

УДК 539.3

Т.А. БЕЛЯКОВА, С.А. ШЕСТЕРИКОВ

**ИЗГИБ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ
ПРИ СЖИМАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЯХ,
ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЕЕ ПЛОСКОСТИ**

Рассматриваются некоторые проблемы определения напряженно-деформируемого состояния изгиба упругих неоднородных круглых пластин при сжимающих нагрузках, действующих в их плоскости. Учитывается неоднородность механических свойств по толщине пластины. Задача рассматривается для осесимметричного случая. Определен характер выпучивания в геометрически линейной и нелинейной постановке. Приведен пример расчета конкретной конструктивной системы, когда определяющими характерными параметрами являются технологические условия возникновения системы собственных напряжений в конструкции.

1. В ряде физических приборов используется деталь в виде окна для прохождения излучения. Окно представляет собой прозрачную для излучения круглую пластину, заключенную в металлическую обойму. Пластина с обоймой соединяется путем пайки. При выполнении технологических операций, проводимых при повышенных температурах, в конечном счете в детали возникает система остаточных напряжений. Эти напряжения, суммирующиеся с напряжениями, возникающими в процессе эксплуатации, могут приводить к изгибу и разрушению пластинки-окна.

Рассмотрим некоторые особенности свойств используемых материалов и деталей технологических процессов. В качестве материала окна используется искусственный алмаз. Для алмазных пластин характерно [1] существенное различие в пределе прочности для подложечной и ростовой сторон диска. Вне зависимости от содержания углеродных примесей, значения предела прочности материала на подложечной стороне оказывались существенно выше соответствующих значений для ростовой стороны (для алмаза с большим количеством примесей может наблюдаться различие в 2.5 раза). Изменение механических свойств по толщине диска закладывается в самом процессе роста кристаллов алмаза. На ростовой стороне средний размер зерна больше, и кристаллическая структура более разупорядочена. Отмеченные особенности позволяют предположить существование изменений по толщине алмазной пластины и других механических характеристик материала, в частности, модуля упругости. С увеличением толщины образца увеличивается и диапазон изменения значений упругих модулей.

Наличие неоднородности упругих свойств по толщине пластины приводит к тому, что усилия в плоскости пластины могут вызвать появление изгиба из ее плоскости.

Отмеченный эффект наиболее ярко выражается при анализе деталей технологии изготовления окна. В процессе пайки окна его детали разогреваются до 650°C. При остывании молибденовых колец после пайки алмазная пластина оказывается под действием радиальных сжимающих напряжений, вызванных различием коэффициентов температурного расширения молибдена и алмаза.

Напряженно-деформированное состояние в пластине можно оценить на основе решения следующей модельной задачи. Рассмотрим линейно-упругую круглую пластину радиуса R . Силы, действующие на пластину со стороны молибденовых колец, представим как приложенную при $r = \rho \leq R$ симметричную радиальную нагрузку постоянной интенсивности q .

Считаем, что в пластине реализуется плоское напряженное состояние. С учетом осевой симметрии, для ненулевых компонентов тензора деформаций получим $\epsilon_{rr} = du/dr$, $\epsilon_{\varphi\varphi} = u/r$, где $u = u(r)$ – радиальное перемещение.

Уравнения равновесия и совместности деформаций имеют вид

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{d\epsilon_{rr}}{dr} + \frac{\epsilon_{\varphi\varphi} - \epsilon_{rr}}{r} = 0$$

Компоненты тензоров напряжений и деформаций связаны законом Гука $\epsilon_{rr} = (\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\varphi\varphi})/E$, $\epsilon_{\varphi\varphi} = (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{rr})/E$.

Общее решение полученной системы уравнений может быть записано в виде

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} B_1 + A_1/r^2, & 0 \leq r \leq \rho \\ B_2 + A_2/r^2, & \rho < r \leq R \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \begin{cases} B_1 - A_1/r^2, & 0 \leq r \leq \rho \\ B_2 - A_2/r^2, & \rho < r \leq R \end{cases}$$

где A_i, B_i ($i = 1, 2$) – постоянные интегрирования.

Из ограниченности напряжений в области $0 \leq r \leq \rho$ следует $A_1 = 0$. Внешняя поверхность пластины $r = R$ свободна от нагрузок, что соответствует условию $\sigma_{rr}|_{r=R} = 0$. Два недостающие соотношения, необходимые для определения неизвестных постоянных, получаем из условия непрерывности перемещений $u_r|_{r=\rho^-} = u_r|_{r=\rho^+}$ и условия приложения нагрузки при $r = \rho$ $\sigma_{rr}|_{r=\rho^+} - \sigma_{rr}|_{r=\rho^-} = q$.

