**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2002**

УДК 624.072.21/23

© 2002 г. Ю.И. БУТЕНКО

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА. Ч. 4

В работах [1–3] рассмотрены вопросы построения асимптотическим методом теории расчета стержней из ортотропного материала с погрешностью ε^2. Сформулированы внутренняя задача и задачи погранслоя, построены условия существования затухающих решений задачи погранслоя и на этой основе проведено разделение краевых условий для этих задач. Однако использование вариационного подхода в постановке задачи решает вопросы разделения краевых условий без привлечения условий существования затухающих решений задачи погранслоя, что на основе единого метода и показано в данной статье.

6. Вариационный подход к разделению краевых условий. Вопрос разделения краевых условий для самостоятельного решения внутренней задачи и задачи погранслоя в асимптотическом анализе уравнений теории стержней, пластин и оболочек является самым сложным. Справедливо утверждение, что если вопрос будет решен, то никаких принципиальных сложностей на этом пути для задач статики однослойных полос не остается. Выше показано [4, 5], что для стержней этот вопрос решается традиционно с помощью условий существования затухающих решений [3], получение которых в некоторых случаях затруднительно. Вариационный подход к расчету полосы позволяет решить задачу без привлечения дополнительных условий, а обойтись только краевыми условиями.

Для упрощения изложения покажем получение краевых условий для теории стержней, построенных с точностью ε^2 для всех параметров задачи, перемещения для которых имеют вид

$$u = u_0 + \varepsilon^2\zeta^2 u_2 + \varepsilon^4\zeta^4 u_4, \quad v = \varepsilon\zeta v_1 + \varepsilon^3\zeta^3 v_3 \tag{6.1}$$

для задачи растяжения – сжатия и

$$u = \varepsilon\zeta u_1 + \varepsilon^3\zeta^3 u_3, \quad v = v_0 + \varepsilon^2\zeta^2 v_2 + \varepsilon^4\zeta^4 v_4 \tag{6.2}$$

для задачи изгиба.

Известно [1, 4], что при асимптотическом интегрировании уравнений плоской задачи теории упругости в безразмерных величинах внутренняя задача растяжения – сжатия сводится к дифференциальному уравнению

$$E_1 \frac{d^2 u_0^s}{d\xi^2} = p^s$$

а для задачи изгиба

$$E_1 \frac{d^4 v_0^s}{d\xi^4} = q^s$$

Эти уравнения носят рекуррентный характер и решаются при любом s. Остальные компоненты внутренней задачи (6.1), (6.2) находятся по простым дифференциальным зависимостям через u_0^s, v_0^s, которые являются основными искомыми функциями и для которых должны быть сформулированы краевые условия [1–3].

В дальнейшем будем считать, что собственная задача погранслоя теорий стержней, основанных на моделях (6.1) и (6.2) решена [2] и корни для ортотропного материала действительные. Для симметричной задачи имеем четыре, а для кососимметричной – три корня больших нуля. В этом случае решение задачи погранслоя представляем в виде (5.26), (5.27) с четырьмя постоянными интегрирования C_k для симметричной задачи и (5.39), (5.41) – с тремя постоянными для задачи изгиба.

Представим решение задачи погранслоя для симметричной задачи в виде [3]

$$(u_{p,0}, v_{p,1}, u_{p,2}, v_{p,3}, u_{p,4}) = \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1}(u_{p,0}^s, \varepsilon^{-1}v_{p,1}^s, \varepsilon^{-2}u_{p,2}^s, \varepsilon^{-3}v_{p,3}^s, \varepsilon^{-4}u_{p,4}^s)e^{-\lambda t}$$

$$(u_{p,0}^s, v_{p,1}^s, u_{p,2}^s, v_{p,3}^s, u_{p,4}^s) = \sum_{k=1}^{4} (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \alpha_{3k}, \alpha_{4k}, \alpha_{5k})C_k^s e^{-\lambda_k t}$$

а для задачи изгиба

$$(v_{p,0}, u_{p,1}, v_{p,2}, u_{p,3}, v_{p,4}) = \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1}(v_{p,0}^s, \varepsilon^{-1}u_{p,1}^s, \varepsilon^{-2}v_{p,2}^s, \varepsilon^{-3}u_{p,3}^s, \varepsilon^{-4}v_{p,4}^s)e^{-\lambda t}$$

$$(v_{p,0}^s, u_{p,1}^s, v_{p,2}^s, u_{p,3}^s, v_{p,4}^s) = \sum_{k=1}^{3} (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \alpha_{3k}, \alpha_{4k}, \alpha_{5k})C_k^s e^{-\lambda_k t}$$

Здесь λ – параметр, характеризующий скорость убывания погранслоя, $\varkappa$ – параметр, связывающий внутреннюю задачу и задачу погранслоя через краевые условия.

Рассмотрим все варианты краевых условий.

6.1. Статические краевые условия (заданы p_x, p_y). Для симметричной плоской задачи ортотропного тела имеем естественные краевые условия (1.13), которые в варианте (6.1), с учетом выражения (4.4), имеют вид

$$\sigma_{x,0} + \frac{1}{3}\varepsilon^2\sigma_{x,2} + \frac{1}{5}\varepsilon^4\sigma_{x,4} = \int_0^1 p_x(\zeta)d\zeta$$

$$\frac{1}{3}\sigma_{x,0} + \frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma_{x,2} + \frac{1}{7}\varepsilon^4\sigma_{x,4} = \int_0^1 p_x(\zeta)\zeta^2 d\zeta \tag{6.3}$$

$$\frac{1}{5}\sigma_{x,0} + \frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma_{x,2} + \frac{1}{9}\varepsilon^4\sigma_{x,4} = \int_0^1 p_x(\zeta)\zeta^4 d\zeta$$

$$\frac{1}{3}\varepsilon\tau_{xy,1} + \frac{1}{5}\varepsilon^3\tau_{xy,3} = \int_0^1 p_y(\zeta)\zeta d\zeta, \quad \frac{1}{5}\varepsilon\tau_{xy,1} + \frac{1}{7}\varepsilon^3\tau_{xy,3} = \int_0^1 p_y(\zeta)\zeta^3 d\zeta \tag{6.4}$$

Выражения (6.3) (6.4) с учетом решения внутренней задачи и задачи погранслоя представим

