МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2002

УДК 534.1

© 2002 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, Л.И. КОРОВИНА, С.В. НЕСТЕРОВ

АВТОКОЛЕБАНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Исследуются автоколебания сильно нелинейной системы, возвращающая сила которой описывается нечетной, в частности кубической функцией смещения. Механизм возбуждения принимается стандартного вида, как в осцилляторе Ван дер Поля. Для малых и умеренно больших значений коэффициента обратной связи разработан эффективный численно-аналитический метод расчета основных характеристик колебаний: периода, амплитуды, траектории и предельного цикла. Проведен анализ автоколебаний; установлены механические эффекты, имеющие качественный характер.

1. Постановка задачи. Автоколебательные процессы присущи объектам различной физической природы [1]. Их исследование представляет значительный научный и прикладной интерес для многих областей техники и естествознания, в частности, для механики и радиофизики. Имеется обширная литература, посвященная качественным, аналитическим и численным методам исследования автоколебаний, см. например монографии [1–8] и библиографию к ним. Разработанные качественные и топологические методы для динамических систем на фазовой плоскости дают критерии (достаточные условия) существования предельных циклов (автоколебаний). Положение и форма предельного цикла могут быть приближенно определены с помощью фазовой плоскости, например, методом изоклин [2–6]. В случае квазилинейной автоколебательной системы широко применяются приближенные аналитические методы нелинейной механики (методы малого параметра Ляпунова–Пуанкаре, метод усреднения Крылова – Боголюбова и др.) [2, 6, 7]. Если коэффициент обратной связи есть асимптотически большая величина, то имеет место сингулярно возмущенная автоколебательная система, совершающая релаксационные колебания. В этом случае предельный цикл строится с помощью метода "припасовывания" А.А. Дородницына [5] и методов теории релаксационных колебаний [8].

Для приложений, однако, значительный интерес представляют автоколебания систем для умеренных значений коэффициента обратной связи. Исследование таких существенно нелинейных задач требует разработки эффективных численно-аналитических подходов.

В отличие от хорошо изученных случаев осцилляторов типа Ван дер Поля или Рэлея [2,5–7], содержащих линейную возвращающую силу, рассмотрим автоколебания сильно нелинейной системы вида

$$m\ddot{x} + cx^{2k-1} - a\dot{x} + bx^2\dot{x} = 0, \quad k = 1,2,\ldots, \quad m,c,a,b > 0 \tag{1.1}$$

Здесь параметр m определяет инерционную характеристику объекта, c – коэффициент возвращающей силы (при $k = 1$ линейной, при $k = 2$ кубической и т.д.); параметры a, b задают обратную связь в системе. Отметим, что нелинейная возвращающая сила может быть реализована с помощью линейных элементов (за счет геометрической нелинейности) [9, 10].

Уравнение (1.1) содержит четыре размерных параметра. Приведем его к стандартному виду посредством преобразований к безразмерным переменным

$$\tau = \nu t, \quad u = \frac{x}{l}, \quad \nu = \sqrt{\frac{c}{m}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k-1}{2}}, \quad l = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \varepsilon = \frac{a}{\sqrt{cm}}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{k-1}{2}}$$

$$u'' + u^{2k-1} - \varepsilon(1-u^2)u' = 0. \tag{1.2}$$

Здесь ν, l – параметры преобразования; $\varepsilon > 0$ имеет смысл коэффициента обратной связи; штрихами обозначены производные по аргументу τ. В частности, при $k = 1$ уравнение (1.2) совпадает с общеизвестным для осциллятора Ван дер Поля [2–8]. Колебания осциллятора хорошо исследованы и описаны в классической литературе, см. выше. Далее основное внимание при исследовании автоколебаний системы (1.2) уделяется случаю $k = 2$ и, в меньшей мере, случаю $k = 3$. Представляет интерес сравнение периодов и амплитуд колебаний, формы предельных циклов и других характеристик движения, отвечающих различным значениям коэффициента k, для малых и умеренно больших величин параметра ε.

