.5$ МПа оказывает существенное влияние на процесс соударения трубопроводов. В рассмотренных задачах учет внутреннего давления приводит к увеличению времени соударения и значений деформаций в 3–4 раза.

Работа выполнена при частичном финансировании Программы поддержки ведущих научных школ России (грант 00-15-99029), гранта РФФИ № 99-01-00132, а также грантов Минобразования РФ по фундаментальным исследованиям в области естествознания, авиационной и ракетно-космической техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Светлицкий В.А., Нарайкин О.С.* Упругие элементы машин. М: Машиностроение, 1989. 261 с.
2. *Илюхин А.А.* О построении соотношений теории упругих стержней // *Механика твердого тела*. Киев: Наук. думка, 1990. Вып. 22. С. 81–92.
3. *Полищук В.А., Чубань В.Д.* Уравнения упругой деформации балки с учетом нестесненной депланации в форме метода конечных элементов // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1984. Т. 15. № 1. С. 82–94.
4. *Зайцев С.Н.* Криволинейный балочный конечный элемент, учитывающий геометрически нелинейные деформации // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1991. Т. 22. № 5. С. 102–117.
5. *Баженов В.Г., Кибец А.И., Кибец Ю.И.* Расчет нестационарного упругопластического деформирования пространственных стержней // *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. М.: Тов. науч. изд. КМК, 1998. Вып. 58. С. 122–128.
6. *Шкутин Л.И.* Инкрементальная модель деформации стержня // *ПМТФ*. 1999. Т. 40. № 4. С. 229–235.
7. *Баженов В.Г., Кибец А.И.* Численное моделирование трехмерных задач нестационарного деформирования упругопластических конструкций методом конечных элементов // *Изв. РАН. МТТ*. 1994. № 1. С. 52–59.
8. *Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н.* Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 1995. № 2. С. 20–26.
9. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

Н.-Новгород

Поступила в редакцию
31.03.2000