МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2002

УДК 531.011

© 2002 г. М.А. ЧУЕВ

ПРОГРАММНЫЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Получены дифференциальные и интегральные вариационные принципы и все формы уравнений движения механической системы, удовлетворяющей программе, состоящей из дифференциальных уравнений любого (конечного) порядка, неинтегрируемость которых не предполагается, но и не исключается.

1. Введение. Пусть N – число материальных точек механической системы, $q = (q_1, \ldots, q_n)$ – обобщенные координаты, n – их число, l – число дополнительных условий, которым должна удовлетворять при своем движении механическая система $(0 \leqslant l < n)$, $i, \sigma = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, N$; $\mu = 1, \ldots, l$, а по немым индексам предполагается суммирование в указанных пределах. Условия вида

$$A_{\mu i}(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(k-1)}{q})\overset{(k)}{q}_i + A_\mu(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(k-1)}{q}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rang} \|A_{\mu i}\| = l, \; k \geqslant 0$$

называют программой движения механической системы, если предполагается существование не единственного способа их реализации. При $k = 0$ под программой (1.1) следует понимать программу $f_\mu(t, q) = 0$, $\operatorname{rang}\left\|\partial f_\mu / \partial q_i\right\| = l$.

Предполагается, что уравнения (1.1) могут допускать понижение порядка и даже полностью интегрироваться, однако и случай, когда ни одно из уравнений (1.1) не допускает понижения порядка, также не исключается. Иными словами, неголономность (1.1) в общем случае не предполагается.

При $k \leqslant 2$ (1.1) считается программой первого класса, а при $k > 2$ – программой второго класса. Аналогичная классификация была предложена Делассю [1] для случая неголономных связей вида (1.1).

Связи, сервосвязи и программа движения могут быть представлены одной и той же системой дифференциальных или конечных уравнений, однако связи и сервосвязи предполагают единственную их реализацию, тогда как программа движения может быть реализована, в принципе, бесконечным числом способов.

Программа (1.1) считается реализованной в общем случае, если она выполняется без ограничений на начальные условия

$$q = q_0, \; \dot{q} = \dot{q}_0, \ldots, \; \overset{(k-1)}{q} = \overset{(k-1)}{q_0} \tag{1.2}$$

и вид функций $A_{\mu i}$ и A_μ. Проблема реализации программы (1.1) распадается на две самостоятельные задачи.

Задача 1. Получить управляющие силы $u_i = u_i(t)$, обеспечивающие выполнение программы (1.1) в общем случае при отсутствии возмущений.

Задача 2. Создание системы управления, которая бы при действии возмущающих факторов обеспечивала выполнение программы (1.1) с заранее заданной точностью.

К числу возмущающих факторов следует отнести неточное задание начальных условий, неточное определение геометрических и динамических характеристик механической системы, неточное воспроизведение полученных в задаче 1 управляющих сил $u_i(t)$ и другие порой трудно учитываемые факторы.

А. Беген [2] обратил внимание на то, что при работе некоторых механизмов выполняются условия

$$A_{\mu i}(t,q)\dot{q}_i + A_\mu(t,q) = 0, \ \mathrm{rang}\left\|A_{\mu i}\right\| = l \tag{1.3}$$

однако возможные перемещения удовлетворяют не условиям

$$A_{\mu i}\,\delta q_i = 0 \tag{1.4}$$

а условиям

$$B_{\mu i}\delta q_i = 0, \ \ B = \left\|B_{\mu i}\right\|, \ \mathrm{rang}\,B = l, \ \ B \neq A \tag{1.5}$$

Такого типа механизмы Беген назвал сервомеханизмами, а условия (1.3) – сервосвязями. Дифференциальные уравнения движения механической системы в случае сервосвязей (1.3) Беген представил в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + B_{\mu i}\lambda_\mu \tag{1.6}$$

В случае решения задачи анализа действующего сервомеханизма $B_{\mu i}$ следует рассматривать как вполне определенные функции, тогда как в случае синтеза сервомеханизма $B_{\mu i}$ – произвольные функции, вид которых должен выбрать исследователь–проектировщик. При этом случай $B = A$ не исключается и поэтому уравнения Бегена (1.6) следует рассматривать как обобщение уравнений Лагранжа и на случай неидеальных связей вида (1.3). Однако более интересна вторая трактовка этих уравнений: поскольку разным B в (1.6) соответствуют и разные реализации (1.3), уравнения Бегена (1.6) следует рассматривать как дифференциальные уравнения управляемых (программных) движений механической системы, а условия (1.3) – как программу ее движения.

