

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. И.О. ОСИПОВ

К КОМПЛЕКСНЫМ РЕШЕНИЯМ В ПОТЕНЦИАЛАХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

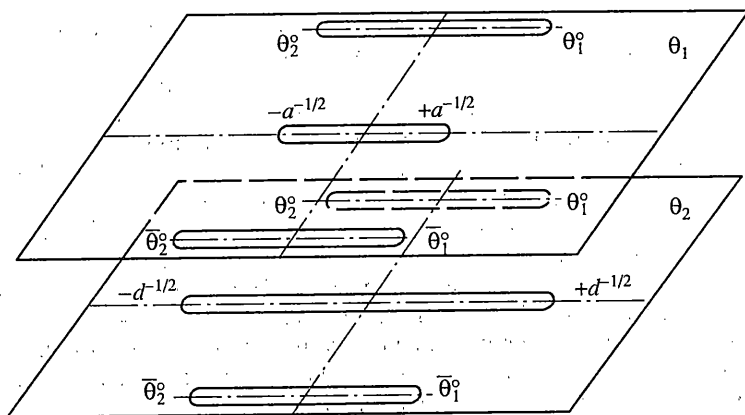
В работе [1] метод комплексных решений В.И. Смирнова и С.Л. Соболева [2–4] применен в потенциалах для решения динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред с тремя упругими постоянными, ограниченными условием $(a-d)a - c^2 > 0$. Так как в [1] допущена методологическая неточность, полученные решения имеют некоторую несогласованность с физическим смыслом задачи и с аналогичными решениями для изотропных сред. В данной статье продолжается исследование этой задачи тем же методом для анизотропных сред с четырьмя упругими постоянными без каких-либо ограничений на упругие постоянные. Предлагается новый подход к построению комплексных решений уравнений движения; получены и исследованы решения, выражающие плоские волны и волны от точечного источника типа мгновенного импульса, а также комплексные решения общего типа. Полученные решения отличаются от [1] и согласуются с физическим смыслом задачи и с аналогичными решениями для изотропных сред.

1. Введение. Волновые процессы в анизотропных средах сложны и многообразны, принципиально зависят от класса анизотропии, соотношений упругих постоянных и направлений распространения волн [5–11]. В отличие от изотропных сред в анизотропных средах распространяются квазипродольные и квазипоперечные волны, в которых векторы смещений частиц среды имеют составляющие как нормальные, так и касательные к фронтам волн.

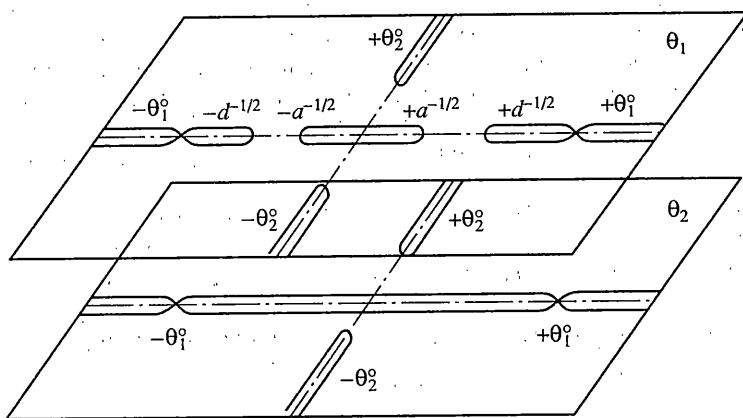
Произвольное векторное поле смещений можно представить в виде суммы безвихревого и соленоидального полей $\vec{u} = \text{grad}\phi + \text{rot}\psi$, где ϕ – скалярный потенциал, определяющий продольные волны, ψ – векторный потенциал, определяющий поперечные волны. Для изотропных сред потенциалы ϕ и ψ , получившие широкое применение в изучении волновых процессов, определяются волновыми уравнениями; уравнения движения анизотропных сред к волновым уравнениям не приводятся.

В работе [1], применяя метод комплексных решений В.И. Смирнова и С.Л. Соболева [2–4] для волновых уравнений, получены нестационарные решения уравнений движения в потенциалах для анизотропных сред с тремя упругими постоянными, ограниченными условием $(a-d)a - c^2 > 0$, хотя это и неоговаривается. В этом случае риманова поверхность однозначного определения решений имеет вид, изображенный на фиг. 1. Так как при построении решений в [1] допущена методологическая неточность, полученные решения не согласуются с физическим смыслом задачи и с аналогичными решениями для изотропных сред.

В данной статье продолжается изучение этой задачи тем же методом для анизотропных сред с четырьмя упругими постоянными без каких-либо ограничений на упругие постоянные реальных сред рассматриваемого класса анизотропии. Такие упругие постоянные для плоской задачи (плоскость xu) имеют ортогональные среды, ромбические кристаллы и некоторые кристаллы более высоких сингоний, а также мелко-слоистые среды с осью u , перпендикулярной к слоям.



Фиг. 1



Фиг. 2

При реализации метода комплексных решений для плоских волн приходим к двум условиям вида (3.4), устанавливающим зависимость между простейшими решениями уравнений движения в потенциалах. В работе [1] решения уравнений движения получены, используя первое условие (3.4).

