

УДК 539.3

© 2002 г. В.В. ВАСИЛЬЕВ, А.А. КРИКАНОВ

РАВНОНАПРЯЖЕННЫЕ БЕЗМОМЕНТНЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ, ОБРАЗОВАННЫЕ МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНОЙ НАМОТКИ АРМИРОВАННОЙ ЛЕНТЫ

Рассматриваются безмоментные оболочки вращения, нагруженные равномерным внутренним давлением и образованные из композитного материала непрерывной намоткой ленты, образованной из системы параллельных волокон и укладываемой симметрично по отношению к образующей. Известные решения, определяющие равновесную форму поверхности оболочки и ее толщину, полученные в предположении о малости ширины наматываемой ленты, обобщаются на случай ленты конечной ширины, которая используется в реальных технологических процессах. Получены уточненные соотношения, определяющие форму поверхности, толщину и конструктивные параметры композитных оболочек рассматриваемого класса.

1. Композитные оболочки вращения. Оболочки вращения, изготовленные из волокнистых композитов методом непрерывной намотки, находят в настоящее время широкое применение в различных областях техники. Для изготовления таких оболочек используется лента, состоящая из множества непрерывных высокопрочных стеклянных, углеродных или органических волокон, которая пропитывается полимерным связующим и укладывается на вращающуюся оправку, по форме соответствующую проектной форме оболочки. Получаемая после полимеризации связующего и удаления оправки оболочка показана на фиг. 1. В окрестности полюсного отверстия композитной оболочки устанавливается металлическое кольцо – фланец, типовое сечение которого представлено на фиг. 2. Обладая исключительно высокой степенью весового совершенства, рассматриваемые композитные оболочки впервые получили применение в начале 60-х годов в качестве корпусов ракетных двигателей твердого топлива [1], а затем – в качестве баллонов давления и резервуаров различного назначения.

Масса замкнутой оболочки, нагруженной внутренним давлением, определяется следующим выражением

$$m = k\bar{p}V\rho / \bar{\sigma} \quad (1.1)$$

где k – коэффициент, зависящий от формы и конструктивных особенностей оболочки, \bar{p} – разрушающее давление, V – внутренний объем, $\bar{\sigma}$ – предел прочности материала при растяжении и ρ – его плотность. Основным параметром, определяющим высокую эффективность композитной оболочки, является удельная прочность однонаправленно армированного композита при растяжении вдоль волокон, т.е. величина $(\bar{\sigma}_1/\rho)$, где $\bar{\sigma}_1$ – напряжение, действующее в направлении продольной оси ленты x_1 (фиг. 2). По этой характеристике современные композиты превосходят конструкционные металлические сплавы в 5–10 раз (в зависимости от типа материала). Основной недостаток композитной оболочки связан с тем, что в отличие от металла однонаправ-



Фиг. 1

ленный композит является анизотропным и обладает высокой прочностью только в одном направлении. При растяжении поперек волокон, т.е. в направлении оси x_2 на фиг. 2, предел прочности композита близок к нулю. Таким образом, возникает задача проектирования композитной оболочки, в которой с одной стороны, максимально используется высокая продольная прочность ленты, а с другой компенсируется ее низкая поперечная прочность. Идеальной в этом отношении представляется слоистая оболочка, у которой в каждом слое одно из главных напряжений, в частности σ_2 , равно нулю, а траектория максимального главного напряжения σ_1 совпадает с направлением армирования. Соответственно, однонаправленная лента, образующая такую оболочку, описывается так называемой монотропной моделью материала, характеризуемой частной формой ортотропии, при которой отлична от нуля только одна — продольная жесткость ленты.

С начала 60-х годов обсуждаемая задача рассматривалась неоднократно, причем оболочка представлялась как система несвязанных между собой волокон. Обзор соответствующих результатов и достаточно полный анализ рассматриваемой задачи представлен в работах [2, 3]. Существенно, что эти результаты основаны на предположении о том, что ширина укладываемой ленты t пренебрежимо мала по сравнению с радиусом оболочки R (фиг. 2). Такое предположение не вполне соответствует реальному процессу намотки. Для повышения его производительности часто используется достаточно широкая лента, и отношение t/R достигает 0.15. Кроме того, предположение о малости t вызывает сингулярность решения при $r = r_0$ (фиг. 2) и не позволяет предсказать структуру оболочки в окрестности полюсного отверстия. Вследствие этого, для определения размеров фланца в настоящее время используются эмпирические зависимости.

Ниже приведено решение задачи о равнонапряженной композитной оболочке вращения, полученное для ленты конечной ширины и позволяющее уточнить геометрию оптимальной оболочки. Отдельные вопросы, связанные с такой постановкой задачи, рассматривались в работах [4–6].

2. Оболочки, образованные системой волокон. Поскольку решение, соответствующее ленте конечной ширины, является непосредственным обобщением решения, полученного для бесконечно тонкой ленты или волокна, ниже представлены основные

результаты для оболочки, образованной системой волокон, и приведен их качественный анализ.

Рассмотрим оболочку, показанную на фиг. 2, и предположим, что она образована двумя симметричными системами волокон с углами $\pm\varphi(r)$ по отношению к меридиану (на фиг. 2 показана система с углом $+\varphi$). Оболочка нагружена равномерным давлением p и осевыми усилиями q , равномерно распределенными по контуру полюсного отверстия с радиусом r_0 и статически эквивалентными осевой силе Q (фиг. 2), для случаев закрытого ($Q = \pi p r_0^2$) и открытого ($Q = 0$) полюсного отверстия, которые будут рассматриваться далее, соответственно имеем

$$q = \frac{Q}{2\pi r_0} = \frac{1}{2} p r_0, \quad q = 0 \quad (2.1)$$

Уравнения равновесия для осесимметрично нагруженной безмоментной оболочки вращения имеют вид

$$(rN_m)' - N_s = 0 \quad (2.2)$$

$$N_m / R_1 + N_s / R_2 = p \quad (2.3)$$

Здесь N_m и N_s – меридиональное и кольцевое усилия, а R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности оболочки, которые связаны с формой меридиана $z(r)$ следующим образом:

$$R_1 = -\frac{1}{z''} \sqrt{[1+(z')^2]^3}, \quad R_2 = -\frac{r}{z'} \sqrt{1+(z')^2} \quad (2.4)$$