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s\left(\sigma_{x,0}^s + \frac{1}{3}\varepsilon^2\sigma_{x,2}^s + \frac{1}{5}\varepsilon^4\sigma_{x,4}^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa} \sum_{n=1}^{4} a_{1n}C_n^s = \int_0^1 p_x(\zeta)d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s\left(\frac{1}{3}\sigma_{x,0}^s + \frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma_{x,2}^s + \frac{1}{7}\varepsilon^4\sigma_{x,4}^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa} \sum_{n=1}^{4} a_{2n}C_n^s = \int_0^1 p_x(\zeta)\zeta^2 d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s\left(\frac{1}{5}\sigma_{x,0}^s + \frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma_{x,2}^s + \frac{1}{9}\varepsilon^4\sigma_{x,4}^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa} \sum_{n=1}^{4} a_{3n}C_n^s = \int_0^1 p_x(\zeta)\zeta^4 d\zeta \tag{6.5}$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{3}\tau^s_{xy,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\tau^s_{xy,3}\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{4} b_{1n}C_n^s=\int_0^1 p_y(\zeta)\zeta d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{5}\tau^s_{xy,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^2\tau^s_{xy,3}\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{4} b_{2n}C_n^s=\int_0^1 p_y(\zeta)\zeta^3 d\zeta$$

$$\begin{aligned}
a_{1k}&=\overline{E}_1[-\lambda_k(\alpha_{1k}+{}^1\!/\!_3\alpha_{3k}+{}^1\!/\!_5\alpha_{5k})+\nu_{12}(\alpha_{2k}+\alpha_{4k})]\\
a_{2k}&=\overline{E}_1[-\lambda_k({}^1\!/\!_3\alpha_{1k}+{}^1\!/\!_5\alpha_{3k}+{}^1\!/\!_7\alpha_{5k})+\nu_{12}({}^1\!/\!_3\alpha_{2k}+{}^3\!/\!_5\alpha_{4k})]\\
a_{3k}&=\overline{E}_1[-\lambda_k({}^1\!/\!_5\alpha_{1k}+{}^1\!/\!_7\alpha_{3k}+{}^1\!/\!_9\alpha_{5k})+\nu_{12}({}^1\!/\!_5\alpha_{2k}+{}^3\!/\!_7\alpha_{4k})]
\end{aligned}\tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
b_{1k}&=G_{12}[{}^1\!/\!_3(2\alpha_{3k}-\lambda_k\alpha_{2k})+{}^1\!/\!_5(4\alpha_{5k}-\lambda_k\alpha_{4k})]\\
b_{2k}&=G_{12}[{}^1\!/\!_5(2\alpha_{3k}-\lambda_k\alpha_{2k})+{}^1\!/\!_7(4\alpha_{5k}-\lambda_k\alpha_{4k})]\quad (k=1,2,3,4)
\end{aligned}\tag{6.7}$$

Из системы выражений (6.5) получаем краевые условия внутренней задачи и условия определения постоянных интегрирования задачи погранслоя. Так, с учетом самоуравновешенности σ_{xp} по высоте сечения имеем из первого выражения (6.5) статическое краевое условие внутренней задачи

$$\sigma^s_{x,0}+{}^1\!/\!_3\sigma^{s-2}_{x,2}+{}^1\!/\!_5\sigma^{s-4}_{x,4}=\sigma^s_\Sigma \tag{6.8}$$

$$\sigma^0_\Sigma=\int_0^1 p_x(\zeta)d\zeta,\quad \sigma^s_\Sigma=0 \quad \text{при } s\geqslant 1,\quad a_{11}C_1^s+a_{12}C_2^s+a_{13}C_3^s+a_{14}C_4^s=0$$

Асимптотический анализ выражения (6.8) приводит к краевым условиям при любом s. Оставшиеся четыре выражения (6.5) рассматриваются как алгебраическая система уравнений определения C_k^s для $\varkappa=1$ при решенной внутренней задаче.

Для задачи изгиба из условий (1.25) с учетом выражений (4.5), (4.6) имеем краевые условия

$$\frac{1}{3}\varepsilon\sigma_{x,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^3\sigma_{x,3}=\int_0^1 p_x\zeta d\zeta,\quad \frac{1}{5}\varepsilon\sigma_{x,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^3\sigma_{x,3}=\int_0^1 p_x\zeta^3 d\zeta \tag{6.9}$$

$$\tau_{xy,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2\tau_{xy,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4\tau_{xy,4}=\int_0^1 p_y d\zeta,\quad \frac{1}{3}\tau_{xy,0}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\tau_{xy,2}+\frac{1}{7}\varepsilon^4\tau_{xy,4}=\int_0^1 p_y\zeta^2 d\zeta$$

$$\frac{1}{5}\tau_{xy,0}+\frac{1}{7}\varepsilon^2\tau_{xy,2}+\frac{1}{9}\varepsilon^4\tau_{xy,4}=\int_0^1 p_y\zeta^4 d\zeta \tag{6.10}$$

С учетом решения внутренней задачи и типа погранслоя имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{3}\sigma^s_{x,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma^s_{x,3}\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{3} a_{1n}C_n^s=\int_0^1 p_x(\zeta)\zeta d\zeta\\
&\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{5}\sigma^s_{x,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma^s_{x,3}\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{3} a_{2n}C_n^s=\int_0^1 p_x(\zeta)\zeta^3 d\zeta\\
&\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(\tau^s_{xy,0}+\frac{1}{3}\varepsilon^2\tau^s_{xy,2}+\frac{1}{5}\varepsilon^4\tau^s_{xy,4}\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{3} b_{1n}C_n^s=\int_0^1 p_y d\zeta\\
&\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(\frac{1}{3}\tau^s_{xy,0}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\tau^s_{xy,2}+\frac{1}{7}\varepsilon^4\tau^s_{xy,4}\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{3} b_{2n}C_n^s=\int_0^1 p_y\zeta^2 d\zeta\\
&\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(\frac{1}{5}\tau^s_{xy,0}+\frac{1}{7}\varepsilon^2\tau^s_{xy,2}+\frac{1}{9}\varepsilon^4\tau^s_{xy,4}\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{3} b_{3n}C_n^s=\int_0^1 p_y\zeta^4 d\zeta
\end{aligned}\tag{6.11}$$

$$a_{1k} = \overline{E}_1[\tfrac{1}{3}(-\lambda_k\alpha_{2k} + 2\nu_{12}\alpha_{3k}) + \tfrac{1}{5}(-\lambda_k\alpha_{4k} + 4\nu_{12}\alpha_{5k})]$$

$$a_{2k} = \overline{E}_1[\tfrac{1}{5}(-\lambda_k\alpha_{2k} + 2\nu_{12}\alpha_{3k}) + \tfrac{1}{7}(-\lambda_k\alpha_{4k} + 4\nu_{12}\alpha_{5k})] \tag{6.12}$$

$$b_{1k} = G_{12}[(\alpha_{2k} - \lambda_k\alpha_{1k}) + \tfrac{1}{3}(\alpha_{4k} - \lambda_k\alpha_{3k}) - \tfrac{1}{5}\lambda_k\alpha_{5k}]$$

$$b_{2k} = G_{12}[\tfrac{1}{3}(\alpha_{2k} - \lambda_k\alpha_{1k}) + \tfrac{1}{5}(\alpha_{4k} - \lambda_k\alpha_{3k}) - \tfrac{1}{7}\lambda_k\alpha_{5k}]$$

$$b_{3k} = G_{12}[\tfrac{1}{5}(\alpha_{2k} - \lambda_k\alpha_{1k}) + \tfrac{1}{7}(\alpha_{4k} - \lambda_k\alpha_{3k}) - \tfrac{1}{9}\lambda_k\alpha_{5k}] \quad (k = 1,2,3) \tag{6.13}$$