В статье установлено, что решения уравнений движения, полученные как и в работе [1] на основе одного из двух условий (3.4), имеют некоторую несогласованность с физическим смыслом задачи и с аналогичными решениями для изотропных сред. Установлено, что в решениях уравнений движения, полученных как сумма таких решений, эти противоречия исчезают. Предлагается новый способ построения решений уравнений движения с помощью обобщенного условия (3.12), полученного из условий (3.4). Аналогичную картину имеем для однородных решений и комплексных решений общего типа.

Предложенным способом получены и исследованы простейшие решения, выражающие плоские волны; однородные решения, выражающие волны от точечного источника типа мгновенного импульса в начале координат, и комплексные решения общего типа. Решения однозначно определены на римановых поверхностях (фиг. 1, 2), вид которых зависит от соотношений упругих постоянных. Случай, когда решения однозначно определяются на римановой поверхности, изображенной на фиг. 2, в работе [1] не рассматривается.

Особый интерес для сейсмологии и сейсморазведки [11, 12] представляет изучение закономерностей распространения плоских волн, так как почти все сейсмологические

поля приближенно могут рассматриваться как локально плоские волны, а многие волновые процессы могут быть представлены в виде суперпозиции плоских волн.

Несмотря на некоторую сложность полученных решений, выражение их через обратные кажущиеся скорости волн в направлениях координатных осей и однозначное определение на римановой поверхности позволяют проводить аналитические исследования достаточно сложных волновых процессов в анизотропных средах.

Полученные в потенциалах решения выражают каждую из волн (квазипродольную и квазипоперечную) наложением чисто продольных и чисто поперечных волн, фронты которых совпадают, а скорости распространения спаренных волн равны скоростям квазипродольных и квазипоперечных волн. Такой подход может быть использован при изучении кинематических и динамических закономерностей волновых процессов, например при изучении соотношений плотностей потоков энергии безвихревых и соленоидальных возмущений квазипродольных и квазипоперечных волн, а также при решении сложных задач способом сложения. Эти положения справедливы и для стационарных (гармонических) упругих колебаний анизотропной среды.

Следует отметить, что в решении стационарных динамических задач теории упругости анизотропных тел, представляющих самостоятельный теоретический интерес и имеющих применение в теории фундаментов и машиностроения, методами потенциала и сингулярных интегральных уравнений значительные результаты получены грузинской школой [13, 14]. Исследования по теории потенциалов стационарных (гармонических) колебаний в анизотропных средах, аналогичные выполненным ниже, не проводились.

2. Уравнения движения и их решение в потенциалах. Рассмотрим анизотропную среду с четырьмя упругими постоянными. Оси x, y, z прямоугольной системы координат совпадают с осями упругой симметрии среды, колебания не зависят от координаты z .

Уравнения свободных упругих колебаний в смещениях имеют вид [10]:

$$au_{xx} + du_{yy} + cv_{xy} = u_n, \quad cu_{xy} + dv_{xx} + bv_{yy} = v_n \quad (2.1)$$

Отношения упругих постоянных к плотности среды $a = C_{11}/\rho, b = C_{22}/\rho, d = C_{66}/\rho, c = (C_{66} + C_{12})/\rho$ удовлетворяют необходимым и достаточным условиям положительной определенности формы упругой энергии

$$a > d, \quad b > d, \quad d > 0, \quad ab - (c - d)^2 > 0 \quad (2.2)$$

которые являются необходимыми и достаточными условиями распространения упругих колебаний в любых направлениях и выполняются для всех реальных сред рассматриваемого класса анизотропии.

Произвольное векторное поле может быть представлено в виде суммы безвихревого и соленоидального полей. Введя потенциалы безвихревого и соленоидального возмущений по формулам [1]:

$$u = \Phi_x + \Psi_y, \quad v = \Phi_y - \Psi_x \quad (2.3)$$

получим уравнения движения (2.1) в потенциалах

$$[a\Phi_{xx} + (d+c)\Phi_{yy} - \Phi_n]_x + [(a-c)\Psi_{xx} + d\Psi_{yy} - \Psi_n]_y = 0 \quad (2.4)$$

$$[(d+c)\Phi_{xx} + b\Phi_{yy} - \Phi_n]_y - [d\Psi_{xx} + (b-c)\Psi_{yy} - \Psi_n]_x = 0$$

Выражаем решение системы уравнений (2.4) функциями

$$\Phi = \Phi(\Omega), \quad \Psi = \Psi(\Omega) \quad (2.5)$$

где Ω – функция, определенная в неявном виде линейным уравнением относительно x, y, t :

$$\delta \equiv l(\Omega)t + m(\Omega)x + n(\Omega)y + K(\Omega) = 0 \quad (2.6)$$

Под Φ и Ψ понимаются непрерывные трижды дифференцируемые функции, если в них коэффициенты при переменных величинах вещественные. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области пространства x, y, t – комплексные величины, то Φ и Ψ в этой области – аналитические функции.

