

УДК 531.36

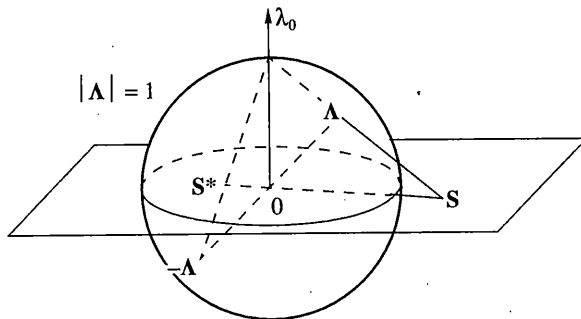
© 2002 г. К.Г. ПЕТРОВ, А.А. ТИХОНОВ

**УРАВНЕНИЯ РОТАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДОГО ТЕЛА, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ
КВАТЕРНИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ**

Построены четыре варианта уравнений ротационного движения твердого тела, допускающие, подобно системе уравнений Белецкого – Черноусько, разделение переменных на быстрые и медленные переменные и отличающиеся от последней применением параметров Родрига – Гамильтона и s -параметров (модифицированных параметров Родрига – Гамильтона) вместо углов Эйлера. Построенные таким образом системы уравнений пригодны как для аналитического исследования ротационного движения, так и для его численного моделирования. В последнем случае их применение более предпочтительно, поскольку, в отличие от уравнений Белецкого – Черноусько, они не содержат тригонометрических функций и сингулярностей, связанных с быстрыми переменными, а две из построенных систем также не содержат тригонометрических функций и сингулярностей, связанных с медленными переменными. Показано также, что вопреки существующему мнению о том, что s -параметры пригодны для описания только либрационного движения и поворотов на малые углы, в действительности s -параметры вполне пригодны также и для описания ротационного движения тела.

1. Введение. Для описания вращательного движения твердого тела относительно его центра масс обычно используются в качестве переменных, определяющих ориентацию тела, углы Эйлера или различные варианты "самолетных" углов. Представление ориентации тела в этих переменных обладает хорошей наглядностью. Однако исследование с помощью ЭВМ математических моделей вращательного движения тела в таких параметризациях сопряжено с определенными трудностями, поскольку в результате приведения дифференциальных систем к нормальной форме правые части оказываются сложными трансцендентными функциями углов, что приводит к значительному увеличению времени машинного счета. Кроме того, правые части оказываются сингулярными в области определения параметров, что создает дополнительные препятствия при компьютерном моделировании. Схема Эйлера – Пуассона, использующая вместо трех углов девять направляющих косинусов, лишена отмеченных недостатков, однако соответствующая математическая модель имеет слишком высокий порядок, вследствие чего также является неудобной для компьютерного моделирования. Для случая динамически симметричного твердого тела удобные уравнения движения в невырождающихся переменных предложены в [1, 2].

Для произвольного твердого тела избежать указанных трудностей позволяет использование четырех параметров Родрига – Гамильтона, подчиненных одному условию нормировки кватерниона, компонентами которого они и являются. Такой подход был использован в [3–7] для определения ориентации спутника "Протон" по данным наблюдений и анализа его вращательного движения. Здесь предлагаются другие подходы для использования параметров Родрига – Гамильтона в динамике ротационного движения твердого тела.



Фиг. 1

Принимая в качестве переменных для описания вращательного движения тела параметров Родрига – Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и безразмерные проекции угловой скорости тела на главные центральные оси инерции, получаем в нормальной форме систему семи дифференциальных уравнений для нахождения семи неизвестных. В частности, в [8] такая система использовалась для описания вращательного движения заряженного твердого тела в геомагнитном поле. В данной работе предлагаются другие две кватернионные формы дифференциальных уравнений вращательного движения твердого тела, предпочтительные для исследования ротационного движения тела. Однако параметры Родрига – Гамильтона не являются минимальными по своему количеству. Для построения математической модели вращательного движения тела, обладающей теми же преимуществами, которые дает использование параметров Родрига – Гамильтона и в то же время минимальной по размерности (т.е. имеющей шестой порядок), в [9] предлагается использовать параметры s_1, s_2, s_3 (называемые в дальнейшем s -параметрами), которые можно рассматривать как результат стереографического проектирования четырехмерной сферы, представляющей множество кватернионов, подчиненных условию нормировки $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, на трехмерную гиперплоскость (фиг. 1), ортогональную оси $O\lambda_0$. Вектор s с координатами s_1, s_2 и s_3 имеет простой физический смысл: его направляющий вектор является направляющим вектором оси конечного поворота тела, а абсолютная величина равна котангенсу одной четверти угла конечного поворота тела.

Для показанного на фиг. 1 варианта отображения с полюсом в точке пересечения сферы $|\Lambda| = 1$ с осью λ_0 параметры s_i ($i = 1, 2, 3$) выражаются через параметры Родрига – Гамильтона согласно равенствам $s_i = \lambda_i / (1 - \lambda_0)$, которые можно записать и в векторной форме $s = \Lambda / (1 - \lambda_0)$, если представить кватернион Λ в виде

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\|^T$$

Поскольку параметры Родрига – Гамильтона связаны с вектором конечного поворота тела формулами $\lambda = \sin(\theta/2)\mathbf{n}$, $\lambda_0 = \cos(\theta/2)$, где \mathbf{n} – орт оси конечного поворота тела, то $s(\theta, \mathbf{n}) = \text{ctg}(\theta/4)\mathbf{n}$, $s(\theta + 2\pi, \mathbf{n}) = -\text{tg}(\theta/4)\mathbf{n}$. Отсюда следует, что векторы s с компонентами s_1, s_2, s_3 и $s^* = -s / |s^2|$ с компонентами $-s_1 / |s^2|$, $-s_2 / |s^2|$, $-s_3 / |s^2|$, где $|s^2| = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, представляют одну и ту же ориентацию твердого тела. На фиг. 1 показаны два кватерниона Λ и $-\Lambda$, задающие одну и ту же ориентацию твердого тела, и соответствующие им векторы s и s^* . Далее с использованием s -параметров выводятся две новые формы дифференциальных урав-

нений вращательного движения твердого тела, удобные для исследования ротационного движения тела.