Система условий (6.11) содержит в себе два статических краевых условия внутренней задачи и условия для определения трех постоянных интегрирования задачи погранслоя C_k^s. К внутренней задаче относятся первое и третье условия (6.11). С учетом, что напряжения погранслоя σ_{xp} и τ_{xyp} самоуравновешены по высоте сечения, имеем

$$a_{11}C_1^s + a_{12}C_2^s + a_{13}C_3^s = 0, \quad b_{11}C_1^s + b_{12}C_2^s + b_{13}C_3^s = 0$$

Тогда краевые условия внутренней задачи записываются в виде

$$\tfrac{1}{3}\sigma_{x,1}^s + \tfrac{1}{5}\sigma_{x,3}^{s-2} = \sigma_\Sigma^s, \quad \tau_{xy,0}^s + \tfrac{1}{3}\tau_{xy,2}^{s-2} + \tfrac{1}{5}\tau_{xy,4}^{s-4} = \tau_\Sigma^{s-2} \tag{6.14}$$

$$\sigma_\Sigma^0 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 p_x\zeta d\zeta, \quad \tau_\Sigma^0 = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 p_y d\zeta, \quad \sigma_\Sigma^s = \tau_\Sigma^s = 0 \text{ при } s \geqslant 1$$

Необходимо учитывать, что для задачи изгиба $\tau_{xy,0}^s = 0$ при $s = 0.1$

Остаются три условия (второе, четвертое и пятое) (6.11) для определения C_k^s при $\varkappa = 2$.

Выражения (6.8) симметричной задачи и (6.14) задачи изгиба и есть следствие условий существования затухающих решений при статических краевых условиях. Следующие из них краевые условия приведены в [3].

Как видно, при получении краевых условий внутренней задачи из общих краевых условий симметричной задачи (6.5) и задачи изгиба (6.11) часть соотношений задачи погранслоя тождественна нулю при любом C_k^s. Тогда для симметричной задачи имеем $\Sigma a_{1k}C_k^s \equiv 0$ $(k = 1,2,3,4)$ и для задачи изгиба $\Sigma a_{1k}C_k^s \equiv 0$, $\Sigma b_{1k}C_k^s \equiv 0$ $(k = 1,2,3)$, что является следствием первых уравнений равновесия задачи погранслоя [2, 3].

Выбор параметра $\varkappa$ в каждом случае индивидуален и связан с рассматриваемой задачей. Так при решении внутренней задачи растяжения – сжатия при краевых условиях (6.8) на краю появляются напряжения $\tau_{xy,1}^0$, $\sigma_{x,0}^2$, $\sigma_{x,2}^0$, $\tau_{xy,3}^0$ и так далее. Для выполнения краевых условий используется та их часть (6.5), которая позволяет решить задачу погранслоя из алгебраической системы уравнений

$$\sum_{k=1}^4 a_{2k}C_k^s = Q_1^s, \quad \sum_{k=1}^4 a_{3k}C_k^s = Q_2^s, \quad \sum_{k=1}^4 b_{1k}C_k^s = Q_3^s, \quad \sum_{k=1}^4 b_{2k}C_k^s = Q_4^s$$

Асимптотический анализ последних уравнений при краевых условиях $p_x = \sigma_\Sigma$, $p_y = \varepsilon\zeta\tau_\Sigma$ и $\varkappa = 1$ приводит к алгебраическим системам уравнений определения C_k^s при правых частях

$$Q_1^0 = Q_2^0 = 0, \quad Q_3^0 = \tfrac{1}{3}(\tau_\Sigma - \tau_{xy,1}^0), \; Q_4^0 = \tfrac{1}{5}(\tau_\Sigma - \tau_{xy,1}^0)$$

$$Q_1^1 = -\sigma_{x,0}^2 - \tfrac{1}{3}\sigma_{x,2}^0, \quad Q_2^1 = -\tfrac{1}{3}\sigma_{x,0}^2 - \tfrac{1}{5}\sigma_{x,2}^0, \quad Q_3^1 = Q_4^1 = 0$$

Здесь учтено, что решение внутренней задачи при $s = 1$ тождественно нулю ($\sigma_{x,0}^1 = \tau_{xy,1}^1 = 0$).

Если на краю задана только самоуравновешенная нагрузка $p_x = \varepsilon^2\sigma_\Sigma(1/3 - \zeta^2)$ и $p_y = 0$, то внутренняя задача тождественна нулю и имеет место задача погранслоя, для решения которой при $\varkappa = 2$ имеем

$$Q_1^0 = -4/45\,\sigma_\Sigma, \quad Q_2^0 = -8/105\,\sigma_\Sigma, \quad Q_3^0 = Q_4^0 = 0$$

При наличии только краевых нагрузок $p_x = 0$, $p_y = \varepsilon^3\tau_\Sigma(\zeta - \zeta^3)$ необходимо принять $\varkappa = 3$ и тогда имеем

$$Q_1^0 = Q_2^0 = 0, \quad Q_3^0 = 2/15\,\tau_\Sigma, \quad Q_4^0 = 2/35\,\tau_\Sigma$$

Объединяя все рассматриваемые примеры можно считать, что для всех случаев симметричной задачи $\varkappa \geqslant 1$ (не может быть меньше 1). Аналогично для задачи изгиба $\varkappa \geqslant 2$, что следует из рассмотрения следующих примеров. Решение задачи погранслоя при изгибе сводится к решению алгебраической системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{3} a_{2k}C_k^s = Q_1^s, \quad \sum_{k=1}^{3} b_{2k}C_k^s = Q_2^s, \quad \sum_{k=1}^{3} b_{3k}C_k^s = Q_3^s$$

которая в общем случае при $\varkappa = 2$ и $p_x = \varepsilon\zeta\sigma_\Sigma$ имеет вид

$$Q_1^0 = 0, \quad Q_2^0 = \int_0^1 p_y\zeta^2 d\zeta - \frac{1}{3}\tau_{xy,0}^2 - \frac{1}{5}\tau_{xy,2}^0$$

$$Q_3^0 = \int_0^1 p_y\zeta^4 d\zeta - \frac{1}{5}\tau_{xy,0}^2 - \frac{1}{7}\tau_{xy,2}^0, \quad Q_1^1 = -\frac{1}{5}\sigma_{x,1}^2 - \frac{1}{7}\sigma_{x,3}^0, \quad Q_2^1 = Q_3^1 = 0$$

Вид погранслоя определяется краевой нагрузкой p_y. При наличии на краю самоуравновешенной нормальной нагрузки $p_x = \varepsilon^3(\zeta - 5/3\,\zeta^3)\sigma_\Sigma$, $p_y = 0$ получим только задачу погранслоя при $\varkappa = 3$, которая имеет правую часть в виде $Q_1^0 = -4/105\,\sigma_\Sigma$, $Q_2^0 = Q_3^0 = 0$.

При касательной краевой нагрузке $p_x = 0$, $p_y = \varepsilon^4(1 - 6\zeta^2 + 5\zeta^4)\tau_\Sigma$ принимаем $\varkappa = 4$ и $Q_1^0 = 0$, $Q_2^0 = -16/105\,\tau_\Sigma$, $Q_3^0 = -32/315\,\tau_\Sigma$.