Выражая производные функций (2.5) по обычным правилам дифференцирования сложных и неявных функций $f(\Omega)$ [1]:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{\beta'} \partial t^{\gamma'}} = -\frac{1}{\delta'} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[\frac{1}{\delta'} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left(\frac{m^{\alpha'} n^{\beta'} l^{\gamma'}}{\delta'} f' \right) \right] \quad (2.7)$$

$$(\alpha' + \beta' + \gamma' = 3), \quad l'(\Omega) = \frac{dl}{d\Omega}, \quad \dots, \quad f'(\Omega) = \frac{df}{d\Omega}$$

$$\delta' = l'(\Omega)t + m'(\Omega)x + n'(\Omega)y + K'(\Omega) \neq 0$$

и подставляя их значения в уравнения (2.4), получим условия

$$m[am^2 + (d+c)n^2 - l^2]\Phi' + n[(a-c)m^2 + dn^2 - l^2]\Psi' = 0 \quad (2.8)$$

$$n[(d+c)m^2 + bn^2 - l^2]\Phi' - m[dm^2 + (b-c)n^2 - l^2]\Psi' = 0$$

устанавливающие зависимость между функциями (2.5). Если функции (2.5) удовлетворяют условиям (2.8), то они удовлетворяют и систему уравнений (2.4).

Система линейных уравнений (2.8) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю

$$\Delta = m^2[am^2 + (d+c)n^2 - l^2][dm^2 + (b-c)n^2 - l^2] + n^2[(a-c)m^2 + dn^2 - l^2][(d+c)m^2 + bn^2 - l^2] = 0 \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) устанавливает зависимость между функциями $l(\Omega)$, $m(\Omega)$, $n(\Omega)$, а также между производными $\Phi'(\Omega)$ и $\Psi'(\Omega)$ согласно условиям (2.8).

Следовательно, функции (2.5) выражают решение уравнений движения в потенциалах (2.4), если аргумент Ω с коэффициентами l, m, n , подчиненными уравнению (2.9), определен уравнением (2.6), а сами функции (2.5) удовлетворяют условиям (2.8). Решения уравнений движения (2.1) выражаются функциями (2.3).

Приняв в уравнениях (2.1), (2.4), (2.8) и (2.9) $b = a$, приходим к соответствующим выражениям для анизотропных сред с тремя упругими постоянными.

3. Плоские волны. Приняв в уравнении (2.6) значения $l(\Omega) = 1$; $m(\Omega) = -\theta$, $n(\Omega) = \lambda$ и $K(\Omega) = -\Omega$, получим простейшие решения уравнений движения (2.4).

В этом случае уравнение (2.9) принимает вид

$$\lambda^4 - \frac{(b+d) - (ab+d^2 - c^2)\theta^2}{bd} \lambda^2 + \frac{a}{b} \left(\frac{1}{a} - \theta^2 \right) \left(\frac{1}{d} - \theta^2 \right) = 0 \quad (3.1)$$

положительные корни которого такие:

$$\lambda_k = \{H + (-1)^k [H^2 - (a/b)(1/a - \theta^2)(1/d - \theta^2)]^{1/2}\}^{1/2} \quad (k=1,2) \quad (3.2)$$

$$H = [(b+d) - (ab+d^2 - c^2)\theta^2] / (2bd)$$

Введя функции $\Phi_k(\Omega_k)$ и $\Psi_k(\Omega_k)$, соответствующие корням λ_k , решения уравнений (2.4), представляющие собой плоские волны, выражаются функциями

$$\varphi_k = \Phi_k(\Omega_k), \quad \psi_k = \Psi_k(\Omega_k) \quad (3.3)$$

$$\Omega_k = t - \theta x + \lambda_k y \quad (k=1,2)$$

Условия (2.8) принимают вид

$$-\theta(p_k + c\lambda_k^2)\Phi'_k(\Omega_k) + \lambda_k(p_k - c\theta^2)\Psi'_k(\Omega_k) = 0 \quad (3.4)$$

$$\lambda_k(r_k + c\theta^2)\Phi'_k(\Omega_k) + \theta(r_k - c\lambda_k^2)\Psi'_k(\Omega_k) = 0$$

$$p_k = a\theta^2 + d\lambda_k^2 - 1, \quad r_k = d\theta^2 + b\lambda_k^2 - 1, \quad p_k r_k = c^2\theta^2\lambda_k^2$$

и устанавливают зависимость между функциями (3.3).

Так как согласно полученным ранее результатам [7] при условии

$$N = (a - d)b - c^2 > 0 \quad (3.5)$$

для упругих постоянных в решениях уравнений движения (2.1) корням λ_1 и λ_2 отвечают соответственно квазипродольные и квазипоперечные волны, то решения (3.3) при $k = 1$ выражают квазипродольные волны, при $k = 2$ – квазипоперечные. Следует отметить, что при решении задачи с помощью потенциалов безвихревого и соленоидального возмущений каждая из волн (квазипродольная и квазипоперечная) выражаются наложением продольных и поперечных волн, фронты которых совпадают, а скорости распространения спаренных волн равны скоростям квазипродольных и квазипоперечных волн. Решения уравнений движения (2.1) выражаются формулами

$$u_k = \Phi_{kx} + \Psi_{ky}, \quad v_k = \Phi_{ky} - \Psi_{kx} \quad (3.6)$$

Возникает вопрос, какие условия (3.4) необходимо использовать для построения решений. В работе [1] используется первое условие (3.4), что и привело к противоречию полученных решений с физическим смыслом задачи. В этом случае зависимость между функциями (3.3) выражается условием

$$\frac{\Phi_k(\Omega_k)}{\lambda_k(p_k - c\theta^2)} = \frac{\Psi_k(\Omega_k)}{\theta(p_k + c\lambda_k^2)} = f_k(\Omega_k) \quad (3.7)$$

