МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2002

УДК 539.3

© 2002 г. **И.А. МИКЛАШЕВИЧ, А.В. ЧИГАРЕВ**

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРАЕКТОРИИ ТРЕЩИНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Проведен анализ устойчивости решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего траекторию распространения трещины в неоднородных средах. Показано, что типы критических точек, возникающих в системе, зависят от неоднородности среды как вдоль траектории трещины, так и в направлении перпендикулярном траектории. Исследуется возникновение стохастических режимов при распространении трещины. Установлены условия возникновения детерминированного хаоса в поведении траектории трещины.

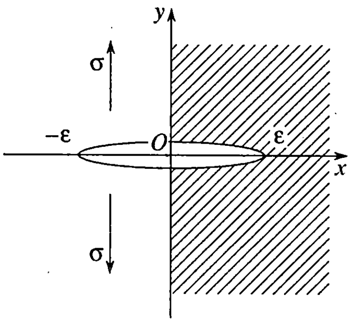
Макроскопическое распространение трещины имеет ряд особенностей, происхождение и природа которых не вполне ясны до настоящего времени. Эти особенности связаны с отклонением трещины, как реального физического объекта, от модели идеальной трещины, даваемой классической теорией упругости и пластичности (модели типа Баренблатта – Дагдейла). К таким особенностям следует отнести достаточно уверенно установленный фрактальный характер процесса разрушения [1, 2], эффекты перколяции [3, 4], стохастизацию траектории [5, 6]. Объяснение этих эффектов требует более глубокой разработки физических оснований процесса разрушения и распространения трещины. Кроме того, проблемы устойчивого распространения трещины представляют интерес в связи с необходимостью создания композиционных материалов с заданными эксплуатационными свойствами.

Как известно [7], в идеальном случае при простом одноосном растяжении вдоль оси y пластины из однородного упругого материала начальная трещина $-\varepsilon < x < \varepsilon$ будет распространяться вдоль оси x прямолинейно. Если нагружение сложное, то траектория будет зависеть от истории нагружения [8, 9]. При этом, в принципе можно, решая задачу последовательными малыми пересчетами, определить взаимовлияние напряженного состояния на траекторию трещины и наоборот. Эксплуатация многих изделий происходит в условиях достаточно стабильных граничных условий, однако траектория трещины при этом может быть криволинейной вследствие неоднородности, более того, непредсказуемой. Это не позволяет в детерминированной постановке решить вопрос о прогнозировании траектории трещины в композиционном материале.

Рассмотрим неограниченную пластину в плоскости XOY, которая состоит из двух жестко скрепленных полупластин: $x \leqslant 0$ – однородная изотропная среда, $x > 0$ – неоднородная изотропная среда. Пластина растягивается вдоль оси y, начальная трещина расположена вдоль оси x $(-\varepsilon < x < \varepsilon)$, $y = 0$ (фигура). Обозначим упругие модули однородной среды λ_0, μ_0, неоднородной $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$.

Траекторию трещины будем искать на основании вариационного принципа теории трещин в виде [7]:

$$\delta \int_{\varepsilon_A}^{\varepsilon_B} (2\gamma - P_1 u_1) ds = 0, \quad (2\gamma - P_1 u_1) = F(x, y, \dot{y})$$



где γ – плотность поверхностной энергии материала, $P_i = \sigma_{ij}n_j$ – компоненты тензора напряжений на площадках, положение которых совпадает с поверхностью трещины, n_i – направляющий косинус внешней нормали к поверхности трещины, u_i – смещение берегов трещины, σ_{ij} – тензор напряжений материала, ε_A, ε_B – начальная и конечная длина трещины, соответственно. Уравнение траектории трещины записывается в виде $y = y(x)$. Так как в данном случае рассматриваем простое нагружение, то кривизна траектории в неоднородной пластине будет зависеть только от распределения неоднородности. Уравнение Эйлера для сформулированной задачи имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}[\sqrt{1+y'^2}(2\gamma - P_i u_i)]\right) - \frac{\partial}{\partial y}[\sqrt{1+y'^2}(2\gamma - P_i u_i)] = 0 \qquad (1)$$