В случае любого вида программ первого класса дифференциальные уравнения движения механической системы имеют вид (1.6), где $B_{\mu i} = B_{\mu i}(t,q,\dot{q})$.

Ставится задача: для программы (1.1) получить обобщенные уравнения Бегена порядка $s \geqslant k$, которые бы при $s = 2$ переходили в (1.6).

2. Дифференциальные уравнения программных движений механической системы. Программа второго класса не может быть реализована в общем случае с помощью уравнений

$$m_j\ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_j(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{R}_j(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}), \ \ \mathbf{r} = (\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N) \tag{2.1}$$

поскольку при произвольных начальных условиях $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$ "дополнительные" начальные условия $\overset{(\nu)}{\mathbf{r}}_0$ $(\nu = 2,\ldots,k-1)$, а следовательно и "дополнительные" начальные условия

$$\overset{(\nu)}{q}_0 \ \ (\nu = 2,\ldots,k-1),$$

в силу (2.1) и их производных по времени не будут произвольными. Иными словами, программу второго класса нельзя реализовать в общем случае с помощью реакций связей – результат, полученный Деляссю для случая неголономных связей второго класса вида (1.1).

Для реализации программы (1.1) второго класса в общем случае дополнительные начальные условия должны быть произвольными, что обеспечивается введением управляющих сил вида

$$u_j^{(s-2)} = \sum_{\upsilon=0}^{s-3} \frac{\boldsymbol{\alpha}_{j\upsilon}}{\upsilon\,!} t^{\upsilon}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_{j\upsilon}$ – константы, значения которых определяются по выбранным значениям дополнительных начальных условий.

Дифференциальные уравнения движения механической системы в случае программы вида (1.1) следует представить в виде

$$m_j \ddot{r}_j = F_j + R_j + u_j^{(s-2)} \tag{2.2}$$

а после $(s-2)$-кратного дифференцирования по времени в виде

$$m_j \overset{(s)}{\mathbf{r}}_j = \overset{(s-2)}{\mathbf{F}}_j + \overset{(s-2)}{\mathbf{R}}_j \tag{2.3}$$

В (2.3) и (1.1) имеется несоответствие числа неизвестных функций и числа уравнений, которое устраняется в два этапа.

1. Умножая (2.3) скалярно на $\partial \mathbf{r}_j/\partial q_i$ и суммируя по j, получают

$$S_i = m_j \overset{(s)}{\mathbf{r}}_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} - Q_i' - D_i' = 0, \quad \overset{(s-2)}{\mathbf{F}}_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = Q_i'(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(s\_1)}{q}) \tag{2.4}$$

функции известные – "обобщенные силы":

$$\overset{(s-2)}{\mathbf{R}}_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = D_i'(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(s-1)}{q})$$

функции неизвестные – "обобщенные силы" программы движения.

2. Уравнения (2.4) и (1.1) также имеют несоответствие числа уравнений и числа неизвестных функций, которое устраняется введением вместо n неизвестных функций D_i' l новых неизвестных функций $\lambda_\mu(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(s-1)}{q})$ с помощью простейшей зависимости – линейной однородной $D_i' = B_{\mu i}(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(s-1)}{q})\lambda_\mu$, $\operatorname{rang}\left\|B_{\mu i}\right\| = l$, где функции $B_{\mu i}$ выбирает исследователь, что и гарантирует существование бесконечного множества вариантов реализации программы (1.1).

Итак, дифференциальные уравнения программных движений механической системы представляют в промежуточной форме

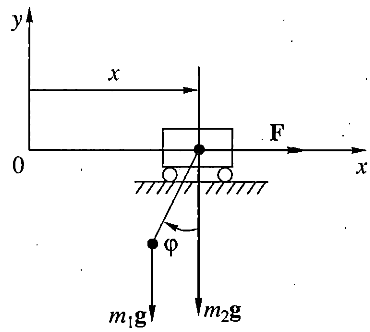
$$m_j \overset{(s)}{\mathbf{r}}_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = Q_i' + B_{\mu i}\lambda_{\mu,} = Q_i'' \tag{2.5}$$

С помощью тождества [3]

