**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2002**

УДК 539.3

© 2002 г. Н.В. МИНАЕВА

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ, БЛИЗКОМ К ОСЕСИММЕТРИЧНОМУ

Методом малых параметров рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии толстостенной трубы, отличие поперечного сечения которой от круглого кольца характеризуется двумя малыми параметрами. Труба находится под воздействием внутреннего и внешнего давлений. Найдено условие эквивалентности разложения решения в ряд по малым параметрам разложению в ряд Тейлора.

1. Пусть поведение исследуемого объекта описывается решением уравнения в частных производных

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, x, y, w, \eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{nn}) = 0 \quad (x, y) \in D \tag{1.1}$$

$$\eta_{ij} = \frac{\partial^{i+j} w}{\partial x^i \partial y^j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

где параметры ε_1 и ε_2 характеризуют рассматриваемый объект и внешнее воздействие на него.

Граничные условия запишем в виде

$$\begin{gathered} H_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, p_{11}, p_{12}, p_{21}, \ldots, p_{nn}) = 0 \\ p_{ij} = \left.\frac{\partial^{i+j-2} w}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}}\right|_{(x,\,y)\in\Gamma} \quad (k, i, j = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{1.2}$$

где Γ – граница области D.

Пусть при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ задача (1.1), (1.2) допускает решение

$$w = w^0(x, y) \tag{1.3}$$

а функции F и G_k являются аналитическими в окрестности точки $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $w = w^0$, $\eta_{ij} = \eta_{ij}^0$, $p_{ij} = p_{ij}^0$.

Составим вспомогательную задачу относительно функции $\zeta(x, y)$:

$$F(0, 0, x, y, w^0 + \zeta, \eta_{11}^0 + \eta'_{11}, \ \eta_{12}^0 + \eta'_{12}, \ldots, \eta_{nn}^0 + \eta'_{nn}) = 0 \tag{1.4}$$

$$H_k(0, 0, p_{11}^0 + p'_{11}, p_{12}^0 + p'_{12}, \ldots, p_{nn}^0 + p'_{nn}) = 0 \tag{1.5}$$

$$\eta'_{ij} = \frac{\partial^{i+j}\zeta}{\partial x^i \partial y^j}; \quad p'_{ij} = \left.\frac{\partial^{i+j-2}\zeta}{\partial x^{i-1}\partial y^{j-1}}\right|_{(x,y)\in\Gamma} \quad (k, i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Линеаризованная относительно ζ задача, соответствующая задаче (1.4), (1.5), будет следующей:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{\substack{\varepsilon=0\\ w=w^0}}\zeta+\sum_{i,j=1}^{n}\left.\frac{\partial F}{\partial \eta_{ij}}\right|_{\substack{\varepsilon=0\\ w=w^0}}\eta'_{ij}=0$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left.\frac{\partial H_k}{\partial p_{ij}}\right|_{\substack{\varepsilon=0\\ p=p_0}}p'_{ij}=0\quad(k=1,2,\ldots,n)\tag{1.7}$$

где учтено, что функция (1.3) является решением задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$.

Предположим, что задача (1.7) имеет только тривиальное решение. Тогда согласно теореме о неявных функциях [1, 2] в окрестности точки $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ существует однозначная аналитическая функция

$$w=w(\varepsilon_1,\varepsilon_2,x,y)\qquad(x,y)\in D\tag{1.8}$$

являющаяся решением задачи (1.1), (1.2) и обладающая свойством

$$w(0,0,x,y)=w^0(x,y)\tag{1.9}$$

Ряд Тейлора для функции (1.8) запишем в следующем виде:

$$w=\sum_{i,j=0}^{\infty}w^{ij}(x,y)\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j\tag{1.10}$$

В результате подстановки (1.8) в (1.1) и (1.2), разложения полученных выражений в ряд по ε_1, ε_2 и приравнивания нулю всех коэффициентов этого ряда, получим систему уравнений для нахождения функций $w^{ii}(x,y)$. Например, для $w^{10}(x,y)$ и $w^{01}(x,y)$ получаются следующие задачи:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1}+\frac{\partial F}{\partial w}w^{10}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \eta_{ij}}\xi_{ij}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ w=w^0}}=0$$

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \varepsilon_1}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial H_k}{\partial p_{ij}}z_{ij}=0\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ w=w^0}}=0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2}+\frac{\partial F}{\partial w}w^{01}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \eta_{ij}}\lambda_{ij}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ w=w^0}}=0\tag{1.11}$$