Полученное распределение напряжений и перемещений имеет вид

$$u = \begin{cases} \frac{1-\nu}{E} r q \left[\frac{1}{2} (1-\nu) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2} - 1 \right], & 0 \leq r \leq \rho \\ -\frac{q}{2E} \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 (1-\nu)^2 r \left[1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], & \rho < r \leq R \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} q \left[\frac{1}{2} (1-\nu) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2} - 1 \right], & 0 \leq r \leq \rho \\ -\frac{q}{2} \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 (1-\nu) \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], & \rho < r \leq R \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \begin{cases} q \left[\frac{1}{2} (1-\nu) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2} - 1 \right], & 0 \leq r \leq \rho \\ -\frac{q}{2} \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 (1-\nu) \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], & \rho < r \leq R \end{cases}$$

Неизвестное значение нагрузки q можно приближенно оценить, рассмотрев процесс охлаждения алмазного диска и металлической обоймы после пайки. При охлаждении свободного молибденового кольца, не связанного с диском, срединный

радиус кольца уменьшается с некоторого значения ρ_T , равного радиусу нагретого кольца, до значения $\rho_m = \rho_T(1 - \alpha_m T)$, где α_m – коэффициент температурного расширения молибдена, T – изменение температуры. При свободном охлаждении алмазного диска в отсутствие металлических креплений частицы материала, расположенные на расстоянии ρ_T от центра диска, оказались бы на расстоянии $\rho_d = \rho_T(1 - \alpha_d T)$ от центра, где α_d – коэффициент температурного расширения алмаза. В действительности, при жесткой связи металлической обоймы и алмазной пластины из-за различия в коэффициентах температурного расширения будет наблюдаться изменение радиуса от ρ_T до некоторого значения ρ_1 , $\rho_m \leq \rho_1 \leq \rho_d$. В результате в молибденовом кольце возникнут растягивающие напряжения

$$\sigma_m = E_m(\rho_1 - \rho_m) / \rho_m \quad (1.4)$$

где E_m – модуль Юнга для молибдена.

Алмазная пластина находится под действием сжимающих напряжений q , приложенных в местах соединения пластины с молибденовым кольцом. Распределение перемещений, вызванных действием данной нагрузки, было получено выше и задается выражениями (1.2). Таким образом, значение радиуса ρ_1 представляется выражением

$$\rho_1 = \rho_d + u(\rho_1) \quad (1.5)$$

где на основании (1.2), приближенно полагая $\rho_1/R \approx 1$, значение перемещения $u(\rho_1)$ можно представить в виде

$$u(\rho_1) = -(1 - \nu)\rho_1 q / E_d \quad (1.6)$$

где E_d – модуль Юнга для алмаза.

Подставляя выражение (1.6) в (1.5) и исключая ρ_1 из соотношений (1.5) и (1.4), получаем выражение, связывающее неизвестные значения напряжений q и σ_m :

$$1 - \alpha_d T = (1 - \alpha_m T) \left(1 + \frac{\sigma_m}{E_m} \right) \left(1 + \frac{1 - \nu}{E_d} q \right) \quad (1.7)$$

Поскольку $\alpha_m \ll 1$, $E_m \gg 1$, $E_d \gg 1$, некоторыми слагаемыми в выражении (1.7) можно пренебречь как имеющими более высокий порядок малости по сравнению с остальными слагаемыми. Соотношение (1.7) при этом можно записать в виде

$$\alpha_d T - \alpha_m T + \frac{\sigma_m}{E_m} + \frac{1 - \nu}{E_d} q = 0 \quad (1.8)$$

Температурные напряжения σ_m в молибденовом кольце и радиальные напряжения q , вызывающие сжатие алмазного диска, должны быть уравновешены. Условие равенства сил, действующих на элемент объема кольца (фиг. 1), дает соотношение

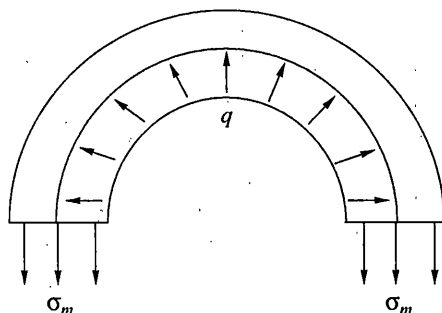
$$2q\rho h = \sigma_m S \quad (1.9)$$

где $2h$ – толщина алмазной пластины, S – площадь поперечного сечения колец. В силу малости упругих деформаций в качестве ρ в (1.9) можно принять срединный радиус молибденового кольца до деформации.