В настоящей работе рассматривается ротационное движение твердого тела, т.е. такое вращательное движение тела относительно его центра масс (точка C), при котором работа главного момента \mathbf{M} внешних возмущающих сил мала по сравнению с кинетической энергией вращательного движения тела. Этот вид движения твердого тела встречается во многих задачах космодинамики. В условиях ротационного движения ориентацию тела удобно определять с использованием промежуточной подвижной системы координат¹ $CL_1L_2L_3$, ось L_3 которой направлена вдоль кинетического момента \mathbf{L} тела. Пусть $CXYZ$ – кенигова система координат. Введем матрицу \mathbf{P} направляющих косинусов осей $L_1L_2L_3$ относительно осей XYZ . Тогда для проекций вектора \mathbf{L} на оси XYZ будем иметь равенство $\|L_X, L_Y, L_Z\|^T = \mathbf{P} \|0, 0, L\|^T$. Дифференцируя его по времени, запишем теорему об изменении кинетического момента

$$\dot{L}_X = M_X, \quad \dot{L}_Y = M_Y, \quad \dot{L}_Z = M_Z \quad (1.1)$$

в виде

$$\dot{\mathbf{P}} \|0, 0, L\|^T + \mathbf{P} \|0, 0, \dot{L}\|^T = \|M_X, M_Y, M_Z\|^T \quad (1.2)$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{\Omega} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{e3} & \omega_{e2} \\ \omega_{e3} & 0 & -\omega_{e1} \\ -\omega_{e2} & \omega_{e1} & 0 \end{vmatrix}$$

где $\omega_{e1}, \omega_{e2}, \omega_{e3}$ – проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_e$ системы координат $CL_1L_2L_3$ относительно кениговой системы координат $CXYZ$ на оси L_1, L_2, L_3 соответственно. Тогда $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{\Omega}$ и уравнения (1.2) примут вид $\mathbf{P}\mathbf{\Omega} \|0, 0, L\|^T + \mathbf{P} \|0, 0, \dot{L}\|^T = \mathbf{P} \|M_1, M_2, M_3\|^T$, где M_1, M_2, M_3 – проекции момента \mathbf{M} на оси L_1, L_2, L_3 соответственно. Отсюда имеем систему уравнений

$$\dot{L} = M_3, \quad \omega_{e2} = M_1 / L, \quad \omega_{e1} = -M_2 / L \quad (1.3)$$

конкретный вид которых будет зависеть от выбора параметров, определяющих ориентацию системы координат $CL_1L_2L_3$ относительно кениговой системы $CXYZ$. Так, если, следуя [10], использовать для этой цели углы ρ и σ , где ρ – угол отклонения вектора \mathbf{L} (т.е. оси CL_3) от оси CY , а σ – угол между осью CZ и линией пересечения плоскости (X, Z) с плоскостью (Y, L_3, L_1) , то $\boldsymbol{\omega}_e = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}$. В этом случае

$$\omega_{e1} = -\dot{\sigma} \sin \rho, \quad \omega_{e2} = \dot{\rho}, \quad \omega_{e3} = \dot{\sigma} \cos \rho \quad (1.4)$$

и на основании (1.3) получаем следующие динамические уравнения относительно переменных L, ρ, σ :

$$\dot{L} = M_3, \quad \dot{\rho} = M_1 / L, \quad \dot{\sigma} = M_2 / (L \sin \rho) \quad (1.5)$$

В невозмущенном движении тела, т.е. при отсутствии возмущающего момента \mathbf{M} , кинетический момент \mathbf{L} остается постоянным по величинам и направлению. Влияние возмущающего момента в условиях ротационного движения приводит к медленной эволюции вектора \mathbf{L} в пространстве, вследствие чего величины L, ρ, σ можно рассматривать как оскулирующие элементы.

¹ Здесь и далее все используемые декартовы системы координат – правые ортогональные.

Пусть $Cxyz$ – система главных центральных осей инерции тела. Если определять ориентацию системы координат $Cxyz$ относительно системы координат $CL_1L_2L_3$ с помощью углов Эйлера φ, ψ, ϑ , то ротационное движение тела будет описываться шестью параметрами $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \vartheta$, а теорема об изменении кинетического момента совместно с кинематическими уравнениями Эйлера приводятся к виду известных уравнений Белецкого – Черноушко [10]:

$$L = M_3, \quad \rho = M_1 / L, \quad \sigma = M_2 / (L \sin \rho)$$

$$\dot{\varphi} = L \cos \vartheta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{L \sin \vartheta}$$

$$\dot{\psi} = L \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{L} \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{M_2}{L} \operatorname{ctg} \rho \quad (1.6)$$

$$\dot{\vartheta} = L \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi}{L}$$

Здесь A, B, C – главные центральные моменты инерции тела. В условиях ротационного движения, т.е. при выполнении неравенства $|\mathbf{L}|/A_0 \gg |\mathbf{M}|/|\mathbf{L}|$, где A_0 – характерный момент инерции тела, в дифференциальной системе (1.6) переменные L, ρ, σ изменяются медленно, а φ, ψ, ϑ – быстро, что позволяет применять к системе (1.6) приближенные асимптотические методы исследования движения.

2. Первая форма уравнений ротационного движения. Если определять ориентацию тела, т.е. системы координат $Cxyz$, относительно системы координат $CL_1L_2L_3$ с помощью параметров Родрига – Гамильтона, то матрица $\mathbf{A} = (A_{ij})$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) направляющих косинусов углов между этими осями будет иметь вид [11]:

Таблица 1

	x	y	z
L_1	$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2$	$2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3)$	$2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2)$
L_2	$2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3)$	$\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2$	$2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1)$
L_3	$2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2)$	$2(\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3)$	$\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2$

Введем абсолютную угловую скорость тела

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r \quad (2.1)$$

обозначив через $\boldsymbol{\omega}_r$ угловую скорость тела относительно системы координат $CL_1L_2L_3$.