На фазовой плоскости (u, v), $v = u'$, система (1.2) описывается уравнением

$$dv \,/\, du = \varepsilon(1-u^2) - u^{2k-1}/v \tag{1.3}$$

Построение устойчивого предельного цикла для любого фиксированного значения $\varepsilon > 0$ связано с определением замкнутой неоднозначной кривой $v = v(u, \varepsilon)$ уравнения (1.3), что нетривиально. Из полученного соотношения, однако, следует весьма полезный для дальнейшего факт: устойчивый при $t \to \infty$ предельный цикл, поскольку он существует [2–8], удовлетворяет условию центральной симметрии: $v(-u, \varepsilon) = -v(u, \varepsilon)$, так как уравнение (1.3) не изменится при замене $v \to -v$ и $u \to -u$.

2. Применение метода возмущений. Для достаточно малых значений $\varepsilon > 0$ используем методы Ляпунова – Пуанкаре [2, 11] с целью дальнейшего применения численно-аналитических методов ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру ε, $0 < \varepsilon \leqslant 10$. В соответствии с подходом Пуанкаре [11] вводится "возмущенный" аргумент θ таким образом, чтобы период Θ автоколебаний по θ был фиксирован, в частности, $\Theta = 1$; имеем нелинейную периодическую краевую задачу:

$$\begin{gathered} u'' + (T/\Theta)^2 u^{2k-1} - \varepsilon(T/\Theta)(1-u^2)u' = 0 \\ u(0) = u(\Theta), \quad u'(0) = u'(\Theta) \\ \theta = (t\Theta)/T, \quad u(\theta+\Theta, \varepsilon) \equiv u(\theta, \varepsilon) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Искомое решение $u(\theta, \varepsilon)$, $T = T(\varepsilon)$ строится разложениями или последовательными приближениями по степеням малого параметра ε. В первом приближении по ε амплитуда $A(\varepsilon)$ и период $T(\varepsilon)$ определяются соотношениями:

$$TA^{k-1} = 4\sqrt{k}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{2k}}} = \frac{2}{\sqrt{k}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) \tag{2.2}$$

$$A^2\int_0^1 z^2\sqrt{1-z^{2k}}\,dz = \int_0^1 \sqrt{1-z^{2k}}\,dz, \quad A^2\mathrm{B}\left(\frac{3}{2k}, \frac{3}{2}\right) = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2k}, \frac{3}{2}\right)$$

Здесь B – бета-функция Эйлера, зависящая от степени нелинейности $k = 1, 2, 3, \ldots$ Разрешая второе независимое уравнение (2.2) относительно неизвестной A, получим из условия "энергетического баланса" искомую амплитуду автоколебаний (Г – гамма-функция Эйлера):

$$A^* = [\Gamma(1/(2k))/\Gamma(3/(2k))]^{1/2}[\Gamma(3/(2k)+3/2)/\Gamma(1/(2k)+3/2)]^{1/2} \tag{2.3}$$

с погрешностью $O(\varepsilon)$. Аналогично из первого уравнения определим невозмущенный (с ошибкой $O(\varepsilon)$) период автоколебаний

$$T^* = \frac{2}{\sqrt{k}} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) \Big/ (A^*)^{k-1} \tag{2.4}$$

Величины A^* (2.3), T^* (2.4) рассматриваются далее как начальные приближения при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в численно-аналитической процедуре продолжения по параметру ε, основанной на модифицированном методе ускоренной сходимости [12].