решение (3.3) принимает вид

$$\Phi_k = \lambda_k(p_k - c\theta^2)f_k(\Omega_k), \quad \Psi_k = \theta(p_k + c\lambda_k^2)f_k(\Omega_k) \quad (3.8)$$

$$\Omega_k = t - \theta x + \lambda_k y$$

Учитывая (3.6), получим решение уравнений (2.1) в смещениях

$$u_k = c\theta\lambda_k(\theta^2 + \lambda_k^2)f'_k(\Omega_k), \quad v_k = p_k(\theta^2 + \lambda_k^2)f'_k(\Omega_k) \quad (3.9)$$

Аналогично второе условие (3.4) приводит к решениям уравнений движения в потенциалах

$$\Phi_k = -\theta(r_k - c\lambda_k^2)f_k(\Omega_k), \quad \Psi_k = \lambda_k(r_k + c\theta^2)f_k(\Omega_k) \quad (3.10)$$

и в смещениях

$$u_k = r_k(\theta^2 + \lambda_k^2)f'_k(\Omega_k), \quad v_k = c\theta\lambda_k(\theta^2 + \lambda_k^2)f'_k(\Omega_k) \quad (3.11)$$

Решения (3.9) и (3.11) с точностью постоянного множителя $(\theta^2 + \lambda_k^2) \neq 0$ совпадают с решениями (2.7) и (2.10) в [10], где установлено, что решения (2.7) и (2.10) уравнений движения (2.1), полученные по одному из двух условий (3.3), определяют в направлениях осей упругой симметрии распространение одного типа волн – квазипродольных или квазипоперечных, что противоречит физическому смыслу задачи и не согласуется с решениями волновых уравнений для изотропных сред. Установлено, что решения уравнений движения (2.1), полученные как сумма решений (2.7) и (2.10) в [10], определяют распространение квазипродольных и квазипоперечных волн в любых направлениях и согласуются с решениями волновых уравнений. Показано, что

такие решения можно получить непосредственно с помощью обобщенного условия (2.13), полученного из условий (2.3) и устанавливающего зависимость между функциями (2.1) в [10]. Из выше сказанного следует, что аналогичную картину имеем при решении уравнений движения в потенциалах (2.4).

Для построения решений (3.3) уравнений движения (2.4), определяющих распространение квазипродольных и квазипоперечных волн в любых направлениях должны использовать каждое из условий (3.4) для каждого типа волн. Чтобы выполнялось условие совместности для квазипродольных и квазипоперечных волн, составляем обобщенное условие, устанавливающее зависимости между функциями (3.3), просуммировав левые части условий (3.4):

$$[\lambda_k(r_k + c\theta^2) - \theta(p_k + c\lambda_k^2)]\Phi'_k(\Omega_k) + [\lambda_k(p_k - c\theta^2) + \theta(r_k - c\lambda_k^2)]\Psi'_k(\Omega_k) = 0 \quad (3.12)$$

Согласно условия (3.12) решение (3.3) уравнений движения в потенциалах (2.4) принимает вид

$$\Phi_k = -[\lambda_k(p_k - c\theta^2) + \theta(r_k - c\lambda_k^2)]f_k(\Omega_k) \quad (3.13)$$

$$\Psi_k = [\lambda_k(r_k + c\theta^2) - \theta(p_k + c\lambda_k^2)]f_k(\Omega_k)$$

$$\Omega_k = t - \theta x + \lambda_k y \quad (k = 1, 2)$$

где f_k – ветви произвольной непрерывной трижды дифференцируемой функции f , если коэффициенты при переменных величинах вещественные. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области пространства x, y, t – комплексные величины, то f в этой области – аналитическая функция. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что полученные решения (3.13) удовлетворяют каждое из условий (3.4).

Учитывая формулы (3.6) выражаем решение (3.13) в смещениях

$$u_k = (\theta^2 + \lambda_k^2)(r_k - c\theta\lambda_k)f'_k(\Omega_k) \quad (3.14)$$

$$v_k = -(\theta^2 + \lambda_k^2)(p_k - c\theta\lambda_k)f'_k(\Omega_k)$$

При $\theta = 0$ имеем значения

$$u_1 = 0, \quad v_1 = [(b-d)/bd]f'_1(t + b^{-1/2}y)$$

$$u_2 = [(b-d)/d^2]f'_2(t + d^{-1/2}y), \quad v_2 = 0$$

при $\theta = a^{-1/2}$ ($k = 1$) и $\theta = d^{-1/2}$ ($k = 2$) – значения

$$u_1 = -[(a-d)/ad]f'_1(t - a^{-1/2}x), \quad v_1 = 0$$

$$u_2 = 0, \quad v_2 = -[(a-d)/d^2]f'_2(t - d^{-1/2}x)$$

соответствующие физическому смыслу задачи.

Функции λ_1 и λ_2 , определяемые выражениями (3.2), представляют собой ветви алгебраической функции λ , однозначно определенной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных. Решения (3.13) однозначно определяются на этих поверхностях, плоские волны соответствуют точкам вещественных осей плоскостей поверхности.

Нормальные скорости волн (3.13) и углы, образованные нормальными к фронтам волн с осью y , выражаются формулами [7]:

$$b_k = (\theta^2 + \lambda_k^2)^{-1/2}, \quad \text{tg } \alpha_k = \theta / \lambda_k \quad (3.15)$$

При выполнении условия (3.5) внешние радикалы (3.2) имеют точки разветвления $\theta_1 = \pm a^{-1/2}$ при $k = 1$ и $\theta_2 = \pm d^{-1/2}$ при $k = 2$. Точки разветвления внутренних радикалов (θ_i) в зависимости от соотношений упругих постоянных [6] могут быть комплекс-

ными, мнимыми и вещественными. Риманова поверхность состоит из плоскостей θ_1 и θ_2 с разрезами $A = (-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $D = (-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$, склеенных крест-накрест вдоль разрезов, соединяющих точки разветвления θ_i° .