Исключая из выражений (1.8) и (1.9) напряжение σ_m , можно получить соотношение для определения нагрузки q :

$$q = \frac{(\alpha_m - \alpha_d)T}{2h\rho / (SE_m) + (1 - \nu) / E_d} \quad (1.10)$$

Подставляя найденное значение нагрузки q в решение (1.2)–(1.3), получаем распределение напряжений и перемещений в алмазном диске, вызванное различием коэф-



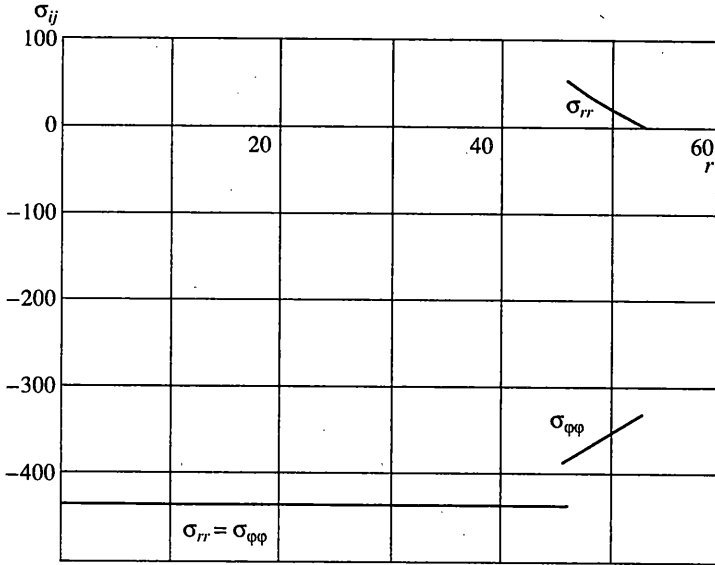
Фиг. 1

эффициентов температурного расширения алмаза и элементов металлического крепления. На фиг. 2–4 показаны зависимости напряжений σ_{ij} [МПа] (фиг. 2), деформаций ϵ_{ij} (фиг. 3) и перемещения u [мм] (фиг. 4) от радиуса r [мм] при следующих значениях геометрических параметров и постоянных материала $2h = 1.8$ мм, $S = 74$ мм², $R = 53$ мм, $\rho = 46$ мм, $T = 650^\circ\text{C}$, $E_d = 1050$ ГПа, $E_m = 330$ ГПа, $\alpha_m = 5 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $\alpha_d = 1.75 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $\nu = 0.1$.

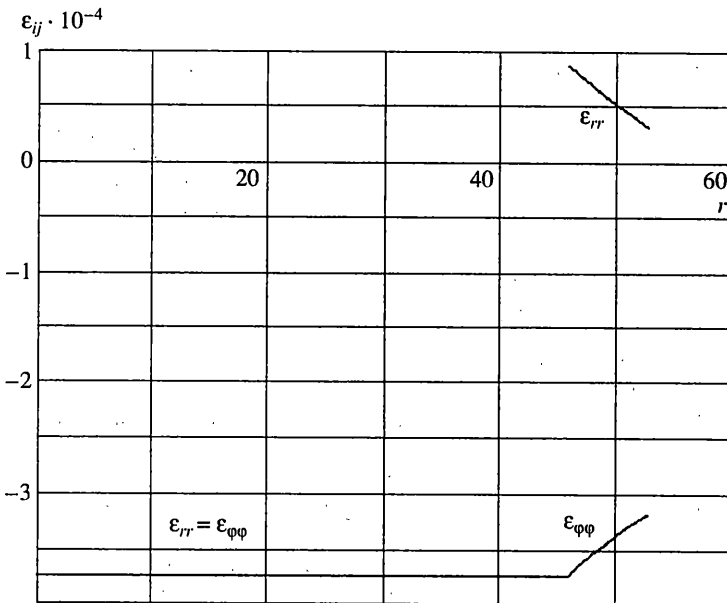
Из полученных зависимостей следует, что в области $\rho \leq r \leq R$, т.е. на внешнем крае пластины за молибденовым креплением, возникает зона действия растягивающих радиальных напряжений. Максимальное растягивающее напряжение при данных значениях постоянных достигает величины 54 МПа, что много меньше значений предела прочности, указываемых в различных источниках. Так в [1] приводится значение прочности на изгиб пластин толщиной в 0.5 мм порядка 550 МПа. Однако необходимо отметить два обстоятельства: в этой же работе указывается на существенное падение прочности с ростом толщины алмазной пластины; значение прочности на изгиб определялось на основе опытов на разрушение, выполненных при опирании круглой пластины на шаровидную опору. Поэтому само значение прочности нуждается в пересчете для определения действительного значения напряжения разрушения при растяжении. Кроме того, наличие микродефектов структуры может привести к растрескиванию (по дуге окружности) и хрупкому разрушению при более низких величинах растягивающего напряжения.