Кинематические уравнения в параметрах Родрига – Гамильтона имеют вид

$$2\dot{\lambda}_0 = -\omega_{rx}\lambda_1 - \omega_{ry}\lambda_2 - \omega_{rz}\lambda_3$$

$$2\dot{\lambda}_1 = \omega_{rx}\lambda_0 - \omega_{ry}\lambda_3 + \omega_{rz}\lambda_2$$

$$2\dot{\lambda}_2 = \omega_{rx}\lambda_3 + \omega_{ry}\lambda_0 - \omega_{rz}\lambda_1$$

$$2\dot{\lambda}_3 = -\omega_{rx}\lambda_2 + \omega_{ry}\lambda_1 + \omega_{rz}\lambda_0$$

Поскольку

$$L_x = A\omega_x = LA_{31}, \quad L_y = B\omega_y = LA_{32}, \quad L_z = C\omega_z = LA_{33} \quad (2.2)$$

то на основании (2.1) получим

$$\begin{aligned}
 2\dot{\lambda}_0 &= -L \left(\frac{A_{31}\lambda_1}{A} + \frac{A_{32}\lambda_1}{B} + \frac{A_{33}\lambda_1}{C} \right) + (\omega_{ex}\lambda_1 + \omega_{ey}\lambda_2 + \omega_{ez}\lambda_3) \\
 2\dot{\lambda}_1 &= L \left(\frac{A_{31}\lambda_0}{A} - \frac{A_{32}\lambda_3}{B} + \frac{A_{33}\lambda_2}{C} \right) - (\omega_{ex}\lambda_0 - \omega_{ey}\lambda_3 + \omega_{ez}\lambda_2) \\
 2\dot{\lambda}_2 &= L \left(\frac{A_{31}\lambda_3}{A} + \frac{A_{32}\lambda_0}{B} - \frac{A_{33}\lambda_1}{C} \right) - (\omega_{ex}\lambda_3 + \omega_{ey}\lambda_0 - \omega_{ez}\lambda_1) \\
 2\dot{\lambda}_3 &= L \left(-\frac{A_{31}\lambda_2}{A} + \frac{A_{32}\lambda_1}{B} + \frac{A_{33}\lambda_0}{C} \right) - (\omega_{ex}\lambda_0 + \omega_{ey}\lambda_1 - \omega_{ez}\lambda_2)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Если в качестве параметров, определяющих ориентацию кениговой системы координат, использовать углы ρ и σ , то

$$\begin{aligned}
 \omega_{ex} &= \dot{\rho}A_{21} + \dot{\sigma}(A_{31} \cos \rho - A_{11} \sin \rho) \\
 \omega_{ey} &= \dot{\rho}A_{22} + \dot{\sigma}(A_{32} \cos \rho - A_{12} \sin \rho) \\
 \omega_{ez} &= \dot{\rho}A_{23} + \dot{\sigma}(A_{33} \cos \rho - A_{13} \sin \rho)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставляя $\dot{\rho}$ и $\dot{\sigma}$ из уравнений (1.5) в формулы (2.4), а затем формулы (2.4) в уравнения (2.3), получим искомые уравнения в параметрах Родрига – Гамильтона (A_{31}, A_{32}, A_{33} определяются согласно табл. 1):

$$\begin{aligned}
 2\dot{\lambda}_0 &= -L \left(\frac{A_{31}\lambda_1}{A} + \frac{A_{32}\lambda_1}{B} + \frac{A_{33}\lambda_1}{C} \right) + \frac{M_1}{L} \lambda_2 - \frac{M_2}{L} (\lambda_1 - \lambda_3 \operatorname{ctg} \rho) \\
 2\dot{\lambda}_1 &= L \left(\frac{A_{31}\lambda_0}{A} - \frac{A_{32}\lambda_3}{B} + \frac{A_{33}\lambda_2}{C} \right) - \frac{M_1}{L} \lambda_3 + \frac{M_2}{L} (\lambda_0 + \lambda_2 \operatorname{ctg} \rho) \\
 2\dot{\lambda}_2 &= L \left(\frac{A_{31}\lambda_3}{A} + \frac{A_{32}\lambda_0}{B} - \frac{A_{33}\lambda_1}{C} \right) - \frac{M_1}{L} \lambda_0 - \frac{M_2}{L} (\lambda_3 + \lambda_1 \operatorname{ctg} \rho) \\
 2\dot{\lambda}_3 &= L \left(-\frac{A_{31}\lambda_2}{A} + \frac{A_{32}\lambda_1}{B} + \frac{A_{33}\lambda_0}{C} \right) + \frac{M_1}{L} \lambda_1 - \frac{M_2}{L} (\lambda_2 - \lambda_0 \operatorname{ctg} \rho)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

образующие вместе с уравнениями (1.5) дифференциальную систему 7-го порядка. В ней первые три уравнения в силу выбора переменных L, ρ, σ такие же как в системе (1.6), а последние три уравнения выгодно отличаются от соответствующих уравнений системы (1.6) тем, что они не имеют сингулярности при $\vartheta = 0$ и не содержат трансцендентных функций углов φ, ψ, ϑ .

3. Вторая форма уравнений ротационного движения. Возможна и другая форма записи дифференциальных уравнений ротационного движения твердого тела с использованием параметров Родрига – Гамильтона и отличающаяся от системы (1.5), (2.5) тем, что вместо модуля кинетического момента и двух углов, определяющих направление вектора \mathbf{L} , вводятся другие три медленно изменяющиеся переменные – проекции L_x, L_y, L_z вектора \mathbf{L} на оси кениговой системы координат.

Определим ориентацию тела, т.е. системы координат S_{xyz} , относительно системы координат $SXYZ$ с помощью матрицы $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ направляющих косинусов, выразив их, в свою очередь, через параметры Родрига – Гамильтона λ_i ($i = \overline{0,3}$). Здесь и далее подчеркивание снизу используется для отличия параметров, опреде-

ляющих ориентацию тела в системе координат $CXYZ$, от тех параметров, которые использовались выше для задания ориентации тела в системе координат $CL_1L_2L_3$.

Кинематические уравнения в параметрах λ_i имеют вид

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\omega_x \lambda_1 - \omega_y \lambda_2 - \omega_z \lambda_3 \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \omega_x \lambda_0 - \omega_y \lambda_3 + \omega_z \lambda_2 \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \omega_x \lambda_3 + \omega_y \lambda_0 - \omega_z \lambda_1 \\ 2\dot{\lambda}_3 &= -\omega_x \lambda_2 + \omega_y \lambda_1 + \omega_z \lambda_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_X \\ L_Y \\ L_Z \end{pmatrix} &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

то, разрешая это равенство относительно $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и подставляя в уравнения (3.1), получим искомые кинематические уравнения в параметрах Родрига – Гамильтона