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \varepsilon_2}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial H_k}{\partial p_{ij}}s_{ij}=0\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ w=w^0}}=0\quad(k=1,2,\ldots,n)$$

$$\xi_{ij}=\frac{\partial^{i+j}w^{10}}{\partial x^i\partial y^j},\quad z_{ij}=\left.\frac{\partial^{i+j-2}w^{10}}{\partial x^{i-1}\partial y^{j-1}}\right|_{(x,y)\in\Gamma}$$

$$\lambda_{ij}=\frac{\partial^{i+j}w^{01}}{\partial x^i\partial y^j},\quad s_{ij}=\left.\frac{\partial^{i+j-2}w^{01}}{\partial x^{i-1}\partial y^{j-1}}\right|_{(x,y)\in\Gamma}$$

Изложенный метод нахождения функции (1.8) в виде (1.10) полностью совпадает с методом малых параметров. Итак, при выполнении условий теоремы о неявных функциях [1, 2] и аналитичности функций F и H_k разложение решения задачи (1.1), (1.2) в ряд по малым параметрам эквивалентно разложению в ряд Тейлора.

Очевидно, что аналогичный результат может быть получен и для системы уравнений в частных производных.

2. В качестве примера рассмотрим поведение толстостенной трубы при плоской деформации под действием внутреннего и внешнего давлений p_1 и p_2 соответственно.

Пусть внутренний и внешний контуры поперечного сечения трубы в полярных координатах описываются функциями $r = a + k_1 f_1(\theta)$ и $r = b + k_2 f_2(\theta)$. Напряженно-деформированное состояние трубы из линейно упругого несжимаемого (для упрощения выкладок) материала будет описываться решением следующей задачи [3, 4]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial\theta}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0\\
\frac{\partial\tau}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\tau}{\rho}=0\\
\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial v}{\partial\theta}+u=0\\
\sigma_\rho-\sigma_\theta=2\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{u}{\rho}\right)\\
\tau=\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{v}{\rho}\\
(\alpha\leqslant\rho\leqslant 1,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Граничные условия на внутреннем и внешнем контурах сечения трубы запишем в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\sigma_n\,|_{\rho=\Psi_1(\theta)}=-q_1,\quad \tau_n\,|_{\rho=\Psi_1(\theta)}=0\\
\sigma_n\,|_{\rho=\Psi_2(\theta)}=-q_2,\quad \tau_n\,|_{\rho=\Psi_2(\theta)}=0
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

где функции $\Psi_1(\theta)$ и $\Psi_2(\theta)$ определяют границу контура поперечного сечения трубы в деформированном состоянии, $\rho = r/b$, $q_1 = p_1/G$, $q_2 = p_2/G$, компоненты перемещений u и v также отнесены к величине b, а компоненты тензора напряжений – к модулю упругости G, $\alpha = a/b$.

При $k_1 = k_2 = 0$:

$$
\begin{gathered}
\Psi_1(\theta)=\Psi_1^0(\theta)=\alpha+u^0(\alpha)\\
\Psi_2(\theta)=\Psi_2^0(\theta)=1+u^0(1)
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

В этом случае задача (2.1)–(2.3) допускает осесимметричное решение [5]:

$$
\sigma_\rho^0=\frac{2A}{\rho^2}+B,\quad \sigma_\theta^0=-\frac{2A}{\rho^2}+B,\quad \tau_0=0,\quad u^0=-\frac{A}{\rho}
\tag{2.4}
$$

Произвольные постоянные A и B, как следует из (2.2) и (2.3), находятся из следующей системы уравнений ($\sigma_n^0=\sigma_\rho^0,\ \tau_n^0=\tau^0=0$):

$$
\begin{gathered}
2A\alpha^2/(\alpha^2-A)^2+B=-q_1\\
2A/(1-A)^2+B=-q_2
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Линейная задача (1.7) в данном случае будет такой (разложение в ряд граничных условий (2.2), (2.3) весьма подробно рассмотрено в работах [3, 6, 7]):