Полученные соотношения для сжимающих напряжений, возникающих в рассматриваемом элементе установки, позволяют оценить изгиб пластины. Числовые оценки значений q показывают, что, если считать материал пластины однородным по толщине, то величина радиальных сжимающих напряжений, вызванных различием коэффициентов температурного расширения для молибдена и алмаза, оказывается близкой к величине критической нагрузки, вызывающей выпучивание диска в результате потери устойчивости. В действительности, в процессе изготовления алмазного стекла возникает неоднородность материала по толщине. В результате модуль упругости оказывается переменным при переходе от подложечной стороны к ростовой. Учет изменения модуля упругости по толщине диска приводит к тому, что пластина должна начать выгибаться при приложении любой центрированной сжимающей нагрузки. Подобную неоднородность свойств материала можно оценить по величине прогиба в наблюдаемом выпучивании пластины в процессе охлаждения после пайки.

2. Рассмотрим упругое деформирование неоднородной круглой пластины радиуса R и толщины $2h$ под действием сжимающих нагрузок, действующих в ее плоскости. Выберем направление осей таким образом, чтобы ось Oz цилиндрической системы координат была направлена по нормали к плоскости пластины до деформации. Будем использовать обычно принимаемую в технической теории пластин гипотезу прямых нормалей, что соответствует представлению компонентов тензора деформаций



Фиг. 2



Фиг. 3

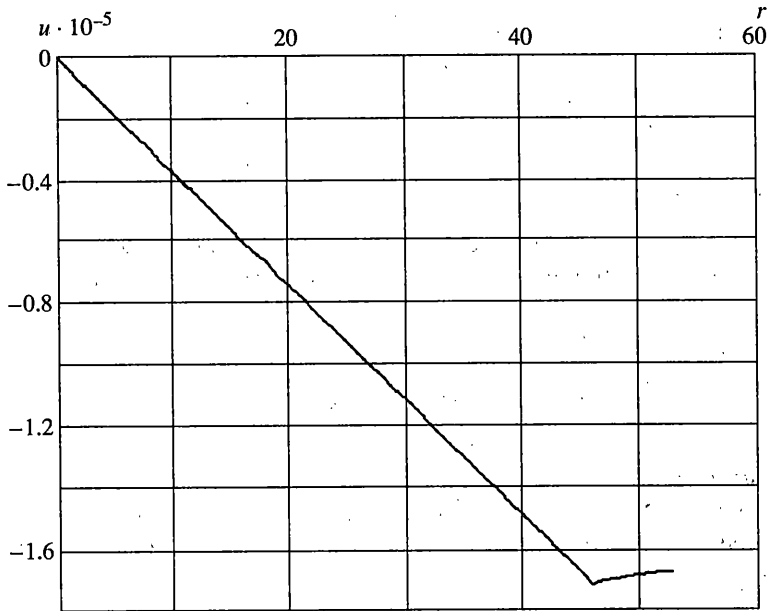
в виде [2, 3]:

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} - z w_{,ij} \quad (i = 1, 2) \quad (2.1)$$

где $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ – деформации срединной плоскости, u_i ($i = 1, 2$) – перемещения срединной плоскости, w – прогиб. С учетом осевой симметрии $u_\varphi = 0$, $u_r = u(r)$; $w = w(r)$, $\epsilon_{r\varphi} = 0$ в цилиндрической системе координат соотношения (2.1) имеют вид

$$\epsilon_{rr} = e_{rr} - z \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \epsilon_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} - z \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (2.2)$$

$$e_{rr} = du/dr, \quad e_{\varphi\varphi} = u/r \quad (2.3)$$



Фиг. 4

В первом приближении будем предполагать, что модуль упругости пластины меняется по толщине линейно

$$E = E_0 + E_1 z / h \quad (2.4)$$

Компоненты тензора напряжений связаны с деформациями законом Гука, и с учетом (2.2)–(2.3) представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[e_{rr} + \nu e_{\varphi\varphi} - z \left(w'' + \frac{\nu}{r} w' \right) \right] \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[e_{\varphi\varphi} + \nu e_{rr} - z \left(\frac{w'}{r} + \nu w'' \right) \right] \\ \sigma_{r\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Штрихом обозначена производная по r .