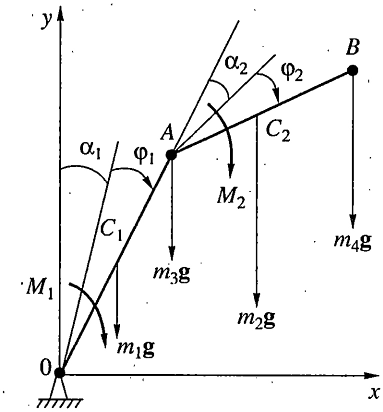
$$\frac{\partial \overset{(k)}{V}}{\partial \overset{(r)}{q}_i} = \sum_{\gamma=0}^{k} C_k^{\gamma} \frac{d^{k-\gamma}}{dt^{k-\gamma}} \frac{\partial V}{\partial_{q_i}^{(r-\gamma)}}, \quad V = V(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(m)}{q}); \quad m \geqslant 0 \tag{2.6}$$

где V – скалярная или векторная функция, уравнения (2.5) приводятся к одному из следующих видов

$$\sum_{r=0}^{p} (-1)^r \frac{p!(s-p-r)!}{(p-r)!(s-p)!} \frac{d^{p-r}}{dt^{p-r}} \frac{\partial T_{s-p}}{\partial \overset{(s-p-r)}{q}_i} = Q_i'', \quad p = 0, 1, \ldots, \left[\frac{s}{2}\right] \tag{2.7}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $[s/2]$ – целая часть числа $s/2$: $T_{s-p} = \frac{1}{2} m_j \left(\overset{(s-p)}{\mathbf{r}_j} \right)^2$ – $(s-p)$ – энергия механической системы. Для частного случая ($B = A$) (2.7) получены в [4].

Особый интерес представляют "симметричные" формы уравнений (2.7), которые получаются из (2.7) при $p = 0$ (при четном или нечетном s):

$$\partial T_s / \partial \overset{(s)}{q_i} = Q_i'' \tag{2.8}$$

и при $s = 2m$:

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{d^{m-r}}{dt^{m-r}} \frac{\partial T_m}{\partial \overset{(m-r)}{q_i}} = Q_i'' \tag{2.9}$$

При $s = 2m$ с помощью тождества (2.6) уравнения (2.5) также приводятся к виду

$$\sum_{r=0}^{s} (-1)^r \frac{d^{s-r}}{dt^{s-r}} \frac{\partial V_{0s}}{\partial \overset{(s-r)}{q_i}} = Q_i'', \quad V_{0s} = \frac{1}{2} m_j \mathbf{r}_j \overset{(s)}{\mathbf{r}_j} \tag{2.10}$$

($0s$)-вириал механической системы.

Уравнения (2.10) или любая из форм уравнений (2.7) являются дифференциальными уравнениями программных движений механической системы.

Находят

$$\frac{\partial S_i}{\partial \overset{(s)}{q_\sigma}} = m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_\sigma} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} = a_{\sigma i}(t, q)$$

коэффициенты квадратичной формы кинетической энергии механической системы, удовлетворяющие условию $\det \|a_{\sigma i}\| > 0$, так что полученные дифференциальные уравнения программных движений механической системы линейны относительно $\overset{(s)}{q_i}$ и всегда разрешимы относительно $\overset{(s)}{q_i}$. Поскольку $\operatorname{rang} B = l$, уравнения программных движений механической системы разрешимы и относительно λ_μ, так что имеется полная аналогия с классической аналитической механикой, что и гарантирует возможность нахождения явного вида функций $D_i' = D_i'(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(s-1)}{q})$.

Пример 1. Тележка крана (фиг. 1) может перемещаться по горизонтальным рельсам. К тележке прикреплен трос длиною l, на конце которого укреплен точечный груз массой m_1. Масса тележки m_2, массой троса пренебрегают. При неравномерном движении тележки возникают колебания груза, которые следует погасить к моменту времени T. Эта задача решена в [5], в частности, в предположении, что минимизируется функционал

$$J = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \dddot{\varphi}^2 dt}$$

а φ и x удовлетворяют краевым условиям

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = \ddot{\varphi}(0) = \varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = \ddot{\varphi}(T) = 0 \tag{2.11}$$

$$x(0) = a,\ \ \dot{x}(0) = V_1,\ \ \ddot{x}(0) = \ddot{x}(T) = 0,\ \ x(T) = b,\ \ \dot{x}(T) = V_2$$

и колебания предполагаются малыми.

Для функции $\varphi(t)$ в [5] получена зависимость

$$\varphi = P_7(t) \tag{2.12}$$

где $P_7(t)$ – полином седьмой степени времени t с произвольными коэффициентами.