6.2. Смешанные краевые условия (заданы u_Σ, p_y). Для симметричной задачи в этом случае имеем второе условие (1.13) и первое (1.16), которые записываются

$$u_0 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 u_2 + \frac{1}{5}\varepsilon^4 u_4 = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta, \quad \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{5}\varepsilon^2 u_2 + \frac{1}{7}\varepsilon^4 u_4 = \int_0^1 u_\Sigma\zeta^2 d\zeta$$

$$\frac{1}{5}u_0 + \frac{1}{7}\varepsilon^2 u_2 + \frac{1}{9}\varepsilon^4 u_4 = \int_0^1 u_\Sigma\zeta^4 d\zeta \tag{6.15}$$

и к системе (6.15) добавляются два статических условия (6.4). Выражения (6.15) и (6.4) с учетом решения внутренней задачи и задачи погранслоя представим в виде

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s\left(u_0^s + \frac{1}{3}\varepsilon^2 u_2^s + \frac{1}{5}\varepsilon^4 u_4^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1}\sum_{n=1}^{4} a_{1n}C_n^s = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s\left(\frac{1}{3}u_0^s + \frac{1}{5}\varepsilon^2 u_2^s + \frac{1}{7}\varepsilon^4 u_4^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1}\sum_{n=1}^{4} a_{2n}C_n^s = \int_0^1 u_\Sigma\zeta^2 d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s\left(\frac{1}{5}u_0^s + \frac{1}{7}\varepsilon^2 u_2^s + \frac{1}{9}\varepsilon^4 u_4^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1}\sum_{n=1}^{4} a_{3n}C_n^s = \int_0^1 u_\Sigma\zeta^4 d\zeta \tag{6.16}$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{3}\tau^s_{xy,1}+\frac{1}{5}\varepsilon^2\tau^s_{xy,3}\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{4} b_{1n}C^s_n=\int_0^1 p_y\zeta d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{5}\tau^s_{xy,1}+\frac{1}{7}\varepsilon^2\tau^s_{xy,3}\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{4} b_{2n}C^s_n=\int_0^1 p_y\zeta^3 d\zeta$$

$$a_{1k}=\alpha_{1k}+\tfrac{1}{3}\alpha_{3k}+\tfrac{1}{5}\alpha_{5k},\quad a_{2k}=\tfrac{1}{3}\alpha_{1k}+\tfrac{1}{5}\alpha_{3k}+\tfrac{1}{7}\alpha_{5k}$$

$$a_{3k}=\tfrac{1}{5}\alpha_{1k}+\tfrac{1}{7}\alpha_{3k}+\tfrac{1}{9}\alpha_{5k}\quad (k=1,2,3,4) \tag{6.17}$$

а b_{1k}, b_{2k} определяются соотношениями (6.7).

Перемещение u не является самоуравновешенным по высоте сечения, поэтому в первом выражении (6.16) $\Sigma a_{1n}C^s_n$ $(n=1,2,3,4)$ отлично от нуля и разделить краевые условия внутренней задачи и задачи погранслоя одним выражением не удается.

Система условий (6.16) состоит из пяти уравнений и содержит четыре постоянных интегрирования задачи погранслоя C^s_k. Если исключить их из системы (6.16), то получим одно соотношение, содержащее только параметры внутренней задачи, которое и является краевым условием определения ОНС.

Можно рассматривать асимптотический анализ системы условий (6.16) при заданных u_Σ, p_y и выбранном $\varkappa$ при каждом параметре s отдельно и для каждого s получать свое C^s_k и краевые условия внутренней задачи. А можно один раз разрешить систему (6.16) относительно C^s_k, что и будет сделано в дальнейшем.

Решение последних четырех алгебраических уравнений (6.16) относительно C^s_k, и есть решение задачи погранслоя, которое можно записать в общем виде

$$\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa+1}C^s_k=P_{uk}+\varepsilon P_{\tau k}+\sum_{s=0}\varepsilon^s(\beta_{k1}u^s_0+\beta_{k3}\varepsilon^2u^s_2+\beta_{k5}\varepsilon^4u^s_4)+$$

$$+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+2}(\beta_{k2}\tau^s_{xy,1}+\beta_{k4}\varepsilon^2\tau^s_{xy,3}) \tag{6.18}$$

где P_{uk} – решение от краевого условия u_Σ, $P_{\tau k}$ – решение от p_y, β_{ki} – решения от u^s_0, $\tau^s_{xy,1}$ и так далее. После подстановки (6.18) в оставшееся неиспользованным первое соотношение (6.16) получим краевое условие внутренней задачи

$$A_1\sum_{s=0}\varepsilon^s u^s_0=\int_0^1 u_\Sigma d\zeta-P_u-\varepsilon P_\tau-\sum_{s=0}\varepsilon^s(A_3\varepsilon^2u^s_2+A_5\varepsilon^4u^s_4)-$$

$$-\sum_{s=0}\varepsilon^{s+2}(A_2\tau^s_{xy,1}+A_4\varepsilon^2\tau^s_{xy,3}) \tag{6.19}$$

$$P_u=a_{11}P_{u1}+a_{12}P_{u2}+a_{13}P_{u3}+a_{14}P_{u4},\quad P_\tau=a_{11}P_{\tau 1}+a_{12}P_{\tau 2}+a_{13}P_{\tau 3}+a_{14}P_{\tau 4}$$

$$A_k=a_{11}\beta_{1k}+a_{12}\beta_{2k}+a_{13}\beta_{3k}+a_{14}\beta_{4k}+\tfrac{1}{k}\quad (k=1,3,5)$$

$$A_k=a_{11}\beta_{1k}+a_{12}\beta_{2k}+a_{13}\beta_{3k}+a_{14}\beta_{4k}\quad (k=2,4)$$

Из условия (6.19) видно, что краевое условие для u^s_0 содержит не только u_Σ, но и τ_{xy}, p_y. Таким образом видно, что касательное напряжение влияет на формирование кинематического краевого условия внутренней задачи. Асимптотический анализ выражения (6.19) приводит к выражению

$$A_1u^s_0=u^s_\Sigma-P^s_u-P^{s-2}_\tau-A_3u^{s-2}_2-A_5u^{s-4}_4-A_2\tau^{s-2}_{xy,1}-A_4\tau^{s-4}_{xy,3} \tag{6.20}$$

$$u^0_\Sigma=\int_0^1 u_\Sigma d\zeta,\quad P^0_u=P_u,\ P^0_\tau=\frac{P_\tau}{\varepsilon},\quad u^s_\Sigma=P^s_u=P^s_\tau=0\ \text{ при } s\geqslant 1$$

Для первых трех приближений имеем

$$A_1 u_0^0 = u_\Sigma^0 - P_u^0, \quad u_0^1 = 0, \quad A_1 u_0^2 = P_\tau^0 - A_2 \tau_{xy,1}^0 - A_3 u_2^0 \tag{6.21}$$

Из краевых условий (6.21) видно, что статическое краевое условие начинает влиять на кинематическое условие с $s = 2$, что аналогично краевым условиям, полученным с помощью условия существования затухающего решения (5.15).