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= \frac{\lambda_1}{A}(A_{11}L_X + A_{21}L_Y + A_{31}L_Z) - \frac{\lambda_2}{B}(A_{12}L_X + A_{22}L_Y + A_{32}L_Z) - \\ &- \frac{\lambda_3}{C}(A_{13}L_X + A_{23}L_Y + A_{33}L_Z) \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \frac{\lambda_0}{A}(A_{11}L_X + A_{21}L_Y + A_{31}L_Z) - \frac{\lambda_3}{B}(A_{12}L_X + A_{22}L_Y + A_{32}L_Z) + \\ &+ \frac{\lambda_2}{C}(A_{13}L_X + A_{23}L_Y + A_{33}L_Z) \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \frac{\lambda_3}{A}(A_{11}L_X + A_{21}L_Y + A_{31}L_Z) + \frac{\lambda_0}{B}(A_{12}L_X + A_{22}L_Y + A_{32}L_Z) - \\ &- \frac{\lambda_1}{C}(A_{13}L_X + A_{23}L_Y + A_{33}L_Z) \\ 2\dot{\lambda}_3 &= -\frac{\lambda_2}{A}(A_{11}L_X + A_{21}L_Y + A_{31}L_Z) + \frac{\lambda_1}{B}(A_{12}L_X + A_{22}L_Y + A_{32}L_Z) + \\ &+ \frac{\lambda_0}{C}(A_{13}L_X + A_{23}L_Y + A_{33}L_Z) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Динамические уравнения (1.1) запишем через проекции возмущающего момента на оси x, y, z в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{L}_X \\ \dot{L}_Y \\ \dot{L}_Z \end{pmatrix}^T = \mathbf{A} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}^T \quad (3.4)$$

Система (3.3), (3.4) не имеет особенностей и не содержит тригонометрических функций и поэтому более предпочтительна, чем система (1.5), (2.5), для численного моделирования на ЭВМ.

4. Третья форма уравнений ротационного движения. Определим ориентацию тела, т.е. системы координат $Cxyz$, относительно системы координат $CL_1L_2L_3$ с помощью матрицы $\mathbf{A} = (A_{ij})$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) направляющих косинусов, выразив их, в свою оче-

	x	y	z
L_1	$(u - 8(s_2^2 + s_3^2))/u$	$4(2s_1s_2 - s_3(s ^2 - 1))/u$	$4(2s_1s_3 + s_2(s ^2 - 1))/u$
L_2	$4(2s_1s_2 + s_3(s ^2 - 1))/u$	$(u - 8(s_1^2 + s_3^2))/u$	$4(2s_2s_3 - s_1(s ^2 - 1))/u$
L_3	$4(2s_1s_3 - s_2(s ^2 - 1))/u$	$4(2s_2s_3 + s_1(s ^2 - 1))/u$	$(u - 8(s_1^2 + s_2^2))/u$

редь, через s -параметры s_1, s_2, s_3 . Следуя [9] и вводя обозначение $u = (|s|^2 + 1)^2$, будем иметь

Кинематические уравнения в s -параметрах имеют вид [9]:

$$\|\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3\|^T = \mathbf{B} \|\omega_{rx}, \omega_{ry}, \omega_{rz}\|^T \quad (4.1)$$

$$\mathbf{B} = (B_{ij}) = \frac{-1}{4} \begin{vmatrix} s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 + 1 & 2(s_1s_2 + s_3) & 2(s_1s_3 - s_2) \\ 2(s_1s_2 - s_3) & -s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 + 1 & 2(s_2s_3 + s_1) \\ 2(s_1s_3 + s_2) & 2(s_2s_3 - s_1) & -s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 + 1 \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

Из (4.1) получаем выражение

$$\|\omega_{rx}, \omega_{ry}, \omega_{rz}\|^T = \mathbf{B}^{-1} \|\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3\|^T \quad (4.3)$$

Поскольку $\|\omega_{e1}, \omega_{e2}, \omega_{e3}\|^T = \mathbf{A} \|\omega_{ex}, \omega_{ey}, \omega_{ez}\|^T$, то на основании (2.1), (2.2) и (4.3) получим

$$\mathbf{A}^T \begin{vmatrix} \omega_{e1} \\ \omega_{e2} \\ \omega_{e3} \end{vmatrix} + \mathbf{B}^{-1} \begin{vmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} LA_{31} / A \\ LA_{32} / B \\ LA_{33} / C \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

Нетрудно проверить, что $\mathbf{B}\mathbf{A}^T = u\mathbf{B}^{-1}/16 = \mathbf{B}^T$. Поэтому, разрешая уравнения (4.4) относительно $\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3$, находим следующую форму записи кинематических уравнений в s -параметрах:

$$\begin{vmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{vmatrix} = \mathbf{LB} \begin{vmatrix} A_{31} / A \\ A_{32} / B \\ A_{33} / C \end{vmatrix} - \mathbf{B}^T \begin{vmatrix} \omega_{e1} \\ \omega_{e2} \\ \omega_{e3} \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

Подставляя (1.4), (1.5) в (4.5), получаем искомые дифференциальные уравнения

$$\begin{vmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{vmatrix} = \mathbf{LB} \begin{vmatrix} A_{31} / A \\ A_{32} / B \\ A_{33} / C \end{vmatrix} - \mathbf{B}^T \begin{vmatrix} -M_2 \\ M_1 \\ M_2 \operatorname{ctg} \rho \end{vmatrix} L^{-1} \quad (4.6)$$

Несколько иначе их можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{vmatrix} = \mathbf{B} \begin{vmatrix} 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 1/B & 0 \\ 0 & 0 & 1/C \end{vmatrix} \mathbf{A}^T \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{vmatrix} - \mathbf{B}^T \begin{vmatrix} -M_2 \\ M_1 \\ M_2 \operatorname{ctg} \rho \end{vmatrix} L^{-1} \quad (4.7)$$

Система (1.5), (4.6) представляет собой дифференциальную систему 6-го порядка. В ней первые три уравнения в силу выбора переменных L, ρ, σ такие же, как в системе (1.6), а последние три уравнения выгодно отличаются от соответствующих уравнений системы (1.6) тем, что они не имеют сингулярности при $\vartheta = 0$ и не содержат трансцендентных функций.

5. Четвертая форма уравнений ротационного движения. Возможна и другая форма записи дифференциальных уравнений ротационного движения твердого тела с использованием s -параметров и отличающаяся от системы (1.5), (4.6) тем, что вместо модуля кинетического момента и двух углов, определяющих направление вектора L , вводятся другие три медленно изменяющиеся переменные – проекции L_x, L_y, L_z вектора L на оси кениговой системы координат.

Определим ориентацию тела, т.е. системы координат $Sxyz$, относительно системы координат $SXYZ$ с помощью матрицы $\underline{A} = A(\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3)$ направляющих косинусов, выразив их в свою очередь, через s -параметры $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3$. Здесь и далее подчеркивание снизу используется для отличия параметров, определяющих ориентацию тела в системе координат $SXYZ$, от тех параметров, которые использовались выше для задания ориентации тела в системе координат $CL_1L_2L_3$.