На фиг. 1 изображена риманова поверхность для случая, когда точки разветвления θ_i° комплексные попарно сопряженные. На берегах разрезов A плоскости θ_1 и D плоскости θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения.

Фиксируем функции λ_1 и λ_2 на плоскостях θ_1 и θ_2 римановой поверхности так, чтобы они были положительными при $\theta = i\beta$, где β — достаточно малая положительная величина. В этом случае функции λ_1 и λ_2 на верхних берегах разрезов A плоскости θ_1 и D плоскости θ_2 имеют положительные значения, на нижних берегах — отрицательные; функции (3.13) выражают вещественные плоские волны: при $k = 1$ квазипродольные, при $k = 2$ квазипоперечные, распространяющиеся во всех направлениях. На участках $(\pm a^{-1/2}, \pm\infty)$ и $(\pm d^{-1/2}, \pm\infty)$ плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 — мнимые, функции (3.13) выражают комплексные плоские волны.

Вообще говоря, уравнение (3.1) имеет четыре корня $\pm\lambda_1$ и $\pm\lambda_2$, риманова поверхность состоит из четырех плоскостей. Плоскости θ_3 и θ_4 имеют такой же вид и аналогичную склейку, как и плоскости θ_1 и θ_2 (фиг. 1); на противоположных берегах разрезов A плоскостей θ_1 и θ_3 и D плоскостей θ_2 и θ_4 функции $\pm\lambda_1$ и $\pm\lambda_2$ имеют одинаковые значения. Четырехлистная риманова поверхность состоит из комплексов плоскостей θ_1, θ_2 и θ_3, θ_4 , склеенных крест-накрест вдоль разрезов A плоскостей θ_1 и θ_3 и D плоскостей θ_2 и θ_4 . Комплексные решения общего типа, определенные на плоскостях θ_1 и θ_2 и на плоскостях θ_3 и θ_4 представляют собой сопряженные функции комплексных переменных относительно вещественных осей и могут быть выражены вещественными частями решений, определенных на плоскостях θ_1 и θ_2 двулистной римановой поверхности (фиг. 1).

Заметим, что аналогично для случая

$$N = (a-d)b - c^2 < 0 \quad (3.16)$$

комплексные решения общего типа определяются на двулистной римановой поверхности (фиг. 2).

Так как анизотропная среда симметрична относительно осей x и y , то достаточно изучить решения (3.13), определенные на верхних берегах разрезов A плоскости θ_1 и D плоскости θ_2 при положительных значениях θ .

На участках $A_0 = (0, a^{-1/2})$ и $D_0 = (0, d^{-1/2})$ верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 в соответствие с формулами (3.15) функции (3.13) выражают вещественные квазипродольные ($k = 1$) и квазипоперечные ($k = 2$) волны, распространяющиеся с непрерывно возрастающими углами α_1 и α_2 в интервалах

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2$$

и с непрерывно изменяющимися нормальными скоростями со значениями на границах

$$b_1(0) = b^{1/2}, \quad b_1(a^{-1/2}) = a^{1/2}, \quad b_2(0) = b_2(d^{-1/2}) = d^{1/2}$$

При выполнении условия (3.16) имеем иную картину [6]; внешний радикал функции λ_1 имеет четыре точки разветвления: $\theta_1 = \pm a^{-1/2}$ и $\theta_2 = \pm d^{-1/2}$, внешний радикал функции λ_2 не имеет точек разветвления. Внутренний радикал функций λ_1 и λ_2 из четырех точек разветвления имеет две вещественные: $\pm\theta_1^\circ$ и две мнимые: $\pm\theta_2^\circ$, причем $\theta_1^\circ > d^{-1/2}$. Риманова поверхность (фиг. 2) состоит из плоскости θ_1 с разрезами A и $(D\Theta)_\pm = (\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^\circ)$ и плоскости θ_2 с разрезом $\Theta = (-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$, склеенных крест-накрест вдоль берегов разрезов $(\pm\theta_1, \pm\infty)$ и $(\pm\theta_2, \pm i\infty)$. На берегах разрезов A и $(D\Theta)_\pm$

плоскости θ_1 и Θ , плоскости θ_2 , функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения, функции (3.13) выражают вещественные плоские волны. На участках $(AD)_{\pm} = (\pm a^{-1/2}, \pm d^{-1/2})$ плоскости θ_1 функция λ_1 имеет мнимые значения, на берегах разрезов $(\pm \theta_1^{\circ}, \pm \infty)$ плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 принимают комплексные значения, функции (3.13) на соответствующих участках выражают комплексные плоские волны.