В случае малых колебаний $x_1 = x - l\varphi$, $y_1 = -l$, $x_2 = x$, $y_2 = 0$, а уравнения Лагранжа (обычные) имеют вид

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_1 l\ddot{\varphi} = F \tag{2.13}$$

$$\ddot{x} = l\ddot{\varphi} + g\varphi \tag{2.14}$$

Уравнение (2.13) служит для определения F, тогда как (2.14) можно рассматривать как программу движения механической системы. При интегрировании (2.14) получают две константы интегрирования, а поскольку условий (2.11), характеризующих движение системы тележка–груз, двенадцать, то дифференциальные уравнения движения должны иметь десятый порядок и в случае уравнений (2.9) $m = 5$. Находят

$$T_5 = \frac{1}{2}m_j\left(\overset{(5)}{\mathbf{r}_j}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\overset{(5)}{x} - l\overset{(5)}{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\overset{(5)}{x}\right)^2$$

где T_5 – 5-энергия механической системы. В соответствии с (2.9) дифференциальные уравнения движения механической системы тележка–груз принимают вид

$$(m_1 + m_2)\overset{(10)}{x} - m_1 l\overset{(10)}{\varphi} = \overset{(8)}{F} + B_1\lambda,\ \ -m_1 l\left(\overset{(10)}{x} - l\overset{(10)}{\varphi}\right) = B_2\lambda \tag{2.15}$$

Поскольку функции B_r выбирает исследователь, полагают $B_1 = 1$, $B_2 = 0$. Тогда первое из уравнений (2.15) служит для определения λ, а второе после 8-кратного интегрирования по времени принимает вид

$$\ddot{x} - l\ddot{\varphi} = gP_7(t) \tag{2.16}$$

Сравнивая (2.14) и (2.16), получают $\varphi = P_7(t)$, т.е. тот же результат, что и в работе [5].

Дифференциальные уравнения программных движений механической системы можно использовать и в тех случаях, когда программа отсутствует ($l = 0$).

Пример 2. Кинематическую схему "механической руки" можно представить в следующем варианте (фиг. 2). Пусть $OA = l_1$, $AB = l_2$, m_1 – масса однородного стержня OA, J_1 – его момент инерции относительно центра масс C_1, m_2 – масса однородного стержня AB, J_2 – его момент инерции относительно центра масс C_2, m_3 – масса электродвигателя (точечная масса), m_4 – масса точки B (например, масса захватывающего устройства и, возможно, переносимой детали). Предполагается, что механизм совершает движение в вертикальной плоскости. Положение механизма определяется углами φ_1 и φ_2, которые предполагаются малыми, а $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$. Пусть движение механизма осуществляется в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, а краевые условия имеют вид

$$\varphi_i(0) = \dot{\varphi}_i(0) = \ddot{\varphi}_i(0) = \ddot{\varphi}_i(T) = \dot{\varphi}_i(T) = 0; \quad \varphi_i(T) = \varphi_{iT} \quad (i = 1, 2) \tag{2.17}$$

Ставится задача: найти зависимость управляющих моментов M_1 и M_2 от времени t, обеспечивающую выполнение условий (2.17).

Решение. В силу малости углов φ_1 и φ_2:

$$x_i = \gamma_{i1}\varphi_1 + \gamma_{i2}\varphi_2 + \gamma_i, \quad y_i = \beta_{i1}\varphi_1 + \beta_{i2}\varphi_2 + \beta_i \quad (i = 1, \ldots, 4)$$

где $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_i, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_i$ – известные константы. Тогда s-энергия механической системы принимает вид

$$T_s = \tfrac{1}{2} A\left(\overset{(s)}{\varphi}_1\right)^2 + B\overset{(s)}{\varphi}_1\overset{(s)}{\varphi}_2 + \tfrac{1}{2} C\left(\overset{(s)}{\varphi}_2\right)^2$$

где A, B и C – известные константы.

Поскольку условий (2.17) двенадцать и $n = 2$, то минимальный порядок дифференциальных уравнений движения механической системы равен шести. Если M_1 и M_2 считать "управляющими силами", то дифференциальные уравнения движения механизма принимают вид $A\overset{(6)}{\varphi}_1 + B\overset{(6)}{\varphi}_2 = 0$, $B\overset{(6)}{\varphi}_1 + C\overset{(6)}{\varphi}_2 = 0$, где $AC - B^2 > 0$ и следовательно $\overset{(6)}{\varphi}_1 = 0$, $\overset{(6)}{\varphi}_2 = 0$, так что

$$\varphi_1 = \sum_{k=0}^{5} \frac{C_k}{k!} t^k, \quad \varphi_2 = \sum_{k=0}^{5} \frac{D_k}{k!} t^k$$

где C_k и D_k – константы интегрирования.