Введем симметричные тензоры усилий T_{ij} и моментов M_{ij} :

$$\int_{-h}^h \sigma_{ij} dz = T_{ij}, \quad \int_{-h}^h \sigma_{ij} z dz = M_{ij} \quad (2.6)$$

Подставляя в соотношения (2.6) выражения (2.5) для компонентов тензора напряжений и учитывая представление (2.4) для модуля упругости пластины, ненулевые составляющие усилий и моментов представим в виде:

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left[2hE_0(e_{rr} + \nu e_{\varphi\varphi}) - \frac{2}{3} E_1 h^2 \left(w'' + \frac{\nu}{r} w' \right) \right] \\ T_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left[2hE_0(e_{\varphi\varphi} + \nu e_{rr}) - \frac{2}{3} E_1 h^2 \left(\frac{w'}{r} + \nu w'' \right) \right] \end{aligned}$$

$$M_{rr} = \frac{1}{1-\nu^2} \left[-\frac{2}{3} E_0 h^3 \left(w'' + \frac{\nu}{r} w' \right) + \frac{2}{3} E_1 h^2 (e_{rr} + \nu e_{\varphi\varphi}) \right] \quad (2.7)$$

$$M_{\varphi\varphi} = \frac{1}{1-\nu^2} \left[-\frac{2}{3} E_0 h^3 \left(\frac{w'}{r} + \nu w'' \right) + \frac{2}{3} E_1 h^2 (e_{\varphi\varphi} + \nu e_{rr}) \right]$$

$$T_{r\varphi} = 0, \quad M_{r\varphi} = 0$$

Компоненты тензоров усилий и моментов связаны уравнениями равновесия, которые в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии имеют вид [2, 3]:

$$dT_{rr} / dr + (T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) / r = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2 M_{rr}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dM_{rr}}{dr} - \frac{1}{r} \frac{dM_{\varphi\varphi}}{dr} + T_{rr} \frac{d^2 w}{dr^2} + T_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = q_0 \quad (2.9)$$

где q_0 – интенсивность поперечной нагрузки.

Подставляя выражения (2.7) для тензоров T_{ij} и M_{ij} , получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для определения радиального перемещения $u(r)$ и прогиба $w(r)$:

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1}{r} u' - \frac{1}{r^2} u - \frac{\alpha h}{3} \left(v'' + \frac{1}{r} v' - \frac{1}{r^2} v \right) &= 0 \\ -\frac{h^2}{3} L(v) + \frac{\alpha h}{3} L(u) + \left[v' \left(u' + \frac{\nu u}{r} \right) + \frac{\nu}{r} \left(\frac{u}{r} + \nu u' \right) \right] & \\ -\frac{\alpha h}{3} \left[(v')^2 + \frac{2\nu}{r} v v' + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] &= \frac{q_0 (1-\nu^2)}{2hE_0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\nu = w'(r), \quad \alpha = E_1 / E_0, \quad |\alpha| < 1, \quad L(f) = f''' + \frac{2}{r} f'' - \frac{1}{r^2} f' + \frac{1}{r^3} f$$

Рассмотрим деформирование сплошной пластины при шарнирном закреплении краев в случае, когда поперечная нагрузка отсутствует. Общее решение первого уравнения в (2.10) с учетом ограниченности перемещения u в центре пластины имеет вид

$$u = C_1 r + \frac{1}{3} \alpha h \nu(r) \quad (2.11)$$

Подставляя это решение во второе соотношение (2.10), для определения функции $\nu(r)$ получаем уравнение

$$\nu''' + \frac{2}{r} \nu'' - \frac{1}{r^2} \nu' + \frac{1}{r^3} \nu + s \left(\nu' + \frac{\nu}{r} \right) = 0$$

$$s = C_1 (1 + \nu) / \left[\frac{1}{3} h^2 \left(\frac{1}{3} \alpha^2 - 1 \right) \right]$$

Это уравнение допускает однократное интегрирование. В результате получим

$$r(\nu / r + \nu')' + s \nu = A \quad (2.12)$$

Постоянная интегрирования A равна нулю в силу принятия условия ограниченности искомого решения и его производных при $r = 0$. После замены переменной $x = \sqrt{s}r$ соотношение (2.12) переходит в уравнение Бесселя

$$x^2 d^2 \nu / dx^2 + x d\nu / dx + (x^2 - 1) \nu = 0 \quad (2.13)$$

Общее решение уравнения (2.13) имеет вид

$$v = B_1 J_1(x) + B_2 Y_1(x) \quad (2.14)$$

где J_1 и Y_1 – Бесселевы функции 1 и 2 рода с индексом 1. Поскольку функция Y_1 является неограниченной в центре пластины, следует положить $B_2 = 0$. Из (2.14) могут быть получены соотношения для прогиба и радиального перемещения

$$w = -(B_1 / \sqrt{s}) J_0(r\sqrt{s}) + D, \quad u = C_1 r + \frac{1}{3} \alpha h B_1 J_1(r\sqrt{s}) \quad (2.15)$$