При $u_\Sigma = \text{const}$ и $p_y = \varepsilon\zeta\tau_\Sigma$, что чаще всего бывает на практике, из (6.21) имеем $P_u^0 = (-A_1 + 1)u_\Sigma$, $P_\tau^0 = A_2\tau_\Sigma$ и тогда

$$u_0^0 = u_\Sigma, \quad u_0^1 = 0, \quad A_1 u_0^2 = A_2(\tau_\Sigma - \tau_{xy,1}^0) - A_3 u_2^0$$

Постоянные погранслоя C_k^s определяются из (6.18) при $\varkappa = 1$.

Для задачи изгиба из выражений (1.25), (1.28) имеем смешанные краевые условия

$$\frac{1}{3}\varepsilon u_1 + \frac{1}{5}\varepsilon^3 u_3 = \int_0^1 u_\Sigma \zeta d\zeta, \quad \frac{1}{5}\varepsilon u_1 + \frac{1}{7}\varepsilon^3 u_3 = \int_0^1 u_\Sigma \zeta^3 d\zeta \tag{6.22}$$

и статические условия (6.10). Систему краевых условий (6.22), (6.10) представим в виде

$$\begin{gathered}
\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{3}u_1^s + \frac{1}{5}\varepsilon^2 u_3^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{3} a_{1n} C_n^s = \int_0^1 u_\Sigma \zeta d\zeta \\
\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{5}u_1^s + \frac{1}{7}\varepsilon^2 u_3^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{3} a_{2n} C_n^s = \int_0^1 u_\Sigma \zeta^3 d\zeta \\
\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(\tau_{xy,0}^s + \frac{1}{3}\varepsilon^2 \tau_{xy,2}^s + \frac{1}{5}\varepsilon^4 \tau_{xy,4}^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa} \sum_{n=1}^{3} b_{1n} C_n^s = \int_0^1 p_y d\zeta \\
\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(\frac{1}{3}\tau_{xy,0}^s + \frac{1}{5}\varepsilon^2 \tau_{xy,2}^s + \frac{1}{7}\varepsilon^4 \tau_{xy,4}^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa} \sum_{n=1}^{3} b_{2n} C_n^s = \int_0^1 p_y \zeta^2 d\zeta \\
\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(\frac{1}{5}\tau_{xy,0}^s + \frac{1}{7}\varepsilon^2 \tau_{xy,2}^s + \frac{1}{9}\varepsilon^4 \tau_{xy,4}^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa} \sum_{n=1}^{3} b_{3n} C_n^s = \int_0^1 p_y \zeta^4 d\zeta
\end{gathered} \tag{6.23}$$

$$a_{1k} = {}^1\!/_3\,\alpha_{2k} + {}^1\!/_5\,\alpha_{4k}, \quad a_{2k} = {}^1\!/_5\,\alpha_{2k} + {}^1\!/_7\,\alpha_{4k} \tag{6.24}$$

где b_{ik} определяются выражениями (6.13) ($k = 1, 2, 3$).

Вариационные краевые условия (6.23) соответствуют одному статическому и одному кинематическому краевым условиям внутренней задачи. К статическому краевому условию относится второе условие (6.14), которое следует из третьего выражения (6.23). Оставшиеся четыре выражения (6.23) содержат как компоненты внутренней задачи, так и погранслоя. Решение погранслоя для принятого приближения описывается тремя постоянными интегрирования C_k^s и, если их исключить, то получим одно кинематическое условие.

Решение относительно C_k^s алгебраической системы уравнений, состоящей их второго, четвертого и пятого соотношений (6.23), представим в виде

$$\begin{gathered}
\sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} C_k^s = P_{uk} + \varepsilon P_{\tau k} + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}(\beta_{k1} u_1^s + \beta_{k3}\varepsilon^2 u_3^s) + \\
+ \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}(\beta_{k2}\tau_{xy,0}^s + \beta_{k4}\varepsilon^2 \tau_{xy,2}^s + \beta_{k5}\varepsilon^4 \tau_{xy,4}^s)
\end{gathered} \tag{6.25}$$

Здесь P_{uk} и $P_{\tau k}$ описываются аналогично симметричной задаче, β_{ki} – решения системы (6.23) от u_1^s, $\tau_{xy,0}^s$ и так далее.

С учетом первого соотношения (6.23) и (6.25) имеем для u_1^s:

$$
\begin{aligned}
&A_1 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} u_1^s = \int_0^1 u_\Sigma \zeta d\zeta - P_u - \varepsilon P_\tau - A_3 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+3} u_3^s - \\
&- \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}(A_2 \tau_{xy,0}^s + A_4 \varepsilon^2 \tau_{xy,2}^s + A_5 \varepsilon^4 \tau_{xy,4}^s) \\
&P_u = a_{11} P_{u1} + a_{12} P_{u2} + a_{13} P_{u3}, \quad P_\tau = a_{11} P_{\tau 1} + a_{12} P_{\tau 2} + a_{13} P_{\tau 3} \\
&A_k = a_{11} \beta_{1k} + a_{12} \beta_{2k} + a_{13} \beta_{3k} + 1/(k+2) \;\; (k = 1,3) \\
&A_k = a_{11} \beta_{1k} + a_{12} \beta_{2k} + a_{13} \beta_{3k} \quad (k = 2,4,5)
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

Из выражения (6.26) следует краевое условие для $dv_0^s / d\xi$:

$$
\begin{aligned}
&A_1 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} \frac{dv_0^s}{d\xi} = -\int_0^1 u_\Sigma \zeta d\zeta + P_u + \varepsilon P_\tau + A_3 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+3} u_3^s + \\
&+ \left(\frac{A_1}{G_{12}} + A_2 \right) \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} \tau_{xy,0}^s + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}(A_4 \varepsilon^2 \tau_{xy,2}^s + A_5 \varepsilon^4 \tau_{xy,4}^s)
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

Асимптотический анализ (6.27) приводит к

$$
A_1 \frac{dv_0^s}{d\xi} = -u_\Sigma^s + P_u^s + P_\tau^{s-2} + (A_1 / G_{12} + A_2) \tau_{xy,0}^s + A_3 u_3^{s-2} + A_4 \tau_{xy,2}^{s-2} + A_5 \tau_{xy,4}^{s-4} \tag{6.28}
$$

$$
u_\Sigma^0 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \zeta u_\Sigma d\zeta, \quad P_u^0 = \frac{P_u}{\varepsilon}, \quad P_\tau^0 = \frac{1}{\varepsilon^2} P_\tau, \quad u_\Sigma^s = P_u^s = P_\tau^s = 0 \text{ при } s \geqslant 1
$$

При $s = 0, 1, 2$ имеем краевые условия

$$
A_1 \frac{dv_0^0}{d\xi} = -u_\Sigma^0 + P_u^0, \quad \frac{dv_0^1}{d\xi} = 0, \quad A_1 \frac{dv_0^2}{d\xi} = P_\tau^0 + \left(\frac{A_1}{G_{12}} + A_2 \right) \tau_{xy,0}^2 + A_3 u_3^0 + A_4 \tau_{xy,2}^0 \tag{6.29}
$$