В соответствии с (2.17):

$$\varphi_i = \varphi_{iT}\left(\frac{t}{T}\right)^3\left[6\left(\frac{t}{T}\right)^2 - 15\frac{t}{T} + 10\right] \quad (i = 1, 2)$$

Потенциальная энергия механической системы приводится к виду

$\Pi = -a_1\varphi_1 - a_2\varphi_2$, где a_1 и a_2 – известные константы.

Из (обычных) уравнений Лагранжа находят управляющие моменты

$$M_1 = -a_1 + A\ddot{\varphi}_1 + B\ddot{\varphi}_2 = r_1 Q_3(t) - a_1$$

$$M_2 = -a_2 + B\ddot{\varphi}_1 + C\ddot{\varphi}_2 = r_2 Q_3(t) - a_2$$

где r_1 и r_2 – известные константы, а многочлен $Q_3(t) = t(t/T - 0.5)\,(t/T - 1)$ имеет максимум при $t_1 \approx 0.2T$ и минимум при $t_2 \approx 0.8T$.

3. Дифференциальные и интегральные вариационные принципы механики программных движений. Дифференциальные уравнения программных движений механической системы можно получить из дифференциального вариационного принципа

$$\left(m_j\overset{(s)}{\mathbf{r}}_j - \overset{(s-2)}{\mathbf{F}}_j\right)\delta\overset{(\upsilon)}{\mathbf{r}}_j = 0, \quad k \leqslant \upsilon \leqslant s \tag{3.1}$$

подчинив виртуальные перемещения $\delta\overset{(s)}{q}_1, \ldots, \delta\overset{(s)}{q}_n$ условиям

$$B_{\mu i}(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(s-1)}{q})\,\delta\overset{(\upsilon)}{q}_i = 0, \ \text{rang}\left\|B_{\mu i}\right\| = l, \quad k \leqslant \upsilon \leqslant s$$

При $v = s$ (3.1) переходит в обобщенный принцип Гаусса, полученный для случая неголономных связей вида (1.1) в [6, 7, 8 – с. 138 – 139]; при $v = s - 1$ – в обобщенный принцип Журдена; при $v = s - 2$ – в обобщенный принцип Даламбера–Лагранжа. При остальных значениях v принципы аналогов в классической аналитической механике не имеют.

Если при $s = 2m$ Q_i'' удовлетворяют условиям В.М. Савчина [9], т.е. будут представимы в виде

$$Q_i'' = -\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{d^{m-r}}{dt^{m-r}} \frac{\partial U}{\partial \overset{(m-r)}{q_i}} \qquad U = H_i(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(m-1)}{q}) \overset{(m)}{q_i} + H(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(m-1)}{q}) \tag{3.2}$$

то имеют место два интегральных вариационных принципа механики программных движений

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_m + U) dt = 0, \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} (V_{os} + (-1)^m U) dt = 0 \tag{3.3}$$

которые при $s = 2$ переходят соответственно в принцип Остроградского–Гамильтона и в вириальный вариационный принцип [10].

Следует отметить, что (3.1) и (3.3) не являются в полном смысле принципами механики, поскольку они справедливы лишь для управляемых механических систем в случае программ второго класса.

4. Краткая историческая справка. В основу данной работы положены методы исследования механических систем, подчиненных сервосвязям, и методы механики неголономных систем. Обзор ранних исследований, посвященных уравнениям движения механической системы в случае неголономных связей высшего порядка вида (1.1) можно найти, например, в работе [11], автор которой приходит к выводу, что эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + A_{\mu i}(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(k-1)}{q})\lambda_\mu \tag{4.1}$$

Однако (4.1) нельзя считать уравнениями движения, поскольку порядок каждого из них неизвестен (неизвестен наивысший порядок r производных $\overset{(r)}{q_i}$ в $A_{\mu i}$) и функциональная независимость (4.1) ничем не гарантирована. Более основательно некорректность (4.1) обоснована в работе [12].