3. Алгоритмы метода ускоренной сходимости. Построение Θ – периодического решения уравнения (2.1) связано с определением неизвестного параметра $T(\varepsilon)$ и начальных данных $u(0)$, $u'(0)$. Вследствие автономности и установленной антисимметричности периодическую краевую задачу (2.1) можно представить в виде эквивалентной нелинейной краевой задачи на интервале $0 \leqslant \theta \leqslant \Theta/2$:

$$u(0) = u(\Theta/2) = 0; \quad T = T(\varepsilon), \quad u'(0) = -u'(\Theta/2) = p(\varepsilon) \tag{3.1}$$

Решение задачи (3.1) определяет "правую половину" предельного цикла. Согласно (3.1) требуется найти два неизвестных параметра T, p для фиксированного значения $\varepsilon > 0$. Пусть имеются достаточно точные оценки T^*, p^* искомых величин, определяющих периодическое движение системы как решение соответствующей задачи Коши. Тогда уточняющая рекуррентная процедура имеет вид

$$T_{(n+1)}(\varepsilon) = T_{(n)}(\varepsilon) + \delta T_{(n)}(\varepsilon), \quad p_{(n+1)}(\varepsilon) = p_{(n)}(\varepsilon) + \delta p_{(n)}(\varepsilon) \quad (n = 0,1,2,3,\ldots)$$

$$T_{(0)} = T^*, \quad p_{(0)} = p^* \tag{3.2}$$

В частности, при $\varepsilon \ll 1$ начальные оценки равны

$$T^* = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{B}(1/2k, 1/2)}{(A^*)^{k-1}}, \quad p^* = \frac{2A^*}{k\Theta} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2}\right) \tag{3.3}$$

Величины T^*, A^* в (3.3) определены согласно методу возмущений формулами (2.3), (2.4). Уточняющие добавки $\delta T_{(n)}, \delta p_{(n)}$ вычисляются из условия обнуления невязок по u, $u' + p$ при $\theta = \Theta/2$ (3.1):

$$\delta T_{(n)}(\varepsilon) = [U_n W_n' - (U_n' + p_{(n)}) W_n] / \Delta_n$$

$$\delta p_{(n)}(\varepsilon) = [(U_n' + p_{(n)}) Z_n - U_n (Z_n' + 1)] / \Delta_n$$

$$\Delta_n = W_n (Z_n' + 1) - W_n' Z_n \neq 0 \tag{3.4}$$

Здесь коэффициенты чувствительности W_n, Z_n, W_n', Z_n' и невязки решения U_n, $U_n' + p_{(n)}$ определяются через решения задачи Коши следующим образом:

$$u'' + (T_{(n)}/\Theta)^2 u^{2k-1} - \varepsilon (T_{(n)}/\Theta)(1 - u^2) u' = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = p_{(n)}$$

$$w'' + (T_{(n)}/\Theta)^2 (2k-1) u^{2k-1} w - \varepsilon (T_{(n)}/\Theta)((1 - u^2) w' - 2uu'w) = 0$$

$$w = \partial u / \partial p, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 1$$

$$z'' + (T_{(n)}/\Theta)^2 (2k-1) u^{2k-1} z - \varepsilon (T_{(n)}/\Theta)((1 - u^2) z' - 2uu'z) + 2(T_{(n)}/\Theta)^2 u^{2k-1} -$$

$$-(\varepsilon/\Theta)(1 - u^2) u' = 0$$

$$z = \partial u / \partial T, \quad z(0) = z'(0) = 0$$

$$U_n = U(\Theta/2, T_{(n)}, p_{(n)}, \varepsilon), \quad W_n = W(\Theta/2, T_{(n)}, p_{(n)}, \varepsilon), \quad Z_n = Z(\Theta/2, T_{(n)}, p_{(n)}, \varepsilon) \tag{3.5}$$

Алгоритм (3.2)–(3.5) обладает свойством ускоренной (квадратичной) сходимости по отношению к невязким по u, $u' + p$ при $\theta = \Theta/2$. На начальном этапе при $\varepsilon = \varepsilon_1 \ll 1$ в качестве нулевого приближения $T_{(0)}, p_{(0)}$ искомых величин T, p используются значения T^*, p^* (3.3) – первые приближения по методу возмущений. Несколько итераций (обычно две – три) позволяют найти величины $T_1 = T(\varepsilon_1), p_1 = p(\varepsilon_1)$ с достаточной точностью (погрешностью порядка $\varepsilon^4 - \varepsilon^8$).