На участках A_0 и $\Theta_0 = (0, \theta_1^{\circ})$ верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 в соответствие с формулами (3.15) функции (3.13) выражают квазипродольные ($k = 1$) и квазипоперечные ($k = 2$) волны, распространяющиеся с непрерывно возрастающими углами α_1 и α_2 в интервалах

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^{\circ} \quad (\alpha_2^{\circ} < \pi/2)$$

и с непрерывно изменяющимися нормальными скоростями со значениями на границах участков

$$b_1(0) = b^{1/2}, \quad b_1(a^{-1/2}) = a^{1/2}, \quad b_2(0) = d^{1/2}, \quad b_2(\theta_1^{\circ}) < d^{1/2}$$

На участке $(AD)_+$ плоскости θ_1 функция λ_1 принимает мнимые значения $\lambda_1 = -i\lambda_1^*$, функции (3.13) при $k = 1$ выражают комплексные квазипродольные волны

$$\varphi_1 = [-i\lambda_1^*(p_1 - c\theta^2) + \theta(r_1 - c\lambda_1^2)]f_1(\Omega_1^*) \quad (3.17)$$

$$\psi_1 = [-i\lambda_1^*(r_1 + c\theta^2) - \theta(p_1 + c\lambda_1^2)]f_1(\Omega_1^*)$$

$$\Omega_1^* = t - \theta x - i\lambda_1^* y$$

При переходе с участка $(AD)_+$ на верхний берег разреза $(D\Theta)_+$ плоскости θ_1 функция $\lambda_1 = -i\lambda_1^*$ принимает вещественное значение, функции (3.17) принимают вид

$$\varphi_1 = [\lambda_1(p_1 - c\theta^2) - \theta(r_1 - c\lambda_1^2)]f_1(\Omega_1^-) \quad (3.18)$$

$$\psi_1 = -[\lambda_1(r_1 + c\theta^2) + \theta(p_1 + c\lambda_1^2)]f_1(\Omega_1^-)$$

$$\Omega_1^- = t - \theta x - \lambda_1 y$$

Следовательно, на верхнем берегу разреза $(D\Theta)_+$ плоскости θ_1 функции (3.13) при $k = 1$ выражают вещественные волны и имеют вид (3.18). На участке $(D\Theta)_+$ верхнего берега разреза Θ плоскости θ_2 функции (3.13) при $k = 2$ выражают вещественные квазипоперечные волны.

При обходе точки разветвления θ_1° по ходу часовой стрелки с верхних берегов разрезов Θ плоскости θ_2 и $(D\Theta)_+$ плоскости θ_1 на нижние берега разрезов $(D\Theta)_+$ плоскости θ_1 и Θ плоскости θ_2 функции λ_2 и λ_1 принимают соответственно значения λ_1 и λ_2 . На нижних берегах разрезов $(D\Theta)_+$ и Θ функции (3.13) при $k = 2$ и функции (3.18) принимают значения

$$\varphi_1 = -[\lambda_1(p_1 - c\theta^2) + \theta(r_1 - c\lambda_1^2)]f_1(\Omega_1) \quad (3.19)$$

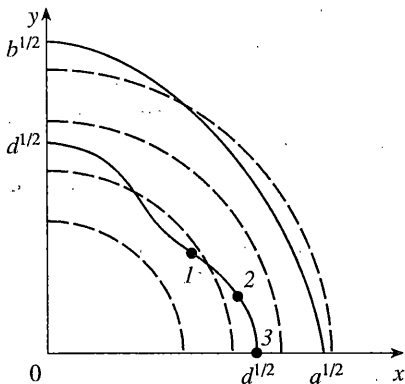
$$\psi_1 = [\lambda_1(r_1 + c\theta^2) - \theta(p_1 + c\lambda_1^2)]f_1(\Omega_1)$$

$$\Omega_1 = t - \theta x + \lambda_1 y$$

$$\varphi_2 = [\lambda_2(p_2 - c\theta^2) - \theta(r_2 - c\lambda_2^2)]f_2(\Omega_2^-) \quad (3.20)$$

$$\psi_2 = -[\lambda_2(r_2 + c\theta^2) + \theta(p_2 + c\lambda_2^2)]f_2(\Omega_2^-)$$

$$\Omega_2^- = t - \theta x - \lambda_2 y$$



Фиг. 3

Функции (3.20), определенные на нижнем берегу разреза Θ плоскости θ_2 , выражают квазипоперечные волны.

Функции (3.19), определенные на нижнем берегу разреза $(D\Theta)_+$ плоскости θ_1 , и функции (3.13) при $k = 2$, определенные на верхнем берегу разреза Θ плоскости θ_2 и выражающие квазипоперечные волны, в точке разветвления θ_1^0 имеют одинаковые значения. Следовательно, функции (3.19), определенные на нижнем берегу разреза $(D\Theta)_+$ плоскости θ_1 , являются продолжением функций (3.13) при $k = 2$, определенных на верхнем берегу разреза Θ плоскости θ_2 , и выражают квазипоперечные волны.

Аналогично, функции (3.18), определенные на верхнем берегу разреза $(D\Theta)_+$ плоскости θ_1 , являются продолжением функций (3.20), определенных на нижнем берегу разреза Θ плоскости θ_2 , и выражают квазипоперечные волны.

Таким образом, на участках $(D\Theta)_+$ верхних и нижних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 (фиг. 2) функции (3.18)–(3.20) и функции (3.13) при $k = 2$ выражают квазипоперечные волны, существование квазипродольных волн в этом случае исключено. Эта особенность имеет прямую связь с существованием остроугольных кромок на фронтах квазипоперечных волн от точечного источника [6, 8] при выполнении условия (3.16).