Кинематические уравнения в \underline{s} -параметрах имеют вид

$$\|\dot{\underline{s}}_1, \dot{\underline{s}}_2, \dot{\underline{s}}_3\|^T = \underline{B} \|\omega_x, \omega_y, \omega_z\|^T \quad (5.1)$$

где $\underline{B} = B(\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3)$ – матрица, определяемая формулой (4.2).

Разрешая равенство (3.2) относительно $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и подставляя их в уравнения (5.1), получим искомые кинематические уравнения в s -параметрах:

$$\|\dot{\underline{s}}_1, \dot{\underline{s}}_2, \dot{\underline{s}}_3\|^T = \underline{B} \begin{pmatrix} 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 1/B & 0 \\ 0 & 0 & 1/C \end{pmatrix} \|\underline{A}^T \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}\|^T \quad (5.2)$$

Динамические уравнения (1.1) запишем через проекции возмущающего момента на оси x, y, z в виде

$$\|\dot{L}_x, \dot{L}_y, \dot{L}_z\|^T = \underline{A} \|\dot{M}_x, \dot{M}_y, \dot{M}_z\|^T \quad (5.3)$$

Система (5.2), (5.3) представляет собой дифференциальную систему 6-го порядка, удобную для описания ротационного движения тела. Эта система не имеет особенностей и не содержит тригонометрических функций и поэтому более предпочтительна, чем система (1.5), (4.6), для численного моделирования на ЭВМ. Решение системы можно интерпретировать непосредственно в s -параметрах, используя оригинальную визуализацию движения, предложенную в [9], или в других, более традиционных параметрах, переходя к ним с помощью приведенной выше таблицы направляющих косинусов. Однако для аналитических исследований ротационного движения тела может оказаться более удобной система (1.5), (4.6), поскольку правые части уравнений (4.6) в явном виде содержат проекции возмущающего момента.

6. Конфигурационное s -пространство свободного твердого тела. Если абсолютно твердое тело свободно, т.е. момент $M = 0$, то вращение этого тела вокруг его центра масс характеризуется постоянным в инерциальном пространстве вектором кинетического момента

$$L = \|L_x, L_y, L_z\|^T = \text{diag}\|A, B, C\| \|\omega_x, \omega_y, \omega_z\|^T \quad (6.1)$$

и постоянной величиной кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \|\omega_x, \omega_y, \omega_z\| \text{diag} \|A, B, C\| \|\omega_x, \omega_y, \omega_z\|^T \quad (6.2)$$

Выражая $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ через L_x, L_y, L_z на основании (6.1) и подставляя в (6.2), получим

$$T = \frac{1}{2} \|L_x, L_y, L_z\| \text{diag} \|A, B, C\| \|L_x, L_y, L_z\|^T \quad (6.3)$$

Принимая во внимание, что проекции вектора L на оси x, y, z и L_1, L_2, L_3 связаны соотношением $\|0, 0, L\|^T = A \|L_x, L_y, L_z\|^T$, запишем выражение (6.3) в виде

$$T = \frac{1}{2} \|0, 0, L\| A \text{diag} \|1/A, 1/B, 1/C\| A^T \|0, 0, L\|^T \quad (6.4)$$

После подстановки в (6.4) элементов матрицы A , выраженных через s_1, s_2, s_3 на основании табл. 2, получаем

$$\begin{aligned} \frac{2T}{L^2} = & \frac{1}{C} + \frac{64}{u^2} \left[\frac{(s_1^2 + s_2^2)^2}{C} + s_3^2 \left(\frac{s_1^2}{A} + \frac{s_2^2}{B} \right) + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (|s|^2 - 1) s_1 s_2 s_3 \right] + \\ & + \frac{16}{u^2} (|s|^2 - 1)^2 \left(\frac{s_1^2}{B} + \frac{s_2^2}{A} \right) - \frac{16}{u} \frac{s_1^2 + s_2^2}{C} \end{aligned} \quad (6.5)$$

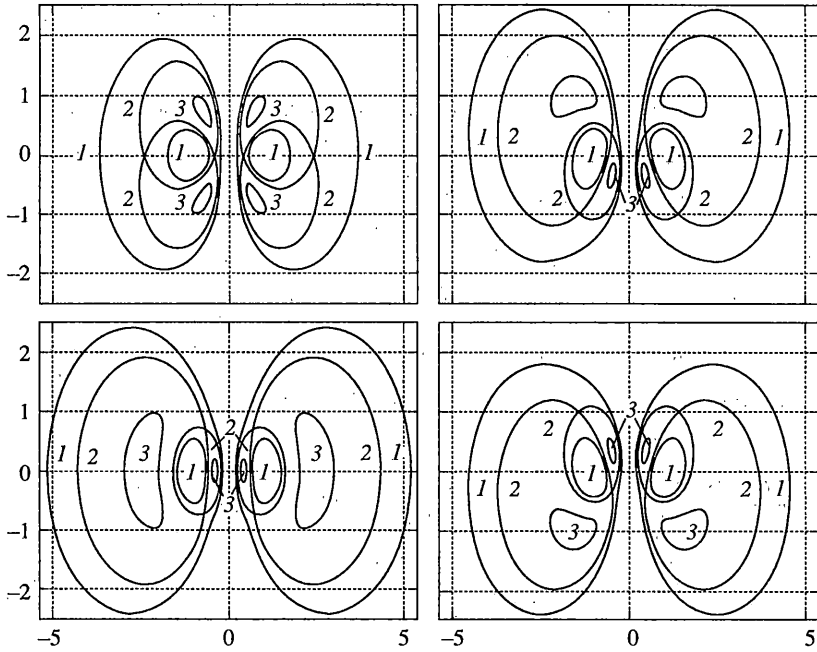
Равенство (6.5) представляет собой интеграл энергии свободного твердого тела, выраженный в s -параметрах. Фиксированным значениям T и L в пространстве s -параметров соответствует поверхность, определяемая в неявном виде соотношением (6.5). Постоянство кинетической энергии свободного твердого тела в процессе движения означает, что s -параметры, определяющие ориентацию этого тела в произвольный момент времени, лежат на указанной поверхности. Таким образом, поверхность (6.5) является конфигурационным пространством свободного твердого тела.

На фиг. 2 показаны сечения поверхности (6.5) плоскостями, проходящими через ось Cs_3 пространства s -параметров под углами $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ к оси Cs_1 при различных значениях параметра $2T/L^2$, изменяющегося в интервале $[1/A; 1/C]$. Для расчетов были взяты значения $A = 5, B = 4, C = 3$. Номера кривых (1–3), показанных в сечении, соответствуют следующим значениям параметра $2T/L^2$: 0.21, 0.25, 0.27.