На следующем шаге процедуры продолжения по параметру ε найденные значения T_1, p_1 принимаются в качестве начальных приближений $T_{(0)}(\varepsilon_2)$, $p_{(0)}(\varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2$ достаточно близко к ε_1; малым параметром считается $\delta\varepsilon_2$. Затем, на основе уточненных значений $T_2 = T(\varepsilon_2), p_2 = p(\varepsilon_2)$ строятся оценки $T_{(n)}(\varepsilon_3), p_{(n)}(\varepsilon_3)$, где $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3$, и т.д. Таким способом могут быть получены искомые значения параметров $T_{(i)}(\varepsilon_i), p_{(i)}(\varepsilon_i)$ $(i = 1, 2,\ldots, N)$ для достаточно плотного множества значений $\varepsilon \in \{\varepsilon_i\}$ на требуемом интервале значений коэффициента ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_N$. С целью ускорения процесса продолжения по параметру ε можно применить полиномиальную экстраполяцию для построения начальных приближений $T_{(0)}(\varepsilon_i), p_{(0)}(\varepsilon_i)$, в частности, линейную или параболическую аппроксимацию кривых $T(\varepsilon), p(\varepsilon)$ на интервале $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_i + \delta\varepsilon_i$. Аналогично строится "левая половина" предельного цикла; она является центрально симметричной кривой по отношению к построенной.

Наряду с определением решения согласно (3.1)–(3.5), аналогично может быть построена "нижняя половина" предельного цикла на фазовой плоскости (u, υ). Нелинейной краевой задаче на интервале $0 \leqslant \theta \leqslant \Theta/2$ соответствуют условия

$$u'(0) = u'(\Theta/2) = 0, \quad T = T(\varepsilon), \quad u(0) = A(\varepsilon) = -u(\Theta/2) \tag{3.6}$$

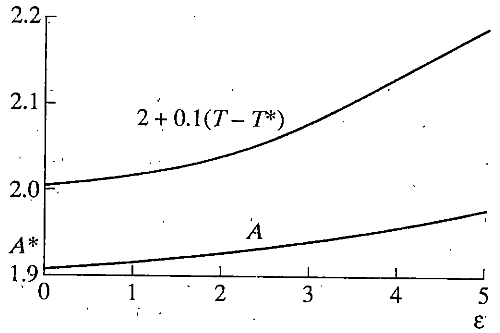
При $\varepsilon = \varepsilon_1 \ll 1$ начальные приближения $T_{(0)}(\varepsilon_1)$, $A_{(0)}(\varepsilon_1)$ неизвестных $T(\varepsilon_1)$, $A(\varepsilon_1)$ определены формулами (2.3), (2.4), см. также (3.3). Алгоритм ускоренной сходимости для уточнения неизвестных $T(\varepsilon), A(\varepsilon), \varepsilon \in \{\varepsilon_i\}$ имеет вид:

$$\begin{gathered}
T_{(n+1)}(\varepsilon) = T_{(n)}(\varepsilon) + \delta T_{(n)}(\varepsilon), \quad A_{(n+1)}(\varepsilon) = A_{(n)}(\varepsilon) + \delta A_{(n)}(\varepsilon) \\
T_{(0)}(\varepsilon_1) = T^*, \quad A_{(0)}(\varepsilon_1) = A^* \\
\delta T_{(n)}(\varepsilon) = [U_n'(W_n + 1) - (A_{(n)} + U_n)W_n'] / \Delta_n \\
\delta A_{(n)}(\varepsilon) = [(A_{(n)} + U_n)Z_n' - U_n' Z_n] / \Delta_n \\
\Delta_n = Z_n W_n' - Z_n'(W_n + 1) \neq 0, \quad n = 0,1,2,\ldots
\end{gathered} \tag{3.7}$$