В записанных соотношениях и далее штрихом обозначена производная по r . Как известно [7], уравнения (2.2) и (2.3) допускают решение в общем виде. Исключая N_s из уравнения (2.3), подставляя радиусы (2.4), интегрируя и определяя постоянную интегрирования из условия на краю $r = r_0$, окончательно получим

$$N_m = -\frac{p}{2rz'} \sqrt{1+(z')^2} (r^2 - \lambda) \quad (2.5)$$

$$\lambda = r_0^2 - 2qr_0 / p \quad (2.6)$$

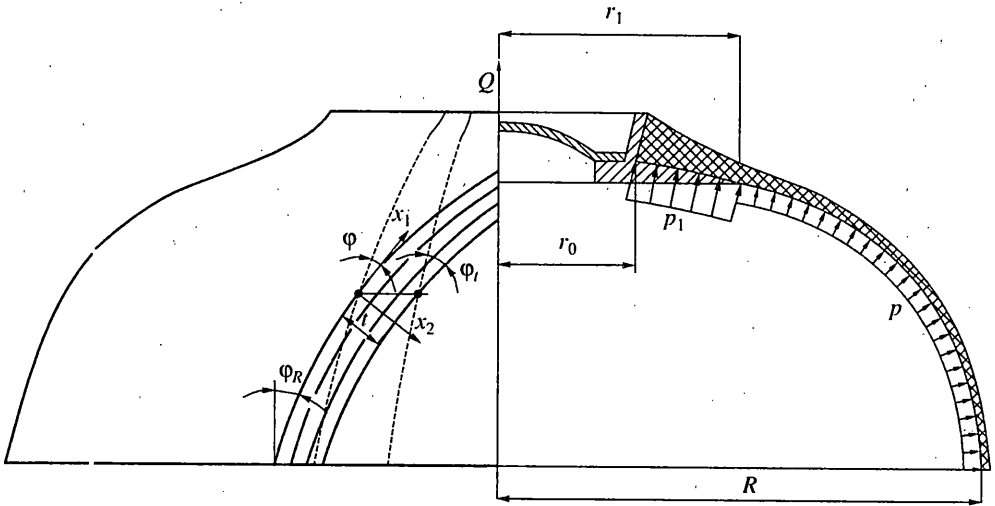
Заметим, что равенство (2.5) представляет собой условие равновесия части оболочки, включающей вершину и отсеченной по параллели $r = \text{const}$. Свяжем усилия N_m и N_s с напряжениями в ленте σ_1 . Предположим, что в силу малости ширины ленты t все составляющие ее волокна имеют на заданном радиусе r один и тот же угол армирования, т.е. $\varphi = \varphi_t = \varphi(r)$ (фиг. 2). Тогда в соответствии с известными формулами преобразования для напряжений имеем

$$N_m = \sigma_1 h \cos^2 \varphi, \quad N_s = \sigma_1 h \sin^2 \varphi \quad (2.7)$$

Здесь h – толщина оболочки, которая зависит от r , так как одно и то же количество лент n проходит через сечения оболочки с различными радиусами. Для того чтобы найти $h(r)$ следует учесть, что площадь сечения $r = \text{const}$ оболочки равная, с одной стороны, $2\pi rh(r)$, с другой стороны, формируется из сечений лент, количество которых равно n , ширина t , а толщина – δ ; причем угол между нормальным сечением ленты $x_1 = \text{const}$ и сечением оболочки $r = \text{const}$ составляет φ (фиг. 2). Таким образом

$$2\pi rh(r) = nt\delta / \cos \varphi \quad (2.8)$$

Ввиду того, что толщина ленты из волокон δ не может быть точно измерена, исключим ее с помощью соотношения (2.8), записанного для параллели $r = R$ (фиг. 2), т.е.



Фиг. 2

на экваторе оболочки. Имеем

$$2\pi R h_R = n t \delta / \cos \varphi_R \quad (2.9)$$

Здесь h_R и φ_R – толщина и угол армирования на экваторе оболочки. Подставляя δ из равенства (2.9) в соотношение (2.8), найдем

$$h(r) = h_R \frac{R \cos \varphi_R}{r \cos \varphi(r)} \quad (2.10)$$

С учетом этого результата выражения (2.7) для усилий принимают вид

$$N_m = \frac{1}{r} \sigma_1 h_R R \cos \varphi_R \cos \varphi(r), \quad N_s = \sigma_1 h_R \frac{R \cos \varphi_R}{r \cos \varphi(r)} \sin^2 \varphi(r) \quad (2.11)$$

Подставим эти равенства в уравнение равновесия (2.2). После некоторых преобразований получим следующее уравнение

$$\sigma_1' r \cos^2 \varphi - \sigma_1 \sin \varphi (r \sin \varphi)' = 0 \quad (2.12)$$

Рассматриваемая оболочка из волокон принадлежит к классу статически определимых систем, для которых, как известно, условие минимума массы конструкции совпадает с условием равнонапряженности ее элементов. В связи с этим потребуем, чтобы напряжение σ_1 не зависело от r . Тогда уравнение (2.12) дает

$$r \sin \varphi = \text{const} \quad (2.13)$$

Соотношение (2.13) соответствует известной теореме Клеро, определяющей поведение геодезической линии на поверхности вращения. Таким образом, равнонапряженная оболочка образуется волокнами, расположенными вдоль геодезических линий ее поверхности. Константу в равенстве (2.13) можно определить, если записать это равенство для экваториального сечения $r = R$, т.е. $r \sin \varphi = R \sin \varphi_R$, или

$$r \sin \varphi = r_0, \quad r_0 = R \sin \varphi_R \quad (2.14)$$

Отсюда можно заключить, что угол армирования увеличивается от значения φ_R на экваторе оболочки до 90° при $r = r_0$. В процессе намотки оболочки волокна касаются параллели $r = r_0$ и в полюсе оболочки образуется отверстие радиуса r_0 .