На участке $(D\Theta)_+$ нижнего берега разреза плоскости θ_1 функции (3.19) выражают квазипоперечные волны, распространяющиеся в соответствие с формулами (3.15) при $k = 1$ с непрерывно убывающими углами α_1 и нормальными скоростями в интервалах

$$\pi/2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_1(\theta_1^0) = \alpha_2(\theta_1^0) = \alpha_2^0$$

$$d^{1/2} \geq b_1 \geq b_1(\theta_1^0) = b_2(\theta_1^0)$$

При выполнении условия (3.16) нормальные скорости квазипродольных волн (3.13) при $k = 1$ на участке A_0 при условии $b-d-c > 0$ непрерывно убывают, при условии $b-d-c < 0$ внутри этого участка имеют максимум [6, 9]. Скорости квазипоперечных волн (3.13) при $k = 2$ внутри участка Θ_0 имеют минимум. Нормальные скорости квазипоперечных волн (3.19) на участке $(D\Theta)_+$ непрерывно убывают.

Графики изменения нормальных скоростей в зависимости от направления распространения волн изображены на фиг. 3. Для квазипоперечных волн точками отмечены значения скоростей этих волн, соответствующие границам участков $(D\Theta)_+$ на плоскостях θ_1 и θ_2 римановой поверхности (фиг. 2): 1 – скорость $b_2(d^{-1/2})$, 2 – скорости $b_2(\theta_1^0) = b_1(\theta_1^0)$, 3 – скорость $b_1(d^{-1/2}) = d^{1/2}$.

4. Однородные решения уравнений движения. Рассмотрим построение однородных нулевого измерения решений уравнений движения (2.4), выражающих упругие колебания от точечного источника типа мгновенного импульса в начале координат, приняв в уравнении (2.6) значения $l(\Omega) = 1$, $n(\Omega) = \lambda$, $K(\Omega) = 0$, а за новую переменную – величину θ , определенную выражением $m(\Omega) = -\theta$. В этом случае функция λ будет функцией переменной θ , а условие (2.9) приводится к уравнению (3.1), корни которого λ_1 и λ_2 определяются выражениями (3.2) и представляют собой ветви алгебраической функции λ , однозначно определенной на римановой поверхности (фиг. 1,2).

Решения (2.5) системы уравнений движения (2.4) выражаются функциями

$$\varphi_k = \Phi_k(\theta_k), \quad \psi_k = \Psi_k(\theta_k) \quad (4.1)$$

а уравнения (2.6) имеют вид

$$1 - \theta_k \xi + \lambda_k \eta = 0 \quad (\xi = x/t, \quad \eta = y/t). \quad (4.2)$$

Условия, устанавливающие зависимости между функциями (4.1), согласно (2.8) выражаются уравнениями

$$-\theta_k(p_k + c\lambda_k^2)\Phi'_k(\theta_k) + \lambda_k(p_k - c\theta_k^2)\Psi'_k(\theta_k) = 0 \quad (4.3)$$

$$\lambda_k(r_k + c\theta_k^2)\Phi'_k(\theta_k) + \theta_k(r_k - c\lambda_k^2)\Psi'_k(\theta_k) = 0$$

Суммируя условия (4.3), получим обобщенные условия, устанавливающие зависимости между функциями (4.1):

$$[\lambda_k(r_k + c\theta_k^2) - \theta_k(p_k + c\lambda_k^2)]\Phi'_k(\theta_k) + [\lambda_k(p_k - c\theta_k^2) + \theta_k(r_k - c\lambda_k^2)]\Psi'_k(\theta_k) = 0 \quad (4.4)$$

Согласно условиям (4.4) однородные нулевого измерения решения системы уравнений движения (2.4), выражающие упругие колебания от точечного источника типа мгновенного импульса в начале координат, определяются выражениями

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta_k}^{\theta_k} [\lambda_k(p_k - c\zeta^2) + \zeta(r_k - c\lambda_k^2)] w_k(\zeta) d\zeta \right\} \quad (4.5)$$

$$\psi(x, y, t) = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta_k}^{\theta_k} [\lambda_k(r_k + c\zeta^2) - \zeta(p_k + c\lambda_k^2)] w_k(\zeta) d\zeta \right\}$$

Функции λ_1 и λ_2 – ветви алгебраической функции λ , однозначно определенной на римановой поверхности (фиг. 1, 2), имеют вещественные значения на берегах разрывов A плоскости θ_1 и D плоскости θ_2 (фиг. 1) при выполнении условия (3.5) и на берегах разрывов A и $(D\Theta)_{\pm}$ плоскости θ_1 и Θ плоскости θ_2 (фиг. 2) при условии (3.16). Соответствие между точками римановой поверхности и точками плоскости xy выражается уравнением (4.2).

Фронты квазипродольных и квазипоперечных волн (4.5) строятся как огибающие прямых (4.2) при вещественных значениях θ_k и λ_k и имеют выражения [6, 8]:

$$\xi_k = -\lambda'_k / (\lambda_k - \theta_k \lambda'_k), \quad \eta_k = -1 / (\lambda_k - \theta_k \lambda'_k) \quad (4.6)$$

определенные на соответствующих берегах разрывов вещественного определения функций λ_k римановых поверхностей.

Нормальные скорости распространения волн и углы, образованные нормальными к фронтам с осью η , определяются формулами (3.15) при замене θ на θ_k .