где постоянные интегрирования C_1 , B_1 и D определяются на основании краевых условий. В случае шарнирного опирания пластины

$$w(R) = 0, \quad M_{rr}(R) = 0 \quad (2.16)$$

Из условия приложения сжимающей нагрузки в плоскости пластины следует

$$T_{rr}(R) = -P \quad (2.17)$$

где P – сила, действующая на единицу длины окружности. Определяя значения постоянных интегрирования, находим

$$C_1 = -\frac{P(1-\nu)}{2hE_0}, \quad D = \frac{B_1}{\sqrt{s}} J_0(R/\sqrt{s})$$

$$B_1 = -\frac{\alpha(1+\nu)C_1}{h(\frac{1}{3}\alpha^2 - 1)} \left[\sqrt{s} J_0(R\sqrt{s}) - \frac{1-\nu}{R} J_1(R\sqrt{s}) \right]^{-1} \quad (2.18)$$

При $\alpha = 0$ имеем однородную по механическим характеристикам пластину. Полученное решение сводится к классическому случаю, когда прогиб отсутствует до момента потери устойчивости [2, 3].

В случае неоднородной пластины любое малое значение сжимающей силы приводит к появлению прогиба пластины. Прогиб пропорционален приложенной нагрузке, когда она много ниже критического значения.

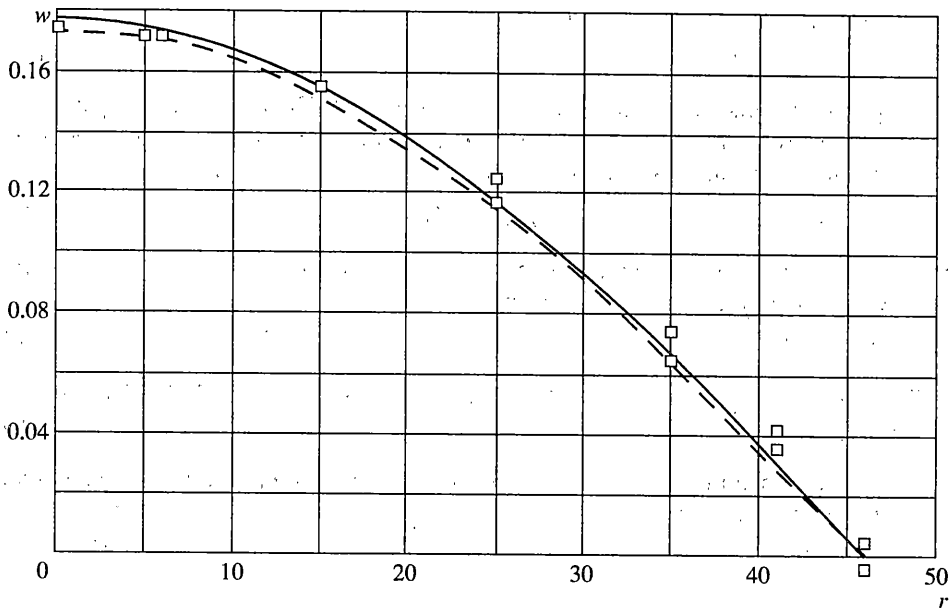
$$P_{cr} = \frac{2}{3} h E_0 \xi^2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 \frac{(1 - \frac{1}{3} \alpha^2)}{1 - \nu^2} \quad (2.19)$$

при котором происходит потеря устойчивости. Константа ξ зависит только от коэффициента Пуассона ν и является решением уравнения $\xi J_0(\xi) - (1 - \nu) J_1(\xi) = 0$.