Равнонапряженная оболочка обладает еще одним важным свойством. Запишем соотношения между деформациями ленты в координатах x_1, x_2 , показанных на фиг. 2 и деформациями оболочки ϵ_m и ϵ_s . Используя известные преобразования компонент тензора деформаций, получим

$$\epsilon_1 = \epsilon_m \cos^2 \varphi + \epsilon_s \sin^2 \varphi, \quad \epsilon_1 = \sigma_1 / E_1 \quad (2.15)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_m \sin^2 \varphi + \epsilon_s \cos^2 \varphi, \quad \epsilon_{12} = (\epsilon_s - \epsilon_m) \sin 2\varphi$$

Здесь E_1 – модуль упругости ленты, а ϵ_2 и ϵ_{12} не вызывают напряжений в моноотропной ленте, у которой отсутствуют жесткости при растяжении в поперечном направлении и сдвиге. Поскольку σ_1 не зависит от r , то при угле $\varphi(r)$, определяемом в соответствии с равенствами (2.14) из соотношений (2.15) следует

$$\epsilon_m = \epsilon_s = \epsilon_1, \quad \epsilon_{12} = 0 \quad (2.16)$$

Последнее из этих равенств показывает, что волокна совпадают с траекториями главных деформаций, а из первого следует, что оболочка является равнодеформируемой. Это означает, что ее деформированная поверхность получается из исходной заменой r и z на

$$r_d = r(1 + \epsilon_1), \quad z_d = z(1 + \epsilon_1) \quad (2.17)$$

соответственно. Угол армирования до и после деформации выражается следующим образом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{rd\beta}{\sqrt{1 + (dz/dr)^2} dr}, \quad \operatorname{tg} \varphi_d = \frac{r_d d\beta}{\sqrt{1 + (dz_d/dr_d)^2} dr_d}$$

где β – полярный угол. Учитывая равенства (2.17), получим $\varphi_d = \varphi$, т.е. угол армирования оболочки не изменяется в процессе деформации.

Используя равенства (2.14) для исключения φ из соотношений (2.10) и (2.11), получим

$$h(r) = h_R \sqrt{\frac{R^2 - r_0^2}{r^2 - r_0^2}} \quad (2.18)$$

$$N_m = \frac{1}{r^2} \sigma_1 h_R \sqrt{(R^2 - r_0^2)(r^2 - r_0^2)} \quad (2.19)$$

$$N_s = \frac{r_0^2}{r^2} \sigma_1 h_R \sqrt{\frac{R^2 - r_0^2}{r^2 - r_0^2}} \quad (2.20)$$

Как следует из равенств (2.18) и (2.20), толщина оболочки и кольцевое усилие бесконечно возрастают при $r \rightarrow r_0$. Причиной этого эффекта, не наблюдаемого в реальных оболочках, является предположение о малости ширины ленты, введенные выше. Вернемся к уравнению (2.5). Подставляя в него N_m с помощью равенства (2.19), можно записать следующее уравнение, определяющее форму меридиана равнонапряженной оболочки

$$\frac{1}{z'} \sqrt{1 + (z')^2} = - \frac{2\sigma_1 h_R}{p} \sqrt{\frac{(R^2 - r_0^2)(r^2 - r_0^2)}{r(r^2 - \lambda)}} \quad (2.21)$$

Для качественного исследования полученных результатов рассмотрим случай $\varphi = 0$, т.е. оболочку, армированную вдоль меридианов. Согласно равенствам (2.14), $r_0 = 0$ при $\varphi_R = 0$, а из соотношения (2.20) в этом случае следует, что $N_s = 0$. Таким образом, в рассматриваемой оболочке отсутствуют кольцевые усилия. О существовании таких обо-

лочек известно давно. В частности, в работе [8] отмечается, что образующей такой оболочки является эластика Эйлера. Действительно, уравнение (2.21) при $r_0 = 0$ принимает вид

$$\frac{1}{z'} \sqrt{1 + (z')^2} = -\frac{2\sigma_1 h_R R}{pr^2} \quad (2.22)$$

Потребуем, чтобы на экваторе $r = R$ касательная к образующей оболочки была параллельна ее оси вращения, т.е. чтобы

$$z' \rightarrow -\infty \text{ при } r \rightarrow R \quad (2.23)$$

В результате предельного перехода получим

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} pR / h_R \quad (2.24)$$

Это соотношение определяет напряжение, действующее в ленте. С учетом равенства (2.24) уравнение (2.22) может быть приведено к виду

$$z' = -r^2 / \sqrt{R^4 - r^4} \quad (2.25)$$

Решение может быть выражено через эллиптические интегралы и представлено в следующей параметрической форме

$$\bar{z} = \frac{1}{k} \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta - k \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad \bar{r} = \cos \theta \quad (2.26)$$

$$\bar{z} = z / R, \quad \bar{r} = r / R, \quad k = 1 / \sqrt{2}$$

Уравнения (2.26) определяют упругую линию стержня сжатого в осевом направлении так, что касательные к упругой линии на концах стержня оказываются ортогональными линиями действия сил, приложенных на этих концах [8]. Образующая оболочки (или упругая линия половины стержня, сжатого в направлении оси z) показана на фиг. 3 (линия 1, $\varphi_R = 0$). Кривая 2 соответствует образующей оболочки при $\varphi_R = 15^\circ$. Штриховой линией показан для сравнения эллипс с соответствующими полуосями. Поверхность вращения с образующей в форме (2.26) относится к специальному классу минимальных поверхностей, она имеет минимальную длину меридиана S при заданном внутреннем объеме $V = V_0$. Действительно

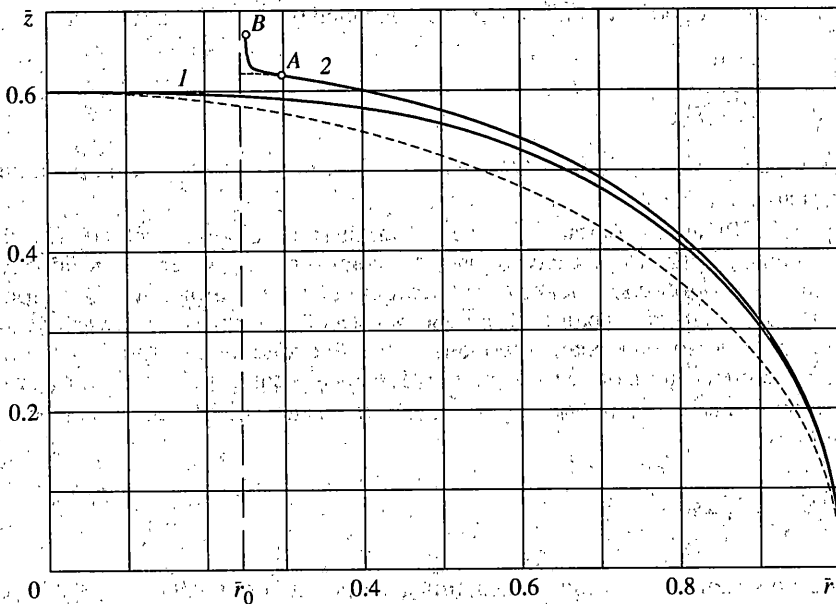
$$S = \int_0^R \sqrt{1 + (z')^2} dr, \quad V = \pi \int_0^R r^2 z' dr \quad (2.27)$$

Составляя функционал Лагранжа с множителем μ : $L = S + \mu(V - V_0)$ и минимизируя его с учетом условия (2.23), получим уравнение (2.25) для образующей равнонапряженной оболочки.