Из зависимости (1) можно получить уравнение для траектории $y(x)$ в виде

$$\frac{y''}{A}B + y'y''\left(\frac{\partial}{\partial y'}B - \frac{\partial}{\partial y}B\right) + y'\frac{\partial}{\partial x}B + y'^2 B +$$
$$+A\left(-\frac{\partial}{\partial y}B + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}B + y'\frac{\partial^2}{\partial y^2}B + y''\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y}B\right) = 0 \qquad (2)$$

$$A = 1 + y'^2, \quad B = 2\gamma - P_i u_i$$

Если полагать функционал $F(x, y)$ и траекторию трещины достаточно гладкой (без учета фрактального характера распространения трещины), то можно выбрать шаг разбиения для расчета траектории достаточно малым. Тогда отклонения траектории трещины на следующем шаге от направления распространения на предыдущем будут малыми, $y' \ll 1$. В общем случае величина γ может зависеть от упругих свойств среды, но из-за выбранной малости шагов разбиения в первом приближении можно принять $\gamma \approx \mathrm{const}$. Тогда уравнение (2) сводится [10, 11] к существенно нелинейному уравнению в виде

$$y'' - y'f_1(x, y)(1 + y'^2) + f_2(x, y)(1 + y'^2)^2 = 0 \qquad (3)$$

$$f_1(x, y) = \frac{\partial \ln Q(x, y)}{\partial x}, \quad f_2(x, y) = \frac{\partial \ln Q(x, y)}{\partial y}, \quad Q = (\sigma_{ij} n_i u_j)^{-1}, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

В зависимости от конкретного вида неоднородности решения уравнения допускают, в том числе, существование режимов стохастизации [5, 6]. Исследуем устойчивость решений уравнения (3).

Поскольку в данной задаче будем интересоваться реализацией, а не процессом, то временную зависимость не рассматриваем. Обозначим $z = y'$, тогда (3) перепишется в виде системы уравнений:

$$y' = z, \quad z' = zf_1(1 + z^2) - f_2(1 + z^2)^2 \qquad (4)$$

В общем виде второе уравнение системы (4) есть уравнение с разделяющимися переменными, но учет сложной функциональной зависимости f_1, f_2 значительно усложняет ситуацию. Орбиты уравнения (4) в фазовой плоскости даются выражением

$$\frac{dz}{dy} = \frac{zf_1(1 + z_2) - f_2(1 + z^2)^2}{z} = f_1(1 + z^2) - f_2\frac{(1 + z^2)^2}{z} \qquad (5)$$

Решение уравнения (5) существенно зависит от вида неоднородности среды. Эта зависимость существенна, так как напряженно-деформированное состояние есть функция физико-механических характеристик среды, в которой распространяется трещина, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(s_{ijkl})$. Если считать, что свойства среды гладко изменяются поперек траектории распространения трещины, то при анализе можно пренебречь членами порядка выше второго. В этом случае имеем

$$\frac{dz}{dy} = f_1(1+z^2) - f_2\left(\frac{1}{z}+4+6z\right) \tag{6}$$

Прямое аналитическое интегрирование уравнения (6) не приводит к обозримым результатам. Однако соответствующим подбором неоднородности (параметры f_1, f_2), можно регулировать тип критических точек в фазовой плоскости. С точки зрения технологии, более логичным представляется регулировка параметра f_2 (неоднородности вдоль оси Y). Так, при конструировании композиционного материала таким образом, что

$$f_2 = z^2/(1+4z+6z^2) \tag{7}$$

имеем положительный аттрактор, критической точкой является $z = 0$, при условии $f_1 = 0$.

Строго говоря, заключение о возможности линейного анализа критических точек нелинейной системы (4) требует дополнительных исследований. Так, например, для выполнения условия существования стабильных и нестабильных многообразий необходимо [12] удовлетворение дополнительных условий

$$\lim_{\|z\to 0\|} \frac{\| f_2(1/z+4+6z)+f_2 \|}{\| z \|} = 0$$

что налагает требование $f_2 = o(z^2)$, которому условие (7) не удовлетворяет. В этом случае можем положить

$$f_2 = z^{\xi}/(1+4z+6z^2), \quad \xi = 2-\zeta, \quad \lim_{x\to\infty}\zeta = 0$$

при дополнительном условии $f_2 = o(z)$.

Проведенный анализ показывает, что при распространении трещины в неоднородных материалах на характер траектории трещины влияет закон изменения свойств материала вдоль и поперек траектории распространения трещины. Это принципиально позволяет в значительной степени регулировать характеристики траектории путем создания композитов заданной детерминированной структуры.