Видно, что при заданных моментах инерции и произвольном фиксированном значении параметра $2T/L^2$ конфигурационное пространство свободного твердого тела представляет собой пару замкнутых ограниченных поверхностей (соответствующих двум эквивалентным наборам s -параметров s и s^*), топологически эквивалентных тору. Таким образом, при вращении свободного твердого тела абсолютные величины s -параметров ограничены. Неограниченный рост абсолютных величин s -параметров возможен только в случае, когда $2T/L^2 = 1/C$ и начальные значения s -параметров лежат на оси Cs_3 . Это неудобство, однако, легко преодолимо. Для этого достаточно сменить, направления главных центральных осей инерции x и z или y и z на противоположные. При этом кинетическая энергия тела сохранит свое значение, а изображающая точка будет двигаться по окружности единичного радиуса, с центром в точке C , лежащей в плоскости $Cs_1 s_2$.

7. Интегрирование уравнений вращательного движения динамически симметричного твердого тела. Рассмотрим важный для практических приложений случай динамически симметричного твердого тела. Пусть $A = B \neq C$. Тогда интеграл энергии примет вид

$$\frac{2T}{L^2} = \frac{1}{C} + \frac{16}{u^2} (s_1^2 + s_2^2) \left[\frac{(|s|^2 - 1)^2 + 4s_3^2}{A} + \frac{4(s_1^2 + s_2^2) - u}{C} \right] \quad (7.1)$$



Фи. 2

Нетрудно проверить, что конфигурационное пространство, определяемое соотношением (7.1), представляет собой два правильных тора, вложенных один в другой. Каждый из них можно запараметризовать углами α и β в виде

$$s_1 = \frac{\cos \beta}{\sin \theta_0} (1 + \cos \theta_0 \cos \alpha), \quad s_2 = \frac{\sin \beta}{\sin \theta_0} (1 + \cos \theta_0 \cos \alpha), \quad s_3 = \operatorname{ctg} \theta_0 \sin \alpha \quad (7.2)$$

где $\alpha \in [-\pi; \pi]$, $\beta \in [0; 2\pi]$. Параметр $\theta_0 \in (0; \pi/2)$, определяемый соотношением

$$\sin^2 2\theta_0 = (2T/L^2 - 1/C)/(1/A - 1/C) \quad (7.3)$$

получающимся в результате подстановки (7.2) в (7.1), имеет два различных значения, лежащих в пределах от 0 до $\pi/2$ и определяющих форму торов (7.1). Для нахождения зависимостей углов α и β от времени воспользуемся кинематическими уравнениями (4.7), которые в случае свободного твердого тела имеют вид

$$\begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{pmatrix} = LB \begin{pmatrix} 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 1/B & 0 \\ 0 & 0 & 1/C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A^T \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда, после подстановки выражений компонент матриц A и B через s -параметры, будем иметь

$$\begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{pmatrix} = \frac{L}{u} \begin{pmatrix} -\frac{s_2(|s|^2 - 1)^2 + 4s_1s_3|s|^2}{A} + 4(s_1s_3 - s_2) \left(\frac{s_3^2}{A} + \frac{s_1^2 + s_2^2}{C} \right) \\ -\frac{s_1(|s|^2 - 1)^2 + 4s_2s_3|s|^2}{A} + 4(s_2s_3 + s_1) \left(\frac{s_3^2}{A} + \frac{s_1^2 + s_2^2}{C} \right) \\ 2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right) (s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 - 1)(s_1^2 + s_2^2) \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{L}{4C} \left\| \begin{array}{l} -2(s_1 s_3 - s_2) \\ -2(s_2 s_3 + s_1) \\ s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 - 1 \end{array} \right\| \quad (7.4)$$

Подставляя в правую часть уравнений (7.4) параметризацию тора (7.2), запишем эти уравнения в виде

$$\left\| \begin{array}{l} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{array} \right\| = \frac{L}{2} (1 + \cos \theta_0 \cos \alpha) \left\| \begin{array}{l} -\kappa_2 \sin \beta - \frac{\kappa_1 \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \sin \alpha \cos \beta \\ \frac{\kappa_2}{\sin \theta_0} \cos \beta - \frac{\kappa_1 \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \sin \alpha \sin \beta \\ \frac{\kappa_1 \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \cos \alpha \end{array} \right\| \quad (7.5)$$

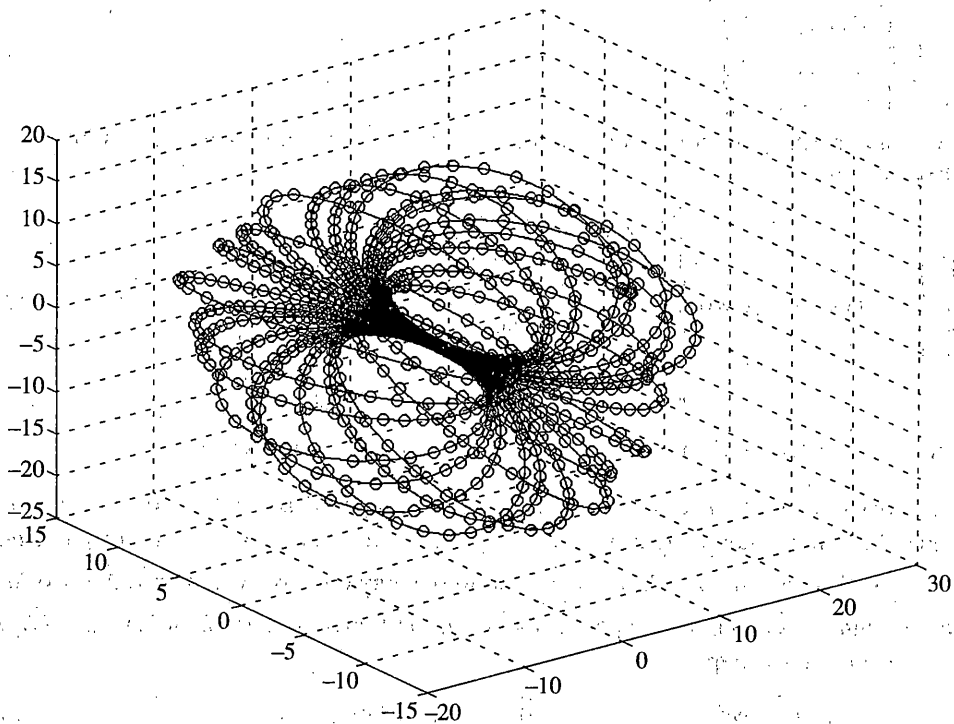
$$\kappa_1 = 2 \sin^2 \theta_0 (A^{-1} - C^{-1}) + C^{-1}, \quad \kappa_2 = 2(A^{-1} \cos^2 \theta_0 + C^{-1} \sin^2 \theta_0) - C^{-1}$$