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_3}{\partial\theta}+\frac{\zeta_1-\zeta_2}{\rho}=0$$

$$\frac{\partial\zeta_3}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_2}{\partial\theta}+\frac{2\zeta_3}{\rho}=0$$

$$\rho\frac{\partial\zeta_4}{\partial\rho}+\frac{\partial\zeta_5}{\partial\theta}+\zeta_4=0 \qquad (2.6)$$

$$\zeta_1-\zeta_2=2\left(\frac{\partial\zeta_4}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_5}{\partial\theta}-\frac{\zeta_4}{\rho}\right)$$

$$\zeta_3=\frac{\partial\zeta_5}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_4}{\partial\theta}-\frac{\zeta_5}{\rho}$$

$$\left(\zeta_1+\frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}\zeta_4\right)_{\rho=\alpha}=\left[\zeta_3+\frac{1}{\alpha}(\sigma_\rho^0-\sigma_\theta^0)\frac{\partial\zeta_4}{\partial\theta}\right]_{\rho=\alpha}=0$$

$$\left(\zeta_1+\frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}\zeta_4\right)_{\rho=1}=\left[\zeta_3+(\sigma_\rho^0-\sigma_\theta^0)\frac{\partial\zeta_4}{\partial\theta}\right]_{\rho=1}=0 \qquad (2.7)$$

Общее решение задачи (2.6) ищем в виде [3, 8]:

$$\zeta_1=(4c_2\rho+4c_3\rho^{-3})\cos\theta,\quad \zeta_2=(12c_2\rho-4c_3\rho^{-3})\cos\theta$$

$$\zeta_3=(4c_2\rho+4c_3\rho^{-3})\sin\theta,\quad \zeta_4=-(c_1+c_2\rho^2+c_3\rho^{-2})\cos\theta$$

$$\zeta_5=(c_1+3c_2\rho^2-c_3\rho^{-2})\sin\theta \qquad (2.8)$$

Из граничных условий (2.7) получаем систему уравнений для определения постоянных c_2 и c_3 ($c_1=0$):

$$c_2+c_3=0$$

$$\alpha^2(\alpha^2+A)c_2+(1+\alpha^{-3}A)c_3=0 \qquad (2.9)$$

Как следует из (2.8), (2.9), задача (2.6), (2.7) имеет нетривиальное решение при выполнении следующего условия:

$$1+\alpha^{-3}A-\alpha^2(\alpha^2+A)=0 \qquad (2.10)$$

Из (2.5) и (2.10) получаем следующее условие нетривиальности решения задачи (2.6), (2.7):

$$q_1-q_2=q_*=2A\left[\frac{1}{(1-A)^2}-\frac{\alpha^2}{(\alpha^2-A)^2}\right] \qquad (2.11)$$

$$A=\alpha^3(\alpha^4-1)/(1-\alpha^5)$$

Итак, поскольку при $q_1-q_2<q_*$ решение задачи (2.1)–(2.3) является аналитическим в окрестности точки $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ ($\varepsilon_i=k_i/b$ ($i=1, 2$)), то будем его искать в виде рядов

Тейлора, которые запишем в следующем виде:

$$\sigma_\rho = \sum_{i,j=0}^{\infty} \sigma_\rho^{ij}\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j, \quad \sigma_\theta = \sum_{i,j=0}^{\infty} \sigma_\theta^{ij}\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j, \; \ldots, \quad \upsilon = \sum_{i,j=0}^{\infty} \upsilon^{ij}\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j \tag{2.12}$$

$$\sigma_\rho^{00} = \sigma_\rho^0, \; \ldots, \; \upsilon^{00} = \upsilon^0$$

В результате подстановки (2.12) в (2.1)–(2.3) первая задача относительно $\sigma_\rho^{10}, \; \sigma_\theta^{10}, \ldots, \upsilon^{10}$ из (1.11) для данного примера будет такой:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^{10}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^{10}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\rho^{10} - \sigma_\theta^{10}}{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma^{10}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^{10}}{\partial\theta} + \frac{2\tau^{10}}{\rho} = 0$$

$$\rho\frac{\partial u^{10}}{\partial\rho} + \frac{\partial\upsilon^{10}}{\partial\theta} + u^{10} = 0 \tag{2.13}$$

$$\sigma_\rho^{10} - \sigma_\theta^{10} = 2\left(\frac{\partial u^{10}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\upsilon^{10}}{\partial\theta} - \frac{u^{10}}{\rho}\right)$$

$$\tau^{10} = \frac{\partial\upsilon^{10}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10}}{\partial\theta} - \frac{\upsilon^{10}}{\rho}$$

$$\left(\sigma_\rho^{10} + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}(u^{10} + \beta_1 f_1)\right)_{\rho=\alpha+u_0(\alpha)} = \left[\tau^{10} + \frac{1}{\alpha}(\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0)\left(\frac{\partial u^{10}}{\partial\theta} + \beta_1\frac{\partial f_1}{\partial\theta}\right)\right]_{\rho=\alpha+u_0(\alpha)} = 0$$