Рассмотрим условия возникновения стохастических режимов при распространении трещины. Компоненты вектора перемещений $u_i(x, y(x))$ в уравнении (3) разложим в ряд Тейлора по y, и ограничимся линейным по y членом. Выражая коэффициент при линейном члене, $\partial u_i/\partial y$ как упругие деформации через напряжения, получим

$$N = \sigma_{ij}n_iu_j = \sigma_{12}n_1s_{22kl}\sigma_{kl}\tau_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_{22}n_2s_{22kl}\sigma_{kl}\tau_2 + \tfrac{1}{2}\sigma_{11}n_1s_{12ik}\sigma_{kl}\tau_2 + \sigma_{21}n_2s_{12ik}\sigma_{kl}\tau_2 \tag{8}$$

где τ – единичный касательный вектор, s_{ijkl} – тензор модулей упругости. Полагая, что осуществляется и поддерживается такое напряженно-деформированное состояние, что только $\sigma_{22} \neq 0$, (3) преобразуется к виду

$$N = \frac{1}{4}\sigma_{22}^2 s_{2222}\frac{2\,\mathrm{tg}\,\gamma}{1+\mathrm{tg}^2\,\gamma}$$

где γ – угол касательной к трещине с осью OX. Выразим f_1, f_2 через N:

$$f_1 = \frac{\partial N\sqrt{1+y'^2}}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial N\sqrt{1+y'^2}}{\partial y} \tag{9}$$

В зависимости от вида функции $s_{2222}(x, y)$ будем иметь различные варианты распространения трещины. Рассмотрим модель композита, для которого

$$f^0_{2,y} = -\omega^2, \quad f^0_{2,y^2} \equiv 0, \quad f^0_{2,y^3} = -\alpha\omega^2, \quad f_1 = 0 \tag{10}$$

Это соответствует представлению $\ln Q(x, y)$ в виде

$$\ln Q(x,y) = \ln Q(y) + \nu(x,y), \quad \ln Q(y) = -\omega^2 y^2 - \alpha\omega^2 y^4 \tag{11}$$

При $f_1 = 0$ отсутствует непрерывное изменение неоднородности в направлении нормали к линии распространения трещины. Будем полагать, что вдоль оси OX свойства среды кусочно-постоянные (распространение трещины перпендикулярно границе слоев), тогда

$$\nu(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(x - nX), \quad f_1 = \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX), \quad X = \frac{2\pi}{\Omega} \tag{12}$$

где Θ – функция Хевисайда. Полагая, что $\Omega \ll \omega$, $\varepsilon \ll 1$, получаем, что между точками $x = nX$ ($n = -\infty \ldots \infty$) отклонение трещины y от оси x удовлетворяет уравнению типа Дуффинга [3] $\ddot{y} + \omega^2(1 + \alpha y^2)y = 0$.

Во всех точках оси x уравнение Дуффинга имеет вид

$$\ddot{y}_1 + \omega^2(1 + \alpha y_1^2)y_1 = \varepsilon\omega\Sigma\delta(x - kX) \tag{13}$$

С точностью до членов порядка α решение уравнения (13) запишем в виде [14]:

$$y = A\cos[(\omega + \Delta\omega)x + \varphi], \quad \Delta\omega = \tfrac{3}{8}\alpha A^2\omega \tag{14}$$

Подставляя решение (14) в уравнение (13), получаем для A и φ уравнения, которые запишем в конечных разностях в виде $\varphi_{n+1} = \{\varphi_n + K_n \sin 2\varphi_n\}$, $A_{n+1} = A_n(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 2\varphi_n)$, $K_n = \varepsilon\Delta\omega_n T = \tfrac{3}{8}\alpha A_n^2 \varepsilon\omega / \Omega$. Введем обычным образом корреляционную функцию R_m для φ_n:

$$R_m = \int_0^1 (\varphi_{n+m} - \langle\varphi_{n+m}\rangle)(\varphi_n - \langle\varphi_n\rangle)d\varphi_n \Bigg/ \int_0^1 (\varphi_n - \langle\varphi_n\rangle)^2 d\varphi_n \tag{15}$$

С помощью корреляционной функции R_m находится условие стохастизации траектории трещины

$$\lim_{m\to\infty} R_m = 0 \tag{16}$$

При $K \gg 1$ можно получить оценку

$$R_1 \approx 1 / K_1 \tag{17}$$

Следовательно, условие стохастизации траектории трещины сводится к условию расцепления фаз [13, 14], то есть фазы ведут себя хаотическим образом и для изучения поведения трещины необходимо переходить к вероятностному описанию. Условие (16) с учетом (17) запишем в виде

$$K_1 = \varepsilon\Delta\omega / \Omega \gg 1 \tag{18}$$

Оценка длины траектории, начиная с которой поведение трещины становится стохастическим, имеет вид

$$x_* = X / (2\ln K_1) = 1 / (2\Omega \ln K_1) \tag{19}$$

Для больших K вероятность попадания траектории в фазовой плоскости в область устойчивости мала, а в случае попадания время пребывания в ней фазовой точки уменьшается.