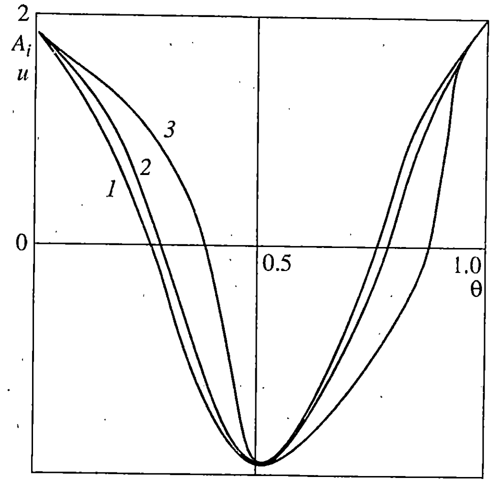
Здесь коэффициенты чувствительности W_n, Z_n, W_n', Z_n' и невязки решения $U_n + A_{(n)}$, U_n' при $\theta = \Theta/2$ на каждом шаге n определяются как высокоточное решение задачи Коши для уравнений (3.5) с начальными условиями вида:

$$\begin{gathered}
u(0) = A_{(n)}(\varepsilon), \quad u'(0) = 0, \quad T_{(n)} = T_{(n)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in \{\varepsilon_i\} \\
w = \partial u / \partial A, \quad w(0) = 1, \quad w'(0) = 0 \\
z = \partial u / \partial T, \quad z(0) = z'(0) = 0 \\
U_n = U(\Theta/2, T_{(n)}, A_{(n)}, \varepsilon), \quad W_n = W(\Theta/2, T_{(n)}, A_{(n)}, \varepsilon), \quad Z_n = Z(\Theta/2, T_{(n)}, A_{(n)}, \varepsilon)
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Относительно сходимости алгоритма (3.5)–(3.8) справедливы вышеизложенные замечания, относящиеся к построению "правой" или "левой" половины предельного цикла. Отметим, что при построении центрально симметричной "верхней половины" цикла краевое условие (3.6) для u принимает вид $u(0) = -A(\varepsilon) = -u(\Theta/2)$; вычисления проводятся сходным образом.