Как и другие минимальные поверхности, обсуждаемая поверхность может быть получена экспериментально [9]. Рассмотрим абсолютно гибкую и не несущую нагрузку мембрану в форме поверхности вращения, вдоль меридианов которой уложены закрепленные по экватору $r = R$ абсолютно гибкие и нерастяжимые нити. При действии внутреннего давления p в нитях возникают силы натяжения T , и условие равновесия отсеченной части оболочки в осевом направлении можно записать в виде

$$\pi pr^2 = 2Tn \cos \alpha, \quad \cos \alpha = -\frac{z'}{\sqrt{1 + (z')^2}}$$

где n – число нитей, α – угол между касательной к меридиану и осью вращения. Используя условие (2.23), получим уравнение (2.25). Такого типа модели первоначально использовались для определения формы оболочек рассматриваемого класса [1].



Фиг. 3

И, наконец, завершая анализ равнонапряженной оболочки, армированной вдоль меридианов, получим для нее формулу типа (1.1). Пусть при некотором давлении p в волокнах имеют место напряжения σ_1 . Воспользуемся принципом возможных перемещений и придадим волокнам виртуальное удлинение $\delta \epsilon_1$. Тогда [10]:

$$p \delta V = \sigma_1 v \delta \epsilon_1 \quad (2.28)$$

Здесь $\delta V = V_d - V$ – виртуальное изменение объема оболочки, определяемого вторым выражением (2.27). Для того, чтобы найти V_d , в этом выражении необходимо умножить, в силу равенств (2.17), параметры R , z , и r на $(1 + \delta \epsilon_1)$. Величина $v = m/\rho$ в правой части соотношения (2.28) является объемом материала оболочки, который выражается через ее массу m и плотность материала ρ . Осуществляя линеаризацию левой части соотношения (2.28) по $\delta \epsilon_1$, получим формулу типа (1.1), в которой $k = 3$. Заметим, что для изотропной оболочки в этой формуле $k = 3/2$, т.е. равнонапряженная изотропная оболочка вдвое превосходит по весовой эффективности аналогичную оболочку из анизотропного материала, что совершенно естественно, так как в изотропном материале реализуется плоское напряженное состояние, а в анизотропном – одноосное. Высокая весовая эффективность композитных оболочек рассматриваемого класса связана с тем, что по удельной прочности однонаправленно армированные композиты более чем вдвое превосходят металлические сплавы.

Вернемся теперь к общему случаю оболочки армированной по геодезическим линиям поверхности так, что $\varphi > 0$. Форма меридиана равнонапряженной оболочки определяется уравнением (2.21). Предположим, что полюсное отверстие оболочки, показанной на фиг. 1, закрыто. Тогда в соответствии с формулами (2.1) и (2.6) имеем $\lambda = 0$. Принимая в уравнении (2.21) $\lambda = 0$ и выполняя условие (2.23), получим следующее выражение для напряжений, обобщающее равенство (2.24):

$$\sigma_1 = \frac{pR^3}{2h_R(R^2 - r_0^2)} \quad (2.29)$$

В результате подстановки σ_1 и интегрирования уравнение (2.21) даёт

$$\bar{z} = -\int_{\bar{r}}^1 \frac{\bar{r}^3 \sqrt{1 - \bar{r}_0^2}}{\sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2 - \bar{r}^6(1 - \bar{r}_0^2)}} d\bar{r} \quad (2.30)$$

Здесь, как и ранее, $\bar{z} = z/R$, $\bar{r} = r/R$ и $\bar{r}_0 = r_0/R$, а постоянная интегрирования определена из условия $\bar{z}(\bar{r} = 1) = 0$.

Интеграл (2.30) может быть приведен к эллиптическим интегралам [2], фигурирующим в решении (2.26) для случая $\varphi = 0$, однако проще построить образующую рассматриваемой оболочки, используя численное интегрирование. Эта процедура затрудняется тем, что интеграл (2.30) является несобственным – вследствие условия (2.23) подинтегральное выражение обращается в бесконечность при $\bar{r} = 1$. Для того, чтобы оценить интеграл в окрестности $\bar{r} = 1$, сделаем замену $\bar{r} = 1 - x$, где x – малая величина. Осуществляя традиционную оценку интеграла (2.30) для малых x , окончательно получим

$$\bar{z} = \sqrt{\frac{2(1 - \bar{r}_0^2)}{2 - 3\bar{r}_0^2}}(1 - \bar{r}) \quad (2.31)$$

Это равенство можно использовать для определения $\bar{z}(\bar{r})$ при $0.99 \leq \bar{r} \leq 1$, а для $\bar{r} \leq 0.99$ находить значения интеграла (2.30) численными методами.