При краевых условиях $u_\Sigma = \varepsilon \zeta \bar{u}_\Sigma$, $p_y = \varepsilon^2 (1 - \zeta^2) \tau_\Sigma$ имеем $u_\Sigma^0 = 1/3\, \bar{u}_\Sigma$ $P_u^0 = (-A_1 + 1/3) \bar{u}_\Sigma$, $P_\tau^0 = -2 A_4 \tau_\Sigma$ и тогда

$$
\frac{dv_0^0}{d\xi} = -\bar{u}_\Sigma, \quad \frac{dv_0^1}{d\xi} = 0, \quad A_1 \frac{dv_0^2}{d\xi} = \left(\frac{A_1}{G_{12}} + A_2 \right) \tau_{xy,0}^2 + A_3 u_3^0 + A_4 (\tau_{xy,2}^0 - 2\tau_\Sigma)
$$

Из краевого условия (6.28) видно, что, как и в симметричной задаче, τ_{xy} влияет на геометрическое краевое условие, и это влияние начинается с $s = 2$. После решения внутренней задачи по выражениям (6.18) при $\varkappa = 1$ для симметричной задачи и (6.25) при $\varkappa = 2$ для задачи изгиба определяем решение задачи погранслоя.

6.3. Смешанные краевые условия (заданы p_x, v_Σ). Для симметричной задачи в этом варианте краевых условий имеем три условия (6.3) для σ_x и

$$
\frac{1}{3} \varepsilon v_1 + \frac{1}{5} \varepsilon^3 v_3 = \int_0^1 v_\Sigma \zeta d\zeta, \quad \frac{1}{5} \varepsilon v_1 + \frac{1}{7} \varepsilon^3 v_3 = \int_0^1 v_\Sigma \zeta^3 d\zeta \tag{6.30}
$$

Системы условий (6.3) и (6.30) записываются

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=0} \varepsilon^s \left(\sigma_{x,0}^s + \frac{1}{3} \varepsilon^2 \sigma_{x,2}^s + \frac{1}{5} \varepsilon^4 \sigma_{x,4}^s \right) = \int_0^1 p_x(\zeta) d\zeta \\
&\sum_{s=0} \varepsilon^s \left(\frac{1}{3} \sigma_{x,0}^s + \frac{1}{5} \varepsilon^2 \sigma_{x,2}^s + \frac{1}{7} \varepsilon^4 \sigma_{x,4}^s \right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa} \sum_{n=1}^4 a_{2n} C_n^s = \int_0^1 p_x(\zeta) \zeta^2 d\zeta
\end{aligned}
$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s\left(\frac{1}{5}\sigma_{x,0}^s+\frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma_{x,2}^s+\frac{1}{9}\varepsilon^4\sigma_{x,4}^s\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{4} a_{3n}C_n^s=\int_0^1 p_x(\zeta)\zeta^4 d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{3}v_1^s+\frac{1}{5}\varepsilon^2 v_3^s\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa+1}\sum_{n=1}^{4} b_{1n}C_n^s=\int_0^1 v_\Sigma(\zeta)\zeta d\zeta \tag{6.31}$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{5}v_1^s+\frac{1}{7}\varepsilon^2 v_3^s\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa+1}\sum_{n=1}^{4} b_{2n}C_n^s=\int_0^1 v_\Sigma(\zeta)\zeta^3 d\zeta$$

Здесь коэффициенты a_{ik} определяются соотношениями (6.6), а

$$b_{1k}=\tfrac{1}{3}\alpha_{2k}+\tfrac{1}{5}\alpha_{4k},\quad b_{2k}=\tfrac{1}{5}\alpha_{2k}+\tfrac{1}{7}\alpha_{4k}\quad (k=1,2,3) \tag{6.32}$$

Из системы соотношений (6.31) видно, что для внутренней задачи имеем одно первое статическое условие, накладываемое на σ_x (6.8). Нет никакого влияния перемещения v на статическое краевое условие. Постоянные C_k^s определяются из оставшихся четырех уравнений.

Для задачи изгиба имеем статические условия (6.9) и кинематические условия

$$v_0+\frac{1}{3}\varepsilon^2 v_2+\frac{1}{5}\varepsilon^4 v_4=\int_0^1 v_\Sigma(\zeta)d\zeta,\quad \frac{1}{3}v_0+\frac{1}{5}\varepsilon^2 v_2+\frac{1}{7}\varepsilon^4 v_4=\int_0^1 v_\Sigma(\zeta)\zeta^2 d\zeta$$

$$\frac{1}{5}v_0+\frac{1}{7}\varepsilon^2 v_2+\frac{1}{9}\varepsilon^4 v_4=\int_0^1 v_\Sigma(\zeta)\zeta^4 d\zeta \tag{6.33}$$

Системы условий (6.9) и (6.33) представим в виде

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{3}\sigma_{x,1}^s+\frac{1}{5}\varepsilon^2\sigma_{x,3}^s\right)=\int_0^1 p_x(\zeta)\zeta d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{5}\sigma_{x,1}^s+\frac{1}{7}\varepsilon^2\sigma_{x,3}^s\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa}\sum_{n=1}^{3} a_{2n}C_n^s=\int_0^1 p_x(\zeta)\zeta^3 d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(v_0^s+\frac{1}{3}\varepsilon^2 v_2^s+\frac{1}{5}\varepsilon^4 v_4^s\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa+1}\sum_{n=1}^{3} b_{1n}C_n^s=\int_0^1 v_\Sigma(\zeta)d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(\frac{1}{3}v_0^s+\frac{1}{5}\varepsilon^2 v_2^s+\frac{1}{7}\varepsilon^4 v_4^s\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa+1}\sum_{n=1}^{3} b_{2n}C_n^s=\int_0^1 v_\Sigma(\zeta)\zeta^2 d\zeta \tag{6.34}$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(\frac{1}{5}v_0^s+\frac{1}{7}\varepsilon^2 v_2^s+\frac{1}{9}\varepsilon^4 v_4^s\right)+\sum_{s=0}\varepsilon^{s+\varkappa+1}\sum_{n=1}^{3} b_{3n}C_n^s=\int_0^1 v_\Sigma(\zeta)\zeta^4 d\zeta$$

Здесь a_{ik} определяются соотношениями (6.12), а для b_{ik} имеем

$$b_{1k}=\alpha_{1k}+\tfrac{1}{3}\alpha_{3k}+\tfrac{1}{5}\alpha_{5k},\quad b_{2k}=\tfrac{1}{3}\alpha_{1k}+\tfrac{1}{5}\alpha_{3k}+\tfrac{1}{7}\alpha_{5k}$$

$$b_{3k}=\tfrac{1}{5}\alpha_{1k}+\tfrac{1}{7}\alpha_{3k}+\tfrac{1}{9}\alpha_{5k}\quad (k=1,2,3) \tag{6.35}$$

Статическое краевое условие внутренней задачи для σ_x связано с первым условием (6.34) и записывается в виде первого условия (6.14). Оставшиеся четыре условия (6.34) служат для определения C_n^s и формирования кинематического краевого условия определения ОНС.