Таким образом, имеем: при $K < 1$ ($\varepsilon \ll 1$) распространение трещины устойчиво относительно $y = 0$, при $K \gg 1$ распространение стохастично, при $K \sim 1$ – переходная область.

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

Типы неустойчивости трещины зависят от закона изменения свойств материала как вдоль траектории распространения трещины, так и в поперечном направлении в малой окрестности трещины.

В поперечно слоистой среде с детерминированными параметрами слоев при определенных соотношениях между шириной слоев, их физико-механическими характеристиками, возможно возникновение трещины, траектории которых непредсказуемы.

Рассмотренная задача может служить примером синтеза слоистых сред, в которых граница является барьером на пути трещины, так как в рассмотренном примере на границе может нарушаться условие $y'^2 \ll 1$, трещина распространяется вдоль границы, а затем опять по слою. В работе [15] рассмотрена модель распространения трещины без учета возможности расслоения. Учет возможности расслоения позволяет показать, что трещина нормального отрыва при расщеплении слоев превращается в трещину поперечного сдвига, на распространение которой расходуется больше энергии, а следовательно, происходит торможение трещины.

Таким образом, стохастизация траектории трещины в слоистой среде ведет к невозможности прогнозирования ее распространения, а следовательно, невозможности на стадии проектирования и изготовления изделия принять меры к увеличению его трещиностойкости. С другой стороны, стохастизация трещины, допускающая ее распространение по расслоению, обеспечивает трещиностойкость изделия, поскольку вязкость разрушения сдвигом больше, чем разрушения отрывом. Прогнозирование траектории трещины в случае выполнения условия стохастизации необходимо проводить, используя вероятностные методы, например, на основе теории марковских процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Balankin A.S.* Physics of fracture and mechanics of self-affine cracks // Engn. Fract. Mech. 1997. V. 57. № 2/3. P. 135–203.
2. *Cherepanov G.P., Balankin A.S., Ivanova V.S.* Fractal Fracture Mechanics – a Review // Engng. Fract. Mech. 1995. V. 51. № 6. P. 997–1033.
3. *Соколов И.М.* Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // Успехи физ. наук. 1986. Т. 150. № 2. С. 221–255.
4. *Баланкин А.С.* Фрактальная механика деформируемых сред и топология разрушения твердых тел // Доклады РАН. 1992. Т. 322. № 5. С. 869–874.
5. *Miklashevich I.A., Chigarev A.V.* Stochastisation of crack growth direction in heterogenous media // 8th Intern. Conf. of Fracture. Ukraine 93. Kiev: 1993. P. 1. P. 227.
6. *Miklashevich I.A., Bialiatskaja L.N., Chigarev A.V.* Nonlinear effects at the crack propagation // Proc. of 9th Annu. Seminar NPCS'2000 "Nonlinear phenomena in complex systems: Fractals, Chaos, Phase Transitions, Self-Organization", Minsk: 2000. P. 206–214.
7. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
8. *Банинчук М.В.* Об одном вариационном принципе в теории трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 197–199.
9. *Krzysztof L. Molski.* Problemy modelowania rozwoju pęknesc międzyfazowysch // Zeszyty Naukowe politechniki białostockiej. 2000. Nauki technicznie. № 134. Mechanika. Z. 22. P. 143–159.
10. *Чигарев А.В., Миклашевич И.А.* Расчет траектории трещины в композиционном материале в линейном приближении // Докл. АН Беларуси. 1995. Т. 39. № 2. С. 114–116.

11. *Миклашевич И.А.* Траектория трещины в неоднородных средах при плоском нагружении // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 3. С. 408–418.
12. *Verhulst F.* Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Berlin: Springer Verlag, 1990. 277 p.
13. *Чигарев А.В., Чигарев Ю.В.* О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах // Акуст. ж. 1978. Т. 24. Вып. 5. С. 765–771.
14. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.
15. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Минск

Поступила в редакцию
25.05.2001