Фиг. 1



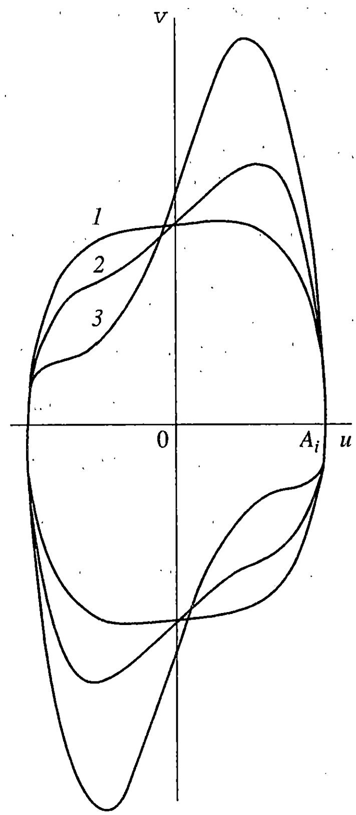
Фиг. 2

4. Результаты расчетов и выводов. Основное внимание было уделено расчету и анализу автоколебаний для случая кубической нелинейности, т.е. $k = 2$. Вычисления по формулам (2.3), (2.4) приводят к невозмущенным значениям амплитуды $A^* = 1.90982$ и периода $T^* = 3.88325$, т.е. значениям $A(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$. Эти величины принимаются в качестве начальных приближений для примененного второго алгоритма расчетов по методу ускоренной сходимости согласно (3.5)–(3.8) при $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0.1$. Затем применялась процедура продолжения по параметру с шагом $\delta\varepsilon = 0.5$, параметр ε изменялся в пределах $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 5$. Расчеты проводились с абсолютной и относительной погрешностью 10^{-5}–10^{-6}. Результаты высокоточных расчетов величин $T(\varepsilon)$ и $A(\varepsilon)$ представлены в таблице. Для наглядности на фиг. 1 представлены графики этих кривых, которые свидетельствуют о том, что амплитуда автоколебаний $A(\varepsilon)$ очень медленно возрастает при увеличении ε, причем относительное изменение не превышает 3% на указанном интервале $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 5$, см. также таблицу. Однако период автоколебаний $T(\varepsilon)$ изменяется (возрастает) существенно, примерно в 1.43 раза, т.е. на 43%. При асимптотическом возрастании параметра ε ($\varepsilon \to \infty$) могут быть получены согласно [8] соответствующие приближенные выражения для $A(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$.

ε	0.1	1	2	3	4	5
T	3.8841	3.9847	4.2228	4.6137	5.0853	5.5957
A	1.9099	1.9107	1.9252	1.9409	1.9558	1.9681

На фиг. 2 приведены зависимости 1, 2, 3 периодического решения $u(\theta, \varepsilon)$ при $\Theta = 1$ для трех значений параметра ε: $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 3$. Для малых значений ε ($\varepsilon \sim 0.1$) траектория описывается эллиптическими функциями Якоби $u \sim \mathrm{cn}$, см. [6, 9]. При возрастании коэффициента обратной связи ε колебания приобретают релаксационный характер [8]. Следует отметить, что вследствие весьма слабой зависимости, т.е. постоянства амплитуды $A(\varepsilon)$, кривые $u(\theta, \varepsilon_i)$ практически сливаются вблизи точек максимумов $\theta = 0$ и минимумов $\theta = 1/2 \pmod 1$.

На фиг. 3 представлено семейство предельных циклов, отвечающих указанным значениям коэффициента $\varepsilon = \varepsilon_i$. При возрастании ε наблюдается резкое проявление ре-



Фиг. 3

лаксационного характера колебаний: относительно длительные участки движения с малой скоростью, которые сменяются относительно короткими участками движения с большой скоростью, максимум которых также резко возрастает с увеличением ε.

Аналогичные вышеизложенным расчеты были проведены для случая более сильной, чем u^3 нелинейности возвращающей силы $k = 3$, что отвечает u^5 вместо u^3 в уравнениях (1.2), (1.3), (2.1).

Из анализа автоколебаний для различных k и ε следуют качественные выводы.

1. Амплитуда автоколебаний $A(\varepsilon)$ слабо зависит от параметра ε. При возрастании показателя степени $k \to \infty$, как следует из (2.3), $A \to (3)^{1/2}$. С хорошей для приложений точностью величина $A(\varepsilon)$ может быть определена из условия энергетического баланса (2.2), см. (2.3).

2. Период автоколебаний $T(\varepsilon)$ и максимальное значение скорости u' – резко возрастающие функции ε; асимптотику при $\varepsilon \to \infty$ см. в [8].

3. Сравнение предельных циклов при достаточно больших значениях коэффициента ε ($\varepsilon \sim 10$) свидетельствует, что на их форму относительно слабое влияние оказывает характер возвращающей силы ($k = 1, 2, 3,\ldots$). Этот факт следует, по-видимому, из асимптотического анализа [5, 8].

4. Изложенный численно-аналитический метод позволяет также эффективно строить неустойчивые и полуустойчивые предельные циклы для осцилляторов с другими механизмами возбуждения автоколебаний [2–5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00252, 02-01-00157).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харкевич А.А.* Автоколебания. М.: Гостехиздат, 1953. 170 с.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
3. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
4. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 388 с.
5. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
6. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 778 с.
7. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.
8. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 248 с.
9. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
10. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
11. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
12. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В., Шматков А.М.* Обобщенные параметрические колебания механических систем // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 746–756.

Москва

Поступила в редакцию
20.06.2000