Для оболочки с параметрами $\varphi_R = 15^\circ$, $\bar{r}_0 = 0.259$ результат численного интегрирования показан на фиг. 3 сплошной линией 2. Эта кривая имеет две характерные точки, координаты которых можно найти, исследуя уравнение (2.30). В точке A с координатой

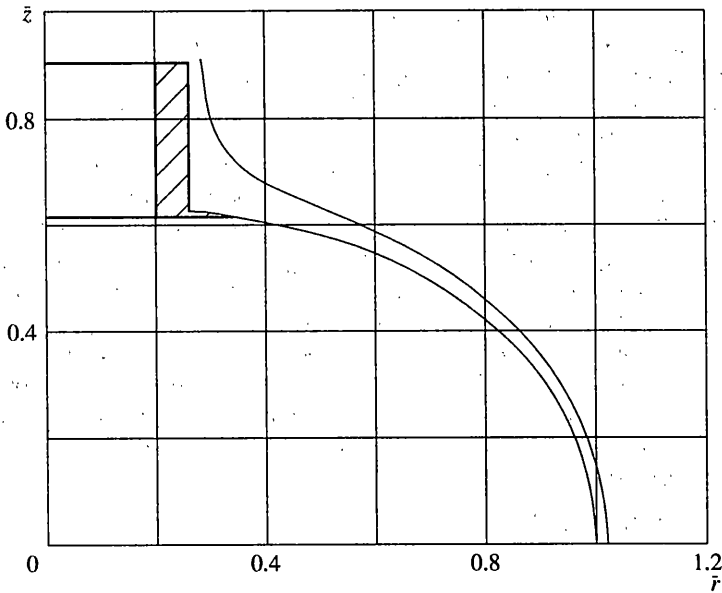
$$r_A = \sqrt{3/2}r_0 = 1.225r_0 \quad (2.32)$$

кривизна меридиана изменяет знак, т.е. $z''(r_A) = 0$, а в точке B с безразмерной координатой

$$r_B = \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{\bar{r}_0^2}{4} - \frac{1}{1 - \bar{r}_0^2}}{2}} \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

касательная к меридиану параллельна оси вращения. Для рассматриваемой в качестве примера оболочки ($\bar{r}_0 = 0.259$) равенство (2.33) даёт $\bar{r}_B = 0.26$, т.е. $\bar{r}_B > \bar{r}_0$. Такое поведение кривой объясняется тем, что построенная образующая соответствует оболочке с закрытым полюсным отверстием. При этом по краю отверстия с радиусом r_0 должны действовать осевые силы q , определяемые первой формулой (2.1). Однако согласно равенству (2.19) $N_m(r = r_0) = 0$, т.е. контур отверстия с радиусом r_0 должен быть свободен от осевых сил. В результате меридиан оболочки не достигает параллели с радиусом r_0 и изменяет кривизну, обеспечивая нагружение оболочки осевыми силами.

В реальных оболочках в окрестностях полюсного отверстия устанавливается, как уже отмечалось, фланец, показанный на фиг. 1, 2. Радиус фланца r_1 (фиг. 2) обычно выбирается из условия $r_1 \geq r_A$, где r_A определяется равенством (2.32). Таким образом, уравнения (2.30) и (2.31) определяют образующую рассматриваемой оболочки в интервале $r_1 \leq r \leq R$. При $r_0 \leq r \leq r_1$ композитная оболочка соприкасается с фланцем. Предполагая, что ширина полки фланца мала, будем считать, что взаимодействие фланца и оболочки осуществляется посредством равномерного давления p_1 (фиг. 2). Считая также, что полюсное отверстие закрыто и рассматривая равновесие фланца, нагруженного давлениями p и p_1 , получим $p_1 = p r_1^2 / (r_1^2 - r_0^2)$.



Фиг. 4

Таким образом, на участке $r_0 \leq r \leq r_1$ оболочка нагружена давлением p_1 , а контур полюсного отверстия $r = r_0$ свободен от осевых сил. Образующая такой оболочки определяется уравнением (2.21), в котором следует заменить z на z_1 , p на p_1 и принять в соответствии с равенствами (2.1) и (2.6) $\lambda = r_0^2$. В результате получим

$$\frac{1}{z_1'} \sqrt{1 + (z_1')^2} = -\frac{2\sigma_1^{(1)} h_R}{\rho \bar{r}_1^2 r} (r_1^2 - r_0^2) \sqrt{\frac{R^2 - r_0^2}{r^2 - r_0^2}} \quad (2.34)$$

Потребуем, чтобы меридиан был гладкой кривой, т.е. примем $z'(r_1) = z_1'(r_1)$, где z' и z_1' определяются уравнениями (2.21) и (2.34). В результате получим $\sigma_1^{(1)} = \sigma_1$, где σ_1 определяется равенством (2.29). Таким образом, обе части оболочки являются равнонапряженными.

После подстановки $\sigma_1^{(1)}$ с помощью формулы (2.29) и интегрирования уравнение (2.34) позволяет найти форму образующей оболочки на участке $r_0 \leq r \leq r_1$ (фиг. 2), т.е.

$$\bar{z}_1 = -\int_{\bar{r}}^{\bar{r}_1} \frac{\bar{r}_1^2 \sqrt{(\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2)(1 - \bar{r}_0^2)} \bar{r} d\bar{r}}{\bar{r}_1 \sqrt{(\bar{r}_1^2 - \bar{r}_0^2)^2 - \bar{r}_1^4 \bar{r}^2 (\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2)(1 - \bar{r}_0^2)}} + C, \quad \bar{r}_1 = r_1 / R \quad (2.35)$$

Постоянная C находится из условия непрерывности образующей в точке $\bar{r} = \bar{r}_1$, т.е. $\bar{z}_1(\bar{r}_1) = \bar{z}_1(r_1)$. Участок образующей, рассмотренной выше в качестве примера оболочки, построенный с помощью уравнения (2.35), показан на фиг. 3 штриховой линией, начинающейся от точки A . При этом принято $r_1 = r_A$. Образующая этой оболочки и толщина стенки, найденная по формулам (2.10), (2.29) для $p = 60$ МПа, $\sigma_1 = 1500$ МПа, представлена на фиг. 4. Сравнивая фиг. 4 с фиг. 2, можно заключить, что в окрестности полюсного отверстия геометрия реальной оболочки значительно отличается от теоретически предсказанной.