$$\left(\sigma_\rho^{10} + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}u^{10}\right)_{\rho=1+u_0(1)} = \left[\tau^{10} + \frac{1}{\rho}(\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0)\frac{\partial u^{10}}{\partial\theta}\right]_{\rho=1+u_0(1)} = 0 \tag{2.14}$$

$$\beta_1 = \left.\frac{du^0}{d\rho}\right|_{\rho=\alpha} + 1$$

Система дифференциальных уравнений относительно функций $\sigma_\rho^{01}, \sigma_\theta^{01}, \ldots, \upsilon^{01}$ будет иметь вид (2.13), а граничные условия будут следующими:

$$\left(\sigma_\rho^{10} + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}u^{01}\right)_{\rho=\alpha+u^0(\alpha)} = \left[\tau^{10} + \frac{1}{\rho}(\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0)\frac{\partial u^{01}}{\partial\theta}\right]_{\rho=\alpha+u^0(\alpha)} = 0$$

$$\left(\sigma_\rho^{01} + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}(u^{01} + \beta_2 f_2)\right)_{\rho=1+u_0(1)} = \tag{2.15}$$

$$= \left[\tau^{01} + \frac{1}{\rho}(\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0)\left(\frac{\partial u^{01}}{\partial\theta} + \beta_2\frac{\partial f_2}{\partial\theta}\right)\right]_{\rho=1+u_0(1)} = 0, \quad \beta_2 = \left.\frac{du^0}{d\rho}\right|_{\rho=1} + 1$$

При $f_i = (1/\beta_i)\cos\theta$ (i = 1, 2) общее решение задачи (2.13) ищем в виде, аналогичном (2.8), и, удовлетворяя граничным условиям (2.14) и (2.15), получаем, что, например

$$\sigma_\rho^{10} = 4D_1(\rho - \rho^{-3})\cos\theta, \quad \sigma_\theta^{10} = 4D_1(3\rho - \rho^{-3})\cos\theta$$

$$\sigma_\rho^{01} = 4(D_2\rho + D_3\rho^{-3})\cos\theta, \quad \sigma_\theta^{01} = 4(3D_2\rho - D_3\rho^{-3})\cos\theta \tag{2.16}$$

$$D_1 = \frac{A}{\alpha^4 - 1 + A(\alpha^2 - \alpha^{-3})}, \quad D_2 = \frac{A(1+\alpha^{-3})}{(1+A)(1-\alpha^4 - A\alpha^2 - A\alpha^{-3})}$$

$$D_3 = A/(1+A) - D_2$$

Следовательно, из (2.12), в частности получаем, что функции

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 + \varepsilon_1\sigma_\rho^{10} + \varepsilon_2\sigma_\rho^{01}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \varepsilon_1\sigma_\theta^{10} + \varepsilon_2\sigma_\theta^{01} \tag{2.17}$$

являются решением задачи (2.1)–(2.3) с точностью до величин первого порядка малости, т.к. остаточные члены рядов (2.12) в этом случае будут величинами не менее второго порядка малости.

При $q_1 - q_2 > q_*$ решение (2.4) задачи (2.1)–(2.3) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ не имеет физического смысла и следует рассматривать другие решения этой нелинейной задачи.

В заключение отметим, что в случае геометрически линейной постановки задачи, т.е. когда граничные условия ставятся на недеформированной поверхности трубы, граничные условия (2.7) будут следующими

$$\zeta_1|_{\rho=\alpha} = \zeta_3|_{\rho=\alpha} = 0, \quad \zeta_1|_{\rho=1} = \zeta_3|_{\rho=1} = 0 \tag{2.18}$$

Задача (2.6), (2.18) допускает тривиальное решение. Поскольку задача (2.6), (2.18) с точностью до обозначений совпадает с задачей обычной линейной теории упругости, то на основании теоремы Кирхгофа тривиальное решение у нее – единственное. Итак, в случае геометрически линейной постановки задачи разложения решений в ряды по малым параметрам будут совпадать с рядами Тейлора при любых значениях внешних нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
2. *Минаев В.А., Минаева Н.В.* О состояниях механической системы. М., 1998. 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.12.1998, № 3807–В98.
3. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластичности. М.: Наука, 1978. 208 с.
4. *Ершов Л.В., Ивлев Д.Д.* О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 8. С. 149–152.
5. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. М.: Физматгиз, 1959. 364 с.
6. *Лейбензон Л.С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. трудов. М.: Изд-во АН СССР. 1951. № 1. С. 50–85.
7. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
8. *Бицено К.Б., Граммель Р.* Техническая динамика. Т. 1. Л.; М.: Гостехиздат, 1950. 900 с.

Воронеж

Поступила в редакцию 21.03.2000