Рассмотрим алгебраическую систему уравнений относительно C_n^s, состоящую из второго, четвертого и пятого соотношений (6.34). Представим ее решение в виде

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} C_k^s = P_{vk} + \varepsilon P_{\sigma k} + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+2} (\beta_{k2} \sigma_{x,1}^s + \beta_{k4} \varepsilon^2 \sigma_{x,3}^s) +$$

$$+ \sum_{s=0} \varepsilon^s (\beta_{k1} v_0^s + \beta_{k3} \varepsilon^2 v_2^s + \beta_{k5} \varepsilon^4 v_4^s) \tag{6.36}$$

где P_{vk} – решение системы от краевого условия v_Σ, $P_{\sigma k}$ – решение от p_x, β_{ki} – решение от v_0^s, $\sigma_{x,1}^s$, v_2^s и так далее.

Окончательно для v_0^s из третьего соотношения (6.34) имеем

$$A_1 \sum_{s=0} \varepsilon^s v_0^s = \int_0^1 v_\Sigma(\zeta) d\zeta - P_v - \varepsilon P_\sigma - \sum_{s=0} \varepsilon^{s+2} (A_2 \sigma_{x,1}^s + A_4 \varepsilon^2 \sigma_{x,3}^s) - \tag{6.37}$$

$$- \sum_{s=0} \varepsilon^s (A_3 \varepsilon^2 v_2^s + A_5 \varepsilon^4 v_4^s)$$

$$P_v = b_{11} P_{v1} + b_{12} P_{v2} + b_{13} P_{v3}, \quad P_\sigma = b_{11} P_{\sigma 1} + b_{12} P_{\sigma 2} + b_{13} P_{\sigma 3}$$

$$A_k = b_{11} \beta_{1k} + b_{12} \beta_{2k} + b_{13} \beta_{3k} + 1/k \quad (k = 1, 3, 5)$$

$$A_k = b_{11} \beta_{1k} + b_{12} \beta_{2k} + b_{13} \beta_{3k} \quad (k = 2, 4)$$

Асимптотический анализ краевого условия (6.37) приводит к выражению

$$A_1 v_0^s = v_\Sigma^s - P_v^s - P_\sigma^{s-2} - A_2 \sigma_{x,1}^{s-2} - A_4 \sigma_{x,3}^{s-4} - A_3 v_2^{s-2} - A_5 v_4^{s-4} \tag{6.38}$$

$$v_\Sigma^0 = \int_0^1 v_\Sigma d\zeta, \quad P_v^0 = P_v, \quad P_\sigma^0 = \frac{P_\sigma}{\varepsilon}, \quad v_\Sigma^s = P_v^s = P_\sigma^s = 0 \quad \text{при} \quad s \geqslant 1$$

Из (6.38) для первых двух приближений имеем

$$A_1 v_0^0 = v_\Sigma^0 - P_v^0, \quad v_0^1 = 0, \quad A_1 v_0^2 = -P_\sigma^0 - A_2 \sigma_{x,1}^0 - A_3 v_2^0 \tag{6.39}$$

При краевых условиях $v_\Sigma = \text{const}$, $p_x = \varepsilon \zeta \sigma_\Sigma$ получим

$$v_\Sigma^0 = v_\Sigma, \quad P_v^0 = (-A_1 + 1) v_\Sigma, \quad P_\sigma^0 = -A_2 \sigma_\Sigma$$

Для первых приближений имеем

$$v_0^0 = v_\Sigma, \quad v_0^1 = 0, \quad v_0^2 = A_2 (\sigma_\Sigma - \sigma_{x,0}^0) - A_3 v_2^0$$

Из краевых условий (6.37) видно, что σ_x влияет на кинематическое краевое условие внутренней задачи. Влияние σ_x начинается с $s \geqslant 2$.

При решении задачи погранслоя необходимо принять для симметричной задачи $\varkappa = 0$, а для задачи изгиба $\varkappa = 1$.

6.4. Кинематические краевые условия (заданы u_Σ, v_Σ). Для симметричной задачи имеем краевые условия (6.15) и (6.30), которые представим в виде

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s \left(u_0^s + \frac{1}{3} \varepsilon^2 u_2^s + \frac{1}{5} \varepsilon^4 u_4^s \right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^4 a_{1n} C_n^s = \int_0^1 u_\Sigma(\zeta) d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s \left(\frac{1}{3} u_0^s + \frac{1}{5} \varepsilon^2 u_2^s + \frac{1}{7} \varepsilon^4 u_4^s \right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^4 a_{2n} C_n^s = \int_0^1 u_\Sigma(\zeta) \zeta^2 d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s \left(\frac{1}{5} u_0^s + \frac{1}{7} \varepsilon^2 u_2^s + \frac{1}{9} \varepsilon^4 u_4^s \right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^4 a_{3n} C_n^s = \int_0^1 u_\Sigma(\zeta) \zeta^4 d\zeta \tag{6.40}$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{3}v_1^s + \frac{1}{5}\varepsilon^2 v_3^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{4} b_{1n} C_n^s = \int_0^1 v_\Sigma(\zeta)\zeta d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{5}v_1^s + \frac{1}{7}\varepsilon^2 v_3^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{4} b_{2n} C_n^s = \int_0^1 v_\Sigma(\zeta)\zeta^3 d\zeta$$

Здесь коэффициенты a_{ik}, b_{ik} определяются соотношениями (6.17) и (6.32).

Система соотношений (6.40) содержит четыре постоянных интегрирования C_k^s, исключив которые получим одно геометрическое краевое условие для u_0^s, включающее в себя все перемещения внутренней задачи.

Рассмотрим четыре последних выражения (6.40) как систему алгебраических уравнений относительно C_k^s, решение которой представим так

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} C_k^s = P_{uk} + P_{vk} + \sum_{s=0} \varepsilon^s (\beta_{k1} u_0^s + \beta_{k3}\varepsilon^2 u_2^s + \beta_{k5}\varepsilon^4 u_4^s) + \\ + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}(\beta_{k2} v_1^s + \beta_{k4}\varepsilon^2 v_3^s) \tag{6.41}$$

Здесь P_{uk} и P_{vk} – решения от кинематических краевых условий u_Σ и v_Σ соответственно, а β_{ki} – решения от параметров u_0^s, v_1^s и так далее.