3. Оболочки, образованные системой лент конечной ширины. Рассмотрим оболочку, образованную из армированных лент с шириной t (фиг. 2). Поскольку в равнонапряженной оболочке волокна направлены по геодезическим линиям поверхности, предположим, что лента состоит из системы параллельных волокон, каждое из которых совпадает с геодезической линией. Так как в строгом смысле такое предположение справедливо только для развертывающейся поверхности, для анализа геометрии рассматриваемой оболочки заменим ее поверхность системой соприкасающихся конических поверхностей, таких, что при некотором $r = \text{const}$ исходная оболочка и конус имеют одну и ту же величину производной $z'(r)$. Участок развертки такой конической поверхности показан в верхней части фиг. 5. Параллель AB с радиусом r принадлежит одновременно рассматриваемой поверхности вращения и конической поверхности, на которой она расположена на расстоянии ρ от вершины O . Элемент площади поперечного сечения оболочки на участке AB , образуемый одной лентой, равен $f = \rho\delta$, где δ , как и ранее, толщина ленты, а $\beta = \varphi_t - \varphi$. Для определения толщины оболочки достаточно умножить δ на число лент n , проходящих через поперечное сечение, и разделить на $2\pi r$, т.е.

$$h(r) = n\delta\sqrt{1+s(r)}(\varphi_t - \varphi)/2\pi \quad (3.1)$$

$$s(r) = [z'(r)]^2 \quad (3.2)$$

Поскольку волокна ленты, проходящие через точки A и B на фиг. 5, считаются направленными вдоль геодезических линий соприкасающейся конической поверхности, с учетом равенств (2.14) получим

$$\varphi = \arcsin \frac{r_0}{r}, \quad \varphi_t = \arcsin \frac{1}{r} \left(r_0 + \frac{1}{\sqrt{1+s(r)}} \right) \quad (3.3)$$

Здесь r_0 — радиус полюсного отверстия, контура которого касается волокно, проходящее через точку A (фиг. 5), t — ширина ленты.

На экваторе оболочки ($r = R$), где $s \rightarrow \infty$ равенство (3.1) имеет неопределенность типа $\infty \cdot 0$. Раскрывая ее, получим формулу (2.9), с помощью которой величину $n\delta$ можно выразить через толщину оболочки на экваторе h_R . Окончательно найдем

$$h(r) = h_R R^2 \cos \varphi_R \sqrt{1+s(r)} (\varphi_t - \varphi) / t \quad (3.4)$$

Рассмотрим геометрию оболочки в окрестности полюсного отверстия. Развертка соответствующей соприкасающейся конической поверхности показана в нижней части фиг. 5. Сравнивая эту часть фигуры с ее верхней частью, можно заключить, что в окрестности полюсного отверстия $\varphi_t = \pi/2$. В результате, используя выражение (3.4), получим

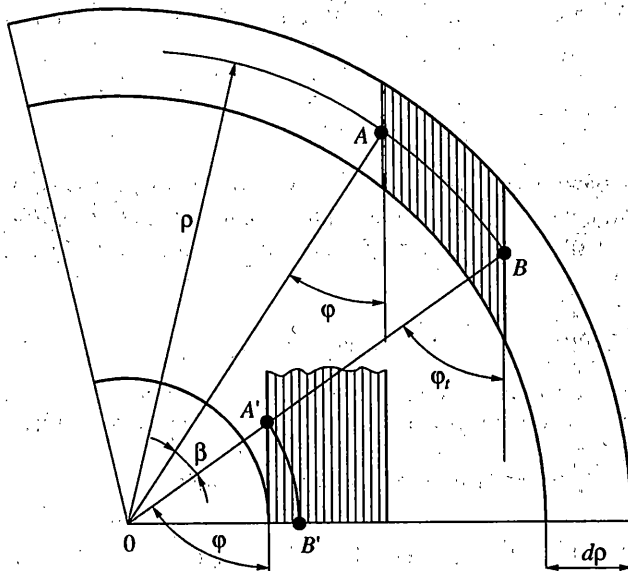
$$h(r) = h_R R^2 \cos \varphi_R \sqrt{1+s(r)} (\pi/2 - \varphi) / t \quad (3.5)$$

Равенство (3.5) справедливо на расстояниях от полюсного отверстия, измеряемых вдоль меридиана и не превышающих ширину ленты t , т.е. при $r_0 \leq r \leq r_t$, где r_t определяется из уравнения

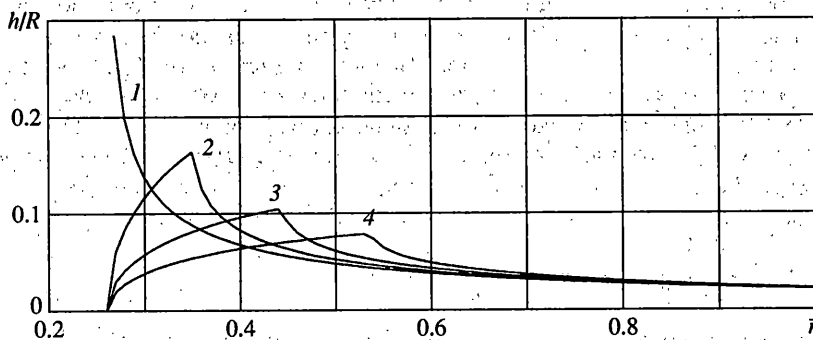
$$t = \int_{r_0}^{r_t} \sqrt{1+(z'_0)^2} dr$$

Это уравнение можно упростить, если при $r_0 \leq r \leq r_t$ аппроксимировать поверхность оболочки конической поверхностью. Тогда

$$r_t = r_0 + \frac{t}{\sqrt{1+(z'_0)^2}}$$



Фиг. 5



Фиг. 6

где $z'_0 = z'(r = r_0)$. Заметим, что для рассматриваемых оболочек величина z'_0 близка к нулю и ее квадратом можно пренебречь по сравнению с единицей. В результате получим следующее простое приближенное равенство:

$$r_t = r_0 + t \quad (3.6)$$

Таким образом, толщина оболочки определяется выражением (3.4) при $r_t \leq r \leq R$ и формулой (3.5) при $r_0 \leq r \leq r_t$. На фиг. 6 представлены законы изменения толщины по радиусу оболочки, рассмотренной выше в качестве примера, соответствующие различной ширине ленты. Кривая 1 построена с помощью равенства (2.10), а кривые 2 ($t/R = 0.1$), 3 ($t/R = 0.2$), 4 ($t/R = 0.3$) – с помощью равенств (3.4) и (3.5).

Построим теперь образующую равнонапряженной оболочки, намотанной лентой конечной ширины. Предварительно заметим, что выражения (3.4) и (3.5) для толщины такой оболочки можно получить с помощью равенства (2.8), если использовать его не для всей ленты, а для ее бесконечно узкой полосы шириной dx_2 (фиг. 2). Тогда имеем

$$dh = \frac{n \delta dx_2}{2\pi r \cos \varphi} \quad (3.7)$$

Соотношения (3.3) позволяют записать следующий закон изменения φ по ширине ленты

$$\varphi(x_2) = \arcsin \frac{1}{r} \left(r_0 + \frac{x_2}{\sqrt{1+s(r)}} \right) \quad (3.8)$$

Подставляя это выражение в равенство (3.7) и интегрируя его от 0 до t , получим формулу (3.4) для $h(r)$. Формула (3.5), как и ранее, следует из (3.4) при $\varphi_t = \pi/2$.