Постоянная интегрирования B_1 при данном критическом значении силы (2.19) стремится к бесконечности, при этом прогиб и его производная, определяющая угол поворота нормали к срединной поверхности становятся бесконечно большими. Значения коэффициента ξ при различных значениях коэффициента Пуассона приведены ниже

ν	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ξ	1.92	1.98	2.05	2.11	2.17

Используя экспериментальные данные, характеризующие величину прогиба пластины, возникающего после пайки, и полученное в решении (1.3) значение сжимающего напряжения $\sigma_{rr} = 435$ МПа, возникающего в центральной области пластины, можно количественно оценить различие модулей упругости для материала на подложечной и ростовой сторонах алмазного диска. Для значений геометрических параметров $2h = 1.8$ мм, $R = 46$ мм и констант материала $E_0 = 1050$ ГПа, $\nu = 0.1$ отношение E_1/E_0 достигает значения 0.047. Таким образом, значение модуля Юнга меняется от 1000 ГПа на подложечной стороне алмазной пластины до 1100 ГПа на ростовой стороне. На фиг. 5 сплошной линией показана зависимость величины прогиба w [мм] от радиуса r [мм], определяемая выражением (2.15) для указанных значений пара-



Фиг. 5

метров. Точками отмечены экспериментальные данные. Критическое значение радиального сжимающего напряжения $\sigma_{rr}^c(R)$ составляет 496.1 МПа. В случае $\alpha = 0$ величина критической нагрузки совпадает с классическим значением для однородной пластины и равна 496.5 МПа.

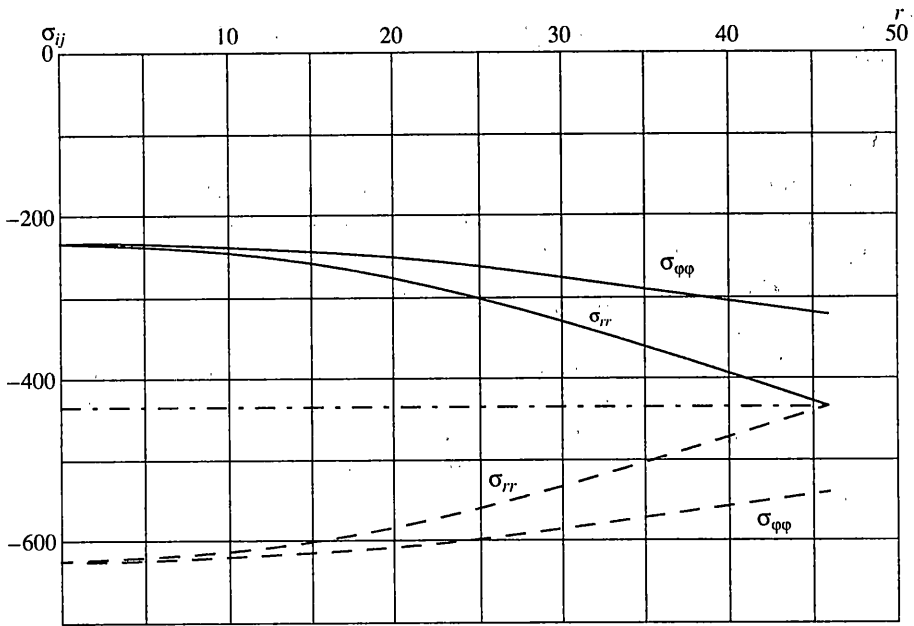
На фиг. 6 сплошными линиями показаны диаграммы изменения напряжений σ_{rr} [МПа] и $\sigma_{\varphi\varphi}$ в зависимости от радиуса на верхней грани пластины $z = h$; штриховые линии – диаграммы изменения напряжений на нижней грани $z = -h$. На срединной поверхности пластины распределения напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ по радиусу незначительно отличаются от постоянного значения приложенной радиальной сжимающей нагрузки. На фиг. 6 соответствующие диаграммы представлены штрих-пунктирной линией. С увеличением параметра α , характеризующего неоднородность материала, значения напряжений на верхней грани пластины увеличиваются. Для рассматриваемого значения сжимающей нагрузки при значениях $\alpha = 0.08$ на верхней грани пластины возникают растягивающие напряжения, что может привести к растрескиванию материала.

3. Как видно из фиг. 5, при указанных значениях параметров нагружения и материальных констант прогиб пластины в центре достигает 10% от толщины пластины. При исследовании характера деформирования неоднородных пластин с большими прогибами можно уточнить полученное решение, воспользовавшись соотношениями геометрически-нелинейной теории изгиба пластин. Удерживая в соотношениях для компонентов тензора деформаций квадратичные члены, зависящие от прогиба w , деформации срединной поверхности пластины представим в виде [2, 3]:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + w_{,i}w_{,j}) \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

Для того чтобы удовлетворить тождественно дифференциальным уравнениям равновесия (2.8), введем функцию напряжений $\Phi(r)$:

$$T_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad T_{\varphi\varphi} = \frac{d^2\Phi}{dr^2} \quad (3.2)$$