где постоянные $\sin^2 \theta_0$ и $\cos^2 \theta_0$ можно выразить через T , L , A и C на основании (7.3). Продифференцировав по времени формулы (7.2), подставим \dot{s}_1 , \dot{s}_2 , \dot{s}_3 , выраженные через $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$, в уравнения (7.5). Разрешая полученную систему относительно $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$, получим дифференциальные уравнения $\dot{\alpha} = L\kappa_1(1 + \cos \theta_0 \cos \alpha)/(2 \sin \theta_0)$, $\dot{\beta} = L\kappa_2/2$, которые легко интегрируются

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0}} \operatorname{tg} \left[\frac{L\kappa_1}{4} (t + t_0) \right] \right\}, \quad \beta = \beta_0 + \frac{L\kappa_2}{2} t \quad (7.6)$$

Из формул (7.5) следует, что параметр α изменяется во времени периодически с периодом $T_\alpha = 4\pi/(L\kappa_1)$. Параметр β также является T_β -периодической функцией времени, поскольку $\beta \in [0; 2\pi]$ (по определению) и при достижении значения 2π угол β скачком переходит к значению 0. При этом $T_\beta = 4\pi/(L\kappa_2)$. Периоды T_α и T_β , вообще говоря, несоизмеримы и поэтому траектория изображающей точки вращающегося твердого тела покрывает конфигурационное пространство всюду плотно.

8. Особенности s -параметризации. Анализ и выводы. Как известно, любое трехпараметрическое представление ориентации твердого тела не свободно от особенностей. Это обстоятельство распространяется и на представление ориентации твердого тела в s -параметрах (см. п. 6). Преимуществом s -параметров в этом смысле можно считать то, что эта параметризация имеет единственную особую точку – полюс отображения единичной сферы в четырехмерном пространстве кватернионов на трехмерную гиперплоскость s -параметров. Так что, вообще говоря, при движении твердого тела возможна ситуация, когда точка четырехмерной единичной сферы, изображающей ориентацию твердого тела, приближается к полюсу упомянутого отображения. В этом случае будет наблюдаться неограниченный рост абсолютной величины вектора s -параметров. Однако проведенное в п. 6 рассмотрение в s -параметрах вращательного движения свободного твердого тела показывает, что попадание изображающей точки в полюс отображения в процессе движения является исключительной ситуацией, требующей особых начальных условий. Множество этих начальных условий в пространстве s -параметров имеет нулевую меру и поэтому вероятность попадания изображающей точки в полюс равна нулю. Существенные неприятности, связанные с большими значениями модуля s -вектора при данном выборе систем координат возможны в тех случаях, когда кинетическая энергия близка к максимальному значению (в невозмущенном движении это соответствует $2T/L^2 = 1/C$), а начальные значения s -параметров близки к точкам, лежащим на оси Cs_3 . Однако указанное обстоятельство



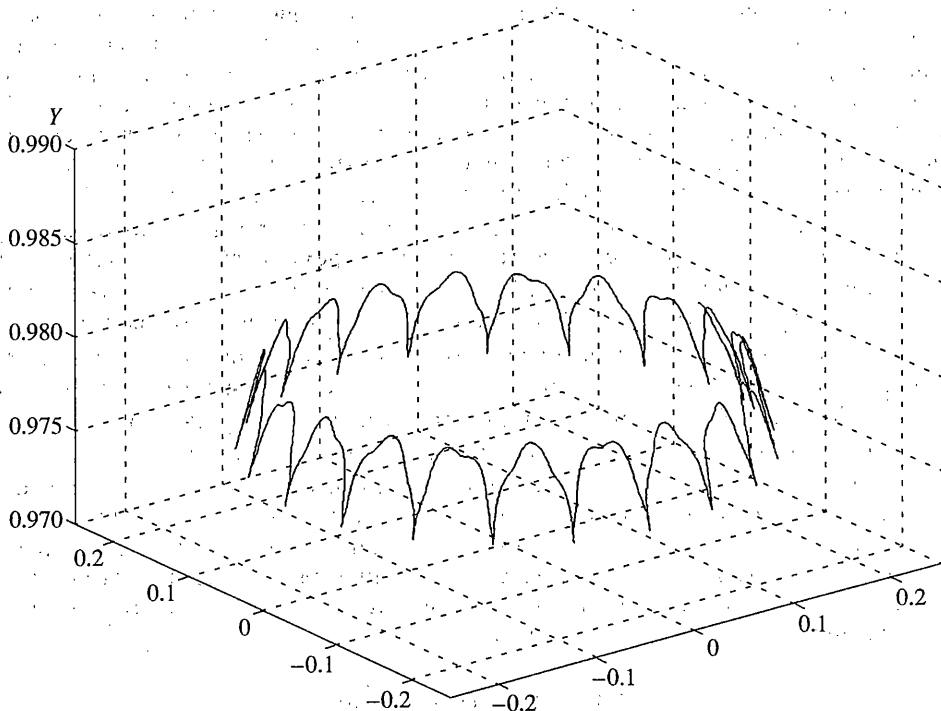
Фиг. 3

легко преодолимо. Достаточно систему s -параметров ввести так, чтобы ориентация, соответствующая полюсу отображения s -параметров, находилась по возможности дальше от начальной ориентации твердого тела. На практике это означает, что достаточно поменять обозначения главных центральных осей инерции тела (см. п. 6). Следовательно, ротационное движение твердого тела, как близкое к невозмущенному, можно также описывать при помощи s -параметров, не опасаясь при этом, что изображающая точка может попасть в полюс.

В обзорной работе [12] s -параметры упоминаются как компоненты вектора \mathbf{m} модифицированных параметров Родрига. Отмечается, что модифицированный вектор Родрига пригоден для описания либрационного движения тела и что применение этой параметризации для описания поворотов на большие углы и ротационного движения сопряжено с опасностью попадания изображающей точки в полюс. Приведенный в данной работе анализ конфигурационного пространства свободного твердого тела показывает, что вероятность этой неприятной ситуации равна нулю.