Учитывая равенства (3.7) и (3.8), статические соотношения (2.7) можно обобщить следующим образом

$$N_m = \sigma_1 \int_0^t \cos^2 \varphi(x_2) dh, \quad N_s = \sigma_1 \int_0^t \sin^2 \varphi(x_2) dh \quad (3.9)$$

Предполагается, что оболочка является равнонапряженной. Подставляя равенства (3.7) и (3.8) в (3.9), интегрируя и учитывая соотношения (3.3), получим

$$N_m = \sigma_1 \frac{h_R R}{4t} \cos \varphi_R \sqrt{1+s(r)} (2\varphi_t - 2\varphi + \sin 2\varphi_t - \sin 2\varphi)$$

$$N_s = \sigma_1 \frac{h_R R}{4t} \cos \varphi_R \sqrt{1+s(r)} (2\varphi_t - 2\varphi - \sin 2\varphi_t + \sin 2\varphi) \quad (3.10)$$

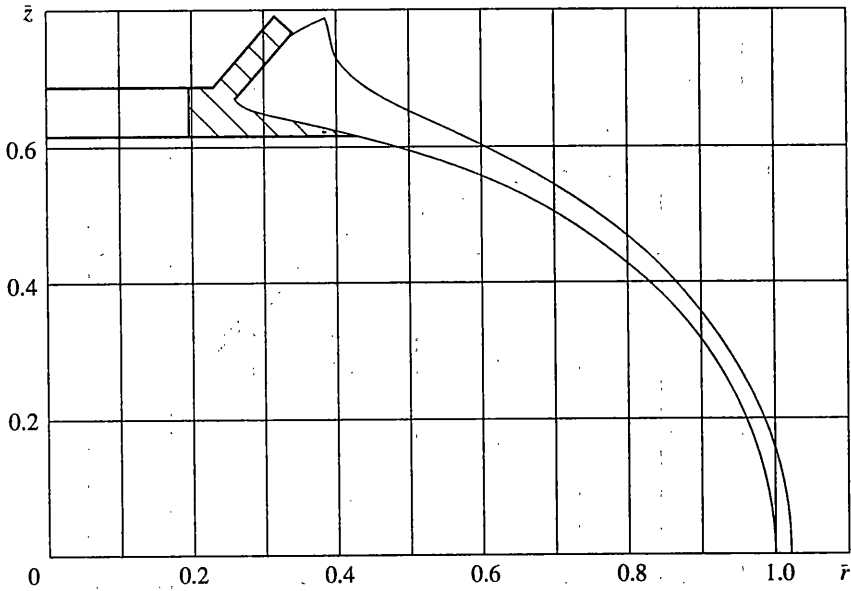
Эти соотношения, так же как и формула (3.4) для толщины оболочки, которой они соответствуют, справедливы при $R \geq r \geq r_1$ (фиг. 2). Для того чтобы построить образующую равнонапряженной оболочки на этом участке, воспользуемся, как и ранее, уравнением равновесия (2.5). Полагая согласно равенствам (2.1) и (2.6) $\lambda = 0$ (полюсное отверстие, как и ранее, считается закрытым) и подставляя N_m с помощью равенства (3.10) придем к уравнению, обобщающему уравнение (2.21). Используя далее условие (2.23), получим формулу (2.29) для σ_1 . Окончательное уравнение, определяющее форму меридиана оболочки при $R \geq r \geq r_1$, можно записать в следующем виде

$$z'(r)(2\varphi_t - 2\varphi + \sin 2\varphi_t - \sin 2\varphi) + \frac{4t \cos \varphi_R}{R^2} r = 0 \quad (3.11)$$

Здесь φ и φ_t определяются соотношениями (3.3), причем φ_t включает функцию $s(r)$, зависящую от $z'(r)$ согласно равенству (3.2). Таким образом, уравнение (3.11) содержит $z'(r)$ в неявной форме и может быть решено только численными методами. В связи с тем, что при выводе уравнения (3.11) принимались некоторые гипотезы, позволившие, в частности, получить соотношения (3.3) для углов армирования, необходимо проверить выполнение исходного дифференциального уравнения равновесия (2.2), из которого в результате преобразования с помощью уравнения (2.3) было получено уравнение (2.5) эквивалентное (3.11). Подстановка выражений (3.10) в уравнение (2.2) позволяет заключить, что оно удовлетворяется тождественно для соприкасающейся конической оболочки.

Рассмотрим участок оболочки, соприкасающийся с фланцем и соответствующий интервалу $r_0 \leq r \leq r_1$ (фиг. 2). Прежде всего, необходимо определить r_1 . Для этого, как и ранее, используем $r_1 \geq r_A$, где r_A — радиус точки перегиба меридиана $z(r)$. Дифференцируя уравнение (3.11) и накладывая условие $z''(r_A) = 0$, имеем $\varphi_t - \varphi + 3(\sin 2\varphi_t - \sin 2\varphi)/2 = 0$. Отсюда можно получить следующее приближенное выражение, обобщающее равенство (2.32):

$$r_A = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(r_0 + \frac{t}{2\sqrt{1+[z'(r_A)]^2}} \right) \quad (3.12)$$



Фиг. 7

Заметим, что при выборе радиуса фланца r_1 часто руководствуются конструктивными соображениями и условиями прочности и жесткости самого фланца. Поэтому в определении точного значения r_A нет необходимости. В связи с этим в равенстве (3.12) можно пренебречь малым членом, содержащим z' , и написать его в виде

$$r_A = \sqrt{3/2}(r_0 + t/2) \quad (3.13)$$

Как правило, ширина ленты t меньше ширины полки фланца ($r_1 - r_0$) (фиг. 2). Тогда образующая оболочки на участке, где она соприкасается с фланцем, состоит из двух частей, соответствующих интервалам $r_1 \geq r \geq r_t$ и $r_t \geq r \geq r_0$, где r_0 и r_t определяются равенствами (2.14) и (3.6).