Фиг. 6

Из выражений (2.7) с учетом представления (3.2) компоненты деформаций срединной поверхности можно выразить через функцию напряжений Φ и прогиб w :

$$e_{rr} = \frac{1}{2hE_0} \left(\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \nu \frac{d^2\Phi}{dr^2} \right) + \frac{h\alpha}{3} \frac{d^2w}{dr^2} \quad (3.3)$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2hE_0} \left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{h\alpha}{3} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad \alpha = \frac{E_1}{E_0}$$

Компоненты тензора деформаций срединной поверхности пластины должны удовлетворять уравнению совместности деформаций, которое для представления (3.1) в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial e_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r e_{\varphi\varphi})}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \\ & = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

или, с учетом осевой симметрии

$$r \frac{d^2 (r e_{\varphi\varphi})}{dr^2} - r \frac{de_{rr}}{dr} = -r \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \quad (3.4)$$

Подставляя в уравнение (3.4) выражения деформаций через функцию напряжений по формулам (3.3), получим

$$\left[r \left(\Phi'' + \frac{1}{r} \Phi' \right)' \right] = -hE_0 ((w')^2)'$$

где штрихом обозначена производная по r .

Первый интеграл этого уравнения с учетом ограниченности искомых функций и их производных при $r = 0$ имеет вид

$$\left(\Phi'' + \frac{1}{r}\Phi'\right)' = -hE_0 \frac{v^2}{r}, \quad v = w'(r) \quad (3.5)$$

Выражая компоненты усилий T_{ij} и деформаций срединной поверхности пластины e_{ij} через функцию напряжений Φ и прогиб w по формулам (3.2), (3.3) преобразуем уравнение равновесия моментов (2.9) к виду

$$-\frac{2}{3}h^3E_0 \frac{1-\alpha^2/3}{1-v^2} \Delta\Delta w + \frac{1}{r}(\Phi'w')' = q_0 \quad (3.6)$$

В цилиндрической системе координат в условиях осевой симметрии выражение для бигармонического оператора от прогиба имеет вид $\Delta\Delta w = [r(v/r + v')]'/r$. В случае, когда поперечная нагрузка отсутствует ($q_0 = 0$), существует первый интеграл уравнения (3.6), который в силу ограниченности функций Φ и w , а также их производных в центре пластины $r = 0$, может быть представлен выражением

$$-\frac{2}{3}h^3E_0 \frac{1-\alpha^2/3}{1-v^2} r \left(\frac{v}{r} + v'\right)' + \Phi'v = 0 \quad (3.7)$$

Система уравнений (3.5), (3.7) позволяет определить неизвестные функции Φ и w . В случае пластины из однородного материала ($\alpha = 0$) уравнения (3.5), (3.7) совпадают с уравнениями Кармана нелинейной теории изгиба пластин [2, 3], а для малых прогибов ($v \ll 1$) сводятся к полученной ранее системе уравнений (2.10).

Граничные условия, соответствующие шарнирному закреплению краев пластины и приложенной на внешнем радиусе в срединной поверхности радиальной нагрузке постоянной интенсивности, представлены выражениями (2.16), (2.17). Два недостающие краевые условия для интегрирования системы уравнений (3.5), (3.7) определяются из условия ограниченности функций Φ , w и их производных при $r = 0$. При этом, как следствие из уравнений (3.5), (3.7), получим

$$\Phi'|_{r=0} = 0, \quad v|_{r=0} = 0 \quad (3.8)$$

Для указанных выше значений материальных постоянных и геометрических параметров зависимость прогиба w от радиуса r , полученная численным интегрированием системы (3.5), (3.7) при граничных условиях (2.16), (2.17), (3.8), показана на фиг. 5 штриховой линией. Максимальное расхождение диаграмм не превышает 2%. Критическое значение радиального сжимающего напряжения $\sigma_{rr}^{cr}(R)$, при котором происходит потеря устойчивости, составляет 473.8 МПа, что на 4.5% ниже величины критической нагрузки, полученной ранее с помощью соотношений линейной теории изгиба пластин. Таким образом, уточненное решение, полученное на основе геометрически-линейной теории изгиба, не приводит к существенным расхождениям с зависимостями (2.15), (2.18), (2.19).

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках программы "Поддержка ведущих научных школ" (грант 00-15-96151) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-06097).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spörl R., Heidinger R., Kennedy G.R., Brierley C.J. Mechanical properties of free-standing CVD diamond wafer // *Diamond Films: Synthesis. Processing and Applications. Topical Symp.* 4. 1998: Adv. Sci. and Technol. 1999. № 21. P. 335–342.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 460 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.11.2001