Другим важным следствием ограниченности конфигурационного пространства вращающегося твердого тела является снятие необходимости использования предлагаемого в работе [9] переключения с одного набора s -параметров на другой, соответствующий той же самой ориентации тела, но лежащий внутри единичной сферы в пространстве s -параметров. Предложенное в работе [9] переключение было введено с целью предотвратить возможный неограниченный рост модуля s -вектора. Вместе с тем такое переключение оказывается полезным, поскольку избавляет от необходимости заботиться о выборе полюса s -параметров.

9. Пример использования s -параметров для численного моделирования ротационного движения ИСЗ. Рассмотрим ИСЗ, центр масс которого движется по круговой кеплеровой орбите с радиусом $7 \cdot 10^6$ м в центральном ньютоновском гравитационном



Фиг. 4

поле. Оси кениговой системы координат $CXYZ$ направим следующим образом: ось CX – параллельно касательной к орбите в сторону движения центра масс тела в перигее, ось CY – по нормали к плоскости орбиты, ось CZ – параллельно радиус-вектору перигея орбиты.

Пусть инерционные параметры ИСЗ имеют величины $A = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $B = 1400 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $C = 700 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, а начальные условия движения таковы, что ИСЗ, первоначально имевший ориентацию осей x, y, z вдоль одноименных осей X, Y, Z , был отклонен от этого положения путем поворота вокруг оси Cx на малый угол крена $\varphi = 0.2$ рад и закручен вокруг оси Cy с угловой скоростью, в пять раз большей угловой скорости орбитального движения ω_0 .

Воспользуемся дифференциальными уравнениями ротационного движения тела в s -параметрах (5.2) – (5.3). Роль возмущающего момента \mathbf{M} в данном случае играет момент гравитационных сил \mathbf{M}_g , определяемый по формуле [10]:

$$\mathbf{M}_g = 3\omega_0^2 \|(C-B)\gamma_2\gamma_3, (A-C)\gamma_3\gamma_1, (B-A)\gamma_1\gamma_2\|^T$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – косинусы углов, образуемых осями x, y, z с местной вертикалью. Путем перехода от независимой переменной t к новой независимой переменной – аргументу широты $u = \omega_0 t$ – эти уравнения были приведены к безразмерной форме. В результате численного интегрирования на интервале времени $u \in [0; 20\pi]$, получены результаты, представленные на фиг. 3, 4.

На фиг. 3 показана траектория изображающей точки в конфигурационном пространстве s -параметров. В начальный момент времени изображающая точка в пространстве s -параметров имела координаты $(19.983; 0; 0)$. С течением времени она движется по торообразной поверхности (в соответствии с результатами, полученными в

пункте б), причем сама поверхность практически не меняя своей формы, поворачивается в s -пространстве, отражая тем самым влияние гравитационного момента. К концу интервала интегрирования поверхность успевает повернуться на один оборот, а изображающая точка попадает в окрестность своего начального положения, что соответствует ориентации тела (в кениговой системе координат), близкой к исходной. Видно, что во время движения тела значения s -параметров остаются ограниченными и не превосходят следующих значений: $-20 < s_1 < 30$, $-20 < s_2 < 20$, $-30 < s_3 < 20$.

Для того, чтобы получить представление об эволюции ротационного движения ИСЗ, рассмотрим характер изменения "медленных" переменных L , ρ , σ . В начальный момент времени компоненты вектора \mathbf{L} , отнесенные к $A\omega_0$, имели следующие значения: $L_X = 0$, $L_Y = 6.8605$, $L_Z = 1.3907$, а его модуль в безразмерной форме был равен 7. В процессе движения величина L остается близкой к постоянной, незначительно колеблясь в пределах $6.885 < L < 7.005$. Зависимости углов ρ и σ от безразмерного времени u определяются по результатам интегрирования дифференциальной системы (5.2) – (5.3) на основании равенств $\sigma = \arctg(L_X / L_Z)$, $\rho = \arccos(L_Y / L)$. Наглядное представление полученных зависимостей дает изображенная на фиг. 4 траектория апекса вектора \mathbf{L} на единичной сфере с центром в центре масс ИСЗ, неподвижной в кениговой системе координат. За время интегрирования траектория апекса успевает сделать оборот внутри полосы, соответствующей пределам изменения угла ρ ($0.2 < \rho < 0.224$), и вернуться в окрестность своего начального положения, что соответствует ориентации тела, близкой к исходной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко Ю.Г. Раскрутка гироскопа с неконтактным подвесом ротора // Изв. АН СССР. МТГ. 1973. № 5. С. 35–40.
2. Журавлев В.Ф. Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела // Изв. АН СССР. МТГ. 1986. № 3. С. 5–11.
3. Белецкий В.В., Голубков В.В., Степанова Е.А., Хацкевич И.Г. Определение ориентации искусственных спутников по данным измерений. Препринт, Ин-т прикл. матем. АН СССР. Часть I. Метод. М., 1967. Часть II. Результаты. Анализ движения. М., 1968.
4. Белецкий В.В., Голубков В.В., Лавровский Э.К., Трушин С.И., Хацкевич И.Г. Определение ориентации и вращения искусственных спутников по данным измерений // Космич. исследования. 1967. Т. 5. Вып. 5. С. 686–702.
5. Голубков В.В., Хацкевич И.Г. Определение ориентации искусственных спутников Земли по заданной системе измерений // Космич. исследования. 1969. Т. 7. Вып. 4. С. 510–521.
6. Белецкий В.В., Голубков В.В., Степанова Е.А., Хацкевич И.Г. Результаты определения ориентации спутника "Протон-2" и описание его движения относительно центра масс // Космич. исследования. 1969. Т. 7. Вып. 4. С. 522–533.
7. Белецкий В.В. Оценка характера взаимодействия аэродинамического потока со спутником по анализу движения спутника "Протон-2" относительно центра масс // Космич. исследования. 1970. Т. 8. Вып. 2. С. 206–217.
8. Тихонов А.А. Об уравнениях вращательного движения заряженного твердого тела в геомагнитном поле // Вестн. С.-Пб. ун-та. Сер. 1. 1990. Вып. 3 (№ 15). С. 83–87.
9. Marandi S.R., Modi V.J. A preferred coordinate system and the associated orientation representation in attitude dynamics // Acta Astronaut. 1987. V. 15. № 11. P. 833–843.
10. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
11. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
12. Shuster M.D. A survey of attitude representations // J/ Astronaut. Sci. 1993. V. 41. № 4. P. 439–577.