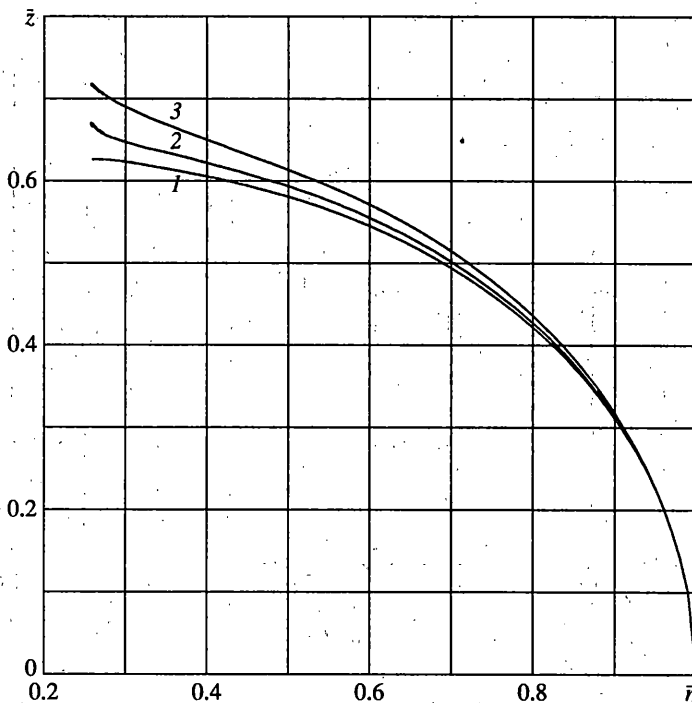
Рассмотрим первый участок, для которого так же, как и при выводе равенства (2.34), в уравнении (2.5) следует принять $\lambda = r_0^2$, $p = p_1$, $z = z_1$ и подставить N_m с помощью первого равенства (3.10). Удовлетворяя условию гладкости меридиана, т.е. полагая $z'_1(r_1) = z'(r_1)$, получим формулу (2.29) для напряжения в ленте и следующее уравнение для образующей оболочки:

$$z'_1(r)(2\varphi_t - 2\varphi + \sin 2\varphi_t - \sin 2\varphi) + \frac{4tr_1^2 \cos \varphi_R (r^2 - r_0^2)}{R^2(r_1^2 - r_0^2)} \cdot \frac{1}{r} = 0 \quad (3.14)$$

При этом в функции $s(r)$ (3.2), входящей в выражение (3.3) для φ_r , следует заменить $z'(r)$ на $z'_1(r)$. Уравнение (3.14) определяет образующую оболочки при $r_1 \geq r \geq r_t$. При $r_t \geq r \geq r_0$, как следует из формулы (3.5), $\varphi(r)$ определяется первым равенством (3.3), а $\varphi_t = \pi/2$. В результате соотношения аналогичные (3.10) принимают для рассматриваемого участка оболочки следующий вид:

$$N_m = \sigma_1 \frac{h_R R}{4t} \cos \varphi_R \sqrt{1 + s(r)} (\pi - 2\varphi - \sin 2\varphi)$$

$$N_s = \sigma_1 \frac{h_R R}{4t} \cos \varphi_R \sqrt{1 + s(r)} (\pi - 2\varphi + \sin 2\varphi), \quad s(r) = [z'_2(r)]^2 \quad (3.15)$$



Фиг. 8

где $z_2(r)$ – уравнение образующей на рассматриваемом участке оболочки. Для построения образующей достаточно повторить вывод уравнения (3.14), используя равенства (3.15) вместо (3.10) и условие гладкости меридиана $z'_2(r_i) = z'_1(r_i)$. Окончательно получим формулу (2.29) для напряжений в ленте и следующее уравнение:

$$z'_2(r) = - \frac{4t r_1^2 \cos \varphi_R}{R^2 (r_1^2 - r_0^2)} \frac{(r^2 - r_0^2)}{r(\pi - 2\varphi - \sin 2\varphi)} \quad (3.16)$$

Таким образом, меридиан оболочки, образованный намоткой армированной ленты конечной ширины, определяется уравнениями (3.11) (при $R \geq r \geq r_1$), (3.14) (при $r_1 \geq r \geq r_i$) и (3.16) (при $r_i \geq r \geq r_0$). Напряжение в ленте во всех точках оболочки одинаково и следует из равенства (2.29).

Для рассматриваемой выше в качестве примера оболочки ($\bar{r}_0 = 0.259$) контуры внутренней и наружной поверхностей построенные согласно равенствам (3.4), (3.5) и (3.11), (3.14), (3.16) показаны на фиг. 7. Сравнивая полученную форму оболочки с формой, следующей из традиционного анализа (фиг. 4), можно заключить, что она в большей степени соответствует реальной конструкции (фиг. 2). На фиг. 8 показана зависимость контура оболочки от ширины наматываемой ленты t . Кривая 1 ($t/R \rightarrow 0$) соответствует намотке волокнами, кривые 2 ($t/R = 0.1$) и 3 ($t/R = 0.2$) – намотке лентой различной ширины.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00650а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kushnerick J.* Plastic Polaris planned // Aircraft and Missiles. 1961. № 2. P. 15–17.
2. *Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
3. *Бунаков В.А., Протасов В.Д.* Баллоны давления из композитов // Композиционные материалы. Справочник / Под общ. ред. В.В. Васильева и Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. С. 351–375.
4. *Криканов А.А.* Определение толщины композитной оболочки вращения, образованной методом намотки // Механика армированных пластиков. Рига: Изд. РПИ, 1983. С. 90–97.
5. *Криканов А.А.* Оптимальная форма оболочек вращения, изготовленных методом намотки, с учетом ширины ленты // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Т. 29. С. 235–242.
6. *Медведев А.А., Протасов В.Д.* Уточнение жесткостных и упругих характеристик днищ спиральной намотки в зоне полярных отверстий // Механика композитных материалов. № 3. 1990. С. 485–488.
7. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
8. *Геккелер И.В.* Статика упругого тела. Л.; М.: Гостехиздат, 1934. 287 с.
9. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1996. 366 с.
10. *Ривлин Р., Пипкин А.* Проектирование сосудов высокого давления минимального веса, усиленных нерастяжимыми нитями // Тр. Амер. о-ва. инж.-механиков. Прикл. механика. 1963. № 1. С. 123–129.

Москва

Поступила в редакцию
25.01.2001