Дифференциальные уравнения высших порядков в механику ввел М.В. Остроградский [13]. Записав необходимые условия стационарности функционала

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(m)}{q}) dt$$

в виде

$$\sum_{\gamma=0}^{m} (-1)^\gamma \frac{d^{m-\gamma}}{dt^{m-\gamma}} \frac{\partial F}{\partial \overset{(m-\gamma)}{q_i}} = 0 \tag{4.2}$$

М.В. Остроградский представил (4.2) в канонической форме и обобщил теорему Гамильтона–Якоби на случай этих уравнений. Эту теорию позже стали называть механикой Остроградского.

Если F – функция Лагранжа механической системы, то (4.2) – уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил, так что в общем случае уравнения (4.2) следует рассматривать как уравнения механики Остроградского в случае потенциальных (в смысле (3.2)) сил.

5. Некоторые выводы. *1.* Уравнения (2.9) следует рассматривать как обобщение уравнений механики Остроградского и на случай не обобщенно-потенциальных сил.

2. Поскольку условия (1.1) второго класса могут быть реализованы лишь при ненулевых управляющих силах, т.е. не могут быть реализованы только с помощью реакций, нет смысла рассматривать неголономные связи второго класса.

3. Полная интегрируемость некоторых из уравнений (1.1) сказывается лишь на количестве обобщенных координат, а не на методе составления дифференциальных уравнений движения механической системы. Если же учесть, что обычно неинтегрируемость дифференциальных связей доказать трудно (пример – условие Гриоли $p\dot{q} - q\dot{p} + r(p^2 + q^2) - \lambda(p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} = 0$, проинтегрированное в [14]), в аналитическую механику понятие неголономных связей вводить не следует.

В подтверждение последнего мнения можно привести и следующие аргументы: примеры нелинейных неголономных связей первого порядка и неголономных связей второго порядка в литературе отсутствуют; существование линейных неголономных связей первого порядка в работе [15] поставлено под сомнение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 02-01-00199, 08-01-00199) и Минобразования РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Delassus E.* Lecons sur la Dynamique des systéms matérielle. Paris: Hermann, 1913.
2. *Беген А.* Теория гироскопических компасов. М: Наука, 1967. 172с.
3. *Чуев М.А.* Некоторые тождества, используемые в механике неголономных систем // Седьмая научно-техн. конф., посвящ. 112-й годовщ. со дня рожд. В.И. Ленина. Калуга, 1982. С. 33–34.
4. *Чуев М.А.* К аналитической теории управления движениями космического летательного аппарата // Тр. 10-х Чтений К.Э. Циолковского. Секц. "Механика космического полета". М. 1976. С. 41–49.
5. *Геронимус Я.Л., Перельмутер М.М.* О некоторых методах определения оптимального закона движения, рассматриваемого как управляющее воздействие // Машиностроение. 1966. № 6. С. 16–24.
6. *Чуев М.А.* К вопросу аналитического метода синтеза механизма // Изв. вузов. Машиностроение. 1974. № 8. С. 165–167.
7. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // ДАН СССР. 1983. № 6. С. 1328–1330.
8. *Чуев М.А.* Метод неполного интеграла в механике неголономных систем // В.В. Добронравов. Основы аналитической механики. М.: Высш. шк., 1976. С. 129–139.
9. *Савчин В.М.* Определение уравнений движения в форме Лагранжа–Остроградского. М., 1984. 6с. – Деп. в ВИНИТИ 13.01.1984. № 326–84.
10. *Чуев М.А.* Об одной форме уравнений движения механической системы // Шестая научно-техн.конф., посвящ. 110-й годовщ. со дня рожд. В.И. Ленина. Калуга, 1980. С. 45–47.
11. *Маслов Ю.Н.* О неголономных системах с нелинейными связями // Науч. тр. Таш. ГУ им. В.И. Ленина. 1964. Вып. 242. С. 37–47.
12. *Чуев М.А.* К аналитической теории управления движениями космического летательного аппарата I // Тр. 9-х Чтений К.Э. Циолковского. Секц. "Механика космического полета". М. 1975. С. 67–80.
13. *Остроградский М.В.* Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметрической задаче // Полное собрание трудов. Киев: Изд-во АН УССР. 1961. Т. 2. С. 139–233.
14. *Лоенко Ю.М.* Некоторые вопросы управления движением механических систем: Дисс. к.ф.–м.наук: 01.02.01. М.: УДН им. П. Лумумбы. 1976. 141 с.
15. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1988. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.

Калуга

Поступила в редакцию
20.04.2000