Функции w_1 и w_2 представляют собой ветви произвольной аналитической функции w , однозначно определенной на римановой поверхности, изображенной на фиг. 1 при выполнении для упругих постоянных условия (3.5), на фиг. 2 – при условии (3.16). Чтобы решение (4.5) выражало упругие колебания от точечного источника в безграничной среде, необходимо функцию w выбирать так, чтобы вещественные части функций w_1 и w_2 обращались в нуль на соответствующих берегах разрывов плоскостей θ_1 и θ_2 вещественного определения функций λ_1 и λ_2 .

Особенности упругих колебаний от точечного источника типа мгновенного импульса в безграничной анизотропной среде изучены ранее [6, 8] на основе анализа решений задачи в смещениях.

5. Комплексные решения общего типа. Комплексные решения общего типа уравнений движения (2.4) получим, приняв в уравнении (2.6) значения $l(\Omega) = 1$, $n(\Omega) = \lambda$, $m(\Omega) = -\theta$. В этом случае функции λ и $K(\Omega)$ будут функциями переменной θ , а

условие (2.9) приводится к уравнению (3.1), корни которого λ_1 и λ_2 определяются выражениями (3.2) и представляют собой ветви алгебраической функции λ , однозначно определенной на римановой поверхности (фиг. 1, 2).

Решения (2.5) системы уравнений движения (2.4) выражаются функциями

$$\varphi_k = \Phi_k(\theta_k), \quad \psi_k = \Psi_k(\theta_k) \quad (5.1)$$

а уравнения (2.6) имеют вид

$$\delta_k = t - \theta_k x + \lambda_k y + K_k(\theta_k) = 0 \quad (5.2)$$

где K_k – ветви некоторой аналитической функции K .

Согласно (2.8) обобщенные условия, устанавливающие зависимости между функциями (5.1), можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} & -\Phi'_k(\theta_k) / [\lambda_k(p_k - c\theta_k^2) + \theta_k(r_k - c\lambda_k^2)] = \\ & = \Psi'_k(\theta_k) / [\lambda_k(r_k + c\theta_k^2) - \theta_k(p_k + c\lambda_k^2)] = w_k(\theta_k) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Общее вещественное решение уравнений движения (2.4) определяется выражениями

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) &= \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta_k}^{\theta_k} [\lambda_k(p_k - c\zeta^2) + \zeta(r_k - c\lambda_k^2)] w_k(\zeta) d\zeta \right\} \\ \psi(x, y, t) &= \sum_{k=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{\theta_k}^{\theta_k} [\lambda_k(r_k + c\zeta^2) - \zeta(p_k + c\lambda_k^2)] w_k(\zeta) d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Решения (5.4) в зависимости от соотношений упругих постоянных (3.5) и (3.16) однозначно определены на римановых поверхностях, изображенных на фиг. 1 и фиг. 2. Соответствие между точками римановой поверхности и точками плоскости xu выражается уравнением (5.2). Фронты квазипродольных и квазипоперечных волн (5.4) могут быть получены как огибающие прямых (5.2) при вещественных значениях θ_k и λ_k . Функции w_1 и w_2 есть ветви произвольной аналитической функции w , функции выбираются так, чтобы вещественные части функций w_1 и w_2 обращались в нуль на соответствующих берегах разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 , имеющих вещественные значения функций λ_1 и λ_2 .

6. Заключение. Предложенный в статье способ построения функционально-инвариантных решений уравнений движения в потенциалах для анизотропных сред в отличие от [1] позволяет получать решения динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред, согласующиеся с физическим смыслом задач и с аналогичными решениями для изотропных сред.

Несмотря на некоторую сложность решений, выражение их через обратные кажущиеся скорости в направлениях осей упругой симметрии среды и однозначное определение на римановых поверхностях позволяет применить их для решения ряда конкретных задач и производить аналитические исследования достаточно сложных волновых процессов в анизотропных средах.

Полученные в потенциалах решения выражают каждую из волн (квазипродольную и квазипоперечную) наложением чисто продольных и чисто поперечных волн, фронты которых совпадают, а скорости распространения спаренных волн равны скоростям квазипродольных и квазипоперечных волн. Такой подход может быть использован при изучении кинематических и динамических закономерностей волновых процессов в анизотропных средах; например при изучении соотношений плотностей потоков энергии безвихревых и соленоидальных возмущений квазипродольных и квазипоперечных волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свекло В.А.* К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 885–896.
2. *Смирнов В.И., Соболев С.Л.* Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1932. № 20. 37 с.
3. *Соболев С.Л.* Некоторые вопросы теории распространения колебаний // Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.; М.: ОНТИ, 1937. С. 468–617.
4. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. Л.; М.: Гостехиздат, 1953. 676 с.
5. *Свекло В.А.* Упругие колебания анизотропного тела // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1949. Вып. 17. С. 28–71.
6. *Осипов И.О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 548–555.
7. *Осипов И.О.* Распространение плоских волн в анизотропной среде, контактирующей с жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 144–154.
8. *Осипов И.О.* О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 927–934.
9. *Осипов И.О.* Характер изменения скоростей распространения упругих волн в анизотропных средах // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 1. С. 3–10.
10. *Осипов И.О.* К методу комплексных решений динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред // Изв. РАН МТТ. 1999. № 4. С. 102–112.
11. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
12. *Зволинский Н.В., Рейтман М.И., Шапиро Г.С.* Динамика деформируемых тел // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1972. Т. 3. С. 291–323.
13. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
14. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси. Изд-во Тбил. ун-та, 1968. 627 с.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
26.04.2000