Из первого выражения (6.40) с учетом (6.41) получаем

$$A_1 \sum_{s=0} \varepsilon^s u_0^s = \int_0^1 u_\Sigma(\zeta) d\zeta - P_u - P_v - \sum_{s=0} \varepsilon^{s+2}(A_3 u_2^s + A_5 \varepsilon^2 u_4^s) - \\ - \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}(A_2 v_1^s + A_4 \varepsilon^2 v_3^s) \tag{6.42}$$

$$P_u = a_{11}P_{u1} + a_{12}P_{u2} + a_{13}P_{u3} + a_{14}P_{u4}, \quad P_v = a_{11}P_{v1} + a_{12}P_{v2} + a_{13}P_{v3} + a_{14}P_{v4}$$

$$A_k = a_{11}\beta_{1k} + a_{12}\beta_{2k} + a_{13}\beta_{3k} + a_{14}\beta_{4k} + 1/k \quad (k = 1, 3, 5)$$

$$A_k = a_{11}\beta_{1k} + a_{12}\beta_{2k} + a_{13}\beta_{3k} + a_{14}\beta_{4k} \quad (k = 2, 4)$$

На формирование краевого условия u_0^s влияет перемещение v^s. Это кинематическое краевое условие получено по единой методике и не отличается по трудности получения от других видов краевых условий, в то же время отмечалось, что получить условия существования затухающих решений задачи погранслоя при кинематических краевых условиях в простом виде не представляется возможным [4, 5].

Из выражения (6.42) в общем случае следует

$$A_1 u_0^s = u_\Sigma^s - P_u^s - P_v^{s-1} - A_3 u_2^{s-2} - A_5 u_4^{s-4} - A_2 v_1^{s-1} - A_4 v_3^{s-3} \tag{6.43}$$

$$u_\Sigma^0 = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta, \quad P_u^0 = P_u, \quad P_v^0 = \frac{P_v}{\varepsilon}, \quad u_\Sigma^s = P_u^s = P_v^s = 0 \quad \text{при} \quad s \geqslant 1$$

Для первых приближений из (6.43):

$$A_1 u_0^0 = u_\Sigma^0 - P_u^0, \quad A_1 u_0^1 = -P_v^0 - A_2 v_1^0, \quad A_1 u_0^2 = -A_3 u_2^0 - A_2 v_1^1 \tag{6.44}$$

В частности при краевых условиях $u_\Sigma = \text{const}$ и $v_\Sigma = \varepsilon\zeta\bar{v}_\Sigma$ имеем

$$u_\Sigma^0 = u_\Sigma, \quad P_u^0 = (-A_1 + 1)u_\Sigma, \quad P_v^0 = -A_2\bar{v}_\Sigma$$

С точностью ε^2 имеем краевые условия

$$u_0^0 = u_\Sigma, \quad A_1 u_0^1 = A_2(\bar{v}_\Sigma - v_1^{\,0}), \quad A_1 u_0^2 = -A_2 v_1^{\,1} - A_3 u_2^0$$

Для кососимметричной задачи имеем краевые условия (6.22) и (6.33), которые имеют вид

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{3}u_1^s + \frac{1}{5}\varepsilon^2 u_3^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{3} a_{1n} C_n^s = \int_0^1 u_\Sigma(\zeta)\zeta d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\left(\frac{1}{5}u_1^s + \frac{1}{7}\varepsilon^2 u_3^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{3} a_{2n} C_n^s = \int_0^1 u_\Sigma(\zeta)\zeta^3 d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(v_0^{\,s} + \frac{1}{3}\varepsilon^2 v_2^s + \frac{1}{5}\varepsilon^4 v_4^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{3} b_{1n} C_n^s = \int_0^1 v_\Sigma(\zeta) d\zeta \tag{6.45}$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(\frac{1}{3}v_0^{\,s} + \frac{1}{5}\varepsilon^2 v_2^s + \frac{1}{7}\varepsilon^4 v_4^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{3} b_{2n} C_n^s = \int_0^1 v_\Sigma(\zeta)\zeta^2 d\zeta$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s}\left(\frac{1}{5}v_0^{\,s} + \frac{1}{7}\varepsilon^2 v_2^s + \frac{1}{9}\varepsilon^4 v_4^s\right) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{3} b_{3n} C_n^s = \int_0^1 v_\Sigma(\zeta)\zeta^4 d\zeta$$

где a_{ik}, b_{ik} определяются соотношениями (6.24) и (6.35).

Исключив из пяти соотношений (6.45) три постоянных интегрирования задачи погранслоя, получим два кинематических условия для $v_0^{\,s}$ и $u_1^s(dv_0^{\,s}/d\xi)$ для каждого приближения s. Эти краевые условия показывают взаимовлияния перемещений u и v друг на друга.

Решение системы уравнений, состоящей из второго, четвертого и пятого соотношений (6.45) представим в виде

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} C_k^s = P_{uk} + P_{vk} + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}(\beta_{k2}u_1^s + \beta_{k4}\varepsilon^2 u_3^s) + \\ + \sum_{s=0} \varepsilon^{s}(\beta_{k1}v_0^{\,s} + \beta_{k3}\varepsilon^2 v_2^{\,s} + \beta_{k5}\varepsilon^4 v_4^{\,s}) \tag{6.46}$$

где P_{uk}, P_{vk} – решения от u_Σ и v_Σ соответственно, β_{ki} – решения от $v_0^{\,s}$, u_1^s и т.д.

Из первого и третьего соотношения (6.45), с учетом исключения C_k^s (6.46), получаем два выражения:

$$A_1 \sum_{s=0} \varepsilon^s v_0^{\,s} + A_2 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} u_1^s = \int_0^1 u_\Sigma(\zeta)\zeta d\zeta - P_u - P_v - A_4 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+3} u_3^s - \\ - \sum_{s=0} \varepsilon^s (A_3 \varepsilon^2 v_2^{\,s} + A_5 \varepsilon^4 v_4^{\,s})$$

$$B_1 \sum_{s=0} \varepsilon^s v_0^{\,s} + B_2 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} u_1^s = \int_0^1 v_\Sigma(\zeta) d\zeta - \overline{P}_u - \overline{P}_v - B_4 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+3} u_3^s - \\ - \sum_{s=0} \varepsilon^s (B_3 \varepsilon^2 v_2^{\,s} + B_5 \varepsilon^4 v_4^{\,s}) \tag{6.47}$$

$$P_u = a_{11}P_{u1} + a_{12}P_{u2} + a_{13}P_{u3}, \quad P_v = a_{11}P_{v1} + a_{12}P_{v2} + a_{13}P_{v3}$$

$$\overline{P}_u = b_{11}P_{u1} + b_{12}P_{u2} + b_{13}P_{u3}, \quad \overline{P}_v = b_{11}P_{v1} + b_{12}P_{v2} + b_{13}P_{v3}$$

$$A_k = a_{11}\beta_{1k} + a_{12}\beta_{2k} + a_{13}\beta_{3k} \quad (k = 1, 3, 5)$$

$$A_k = a_{11}\beta_{1k} + a_{12}\beta_{2k} + a_{13}\beta_{3k} + 1/(k+1) \quad (k = 2, 4)$$

$$B_k = b_{11}\beta_{1k} + b_{12}\beta_{2k} + b_{13}\beta_{3k} + 1/k \quad (k = 1, 3, 5)$$

$$B_k = b_{11}\beta_{1k} + b_{12}\beta_{2k} + b_{13}\beta_{3k} \quad (k = 2, 4)$$

Из (6.47) следуют краевые условия для v_0^s и $dv_0^s / d\xi$:

$$\begin{aligned}
&A_1 \sum_{s=0} \varepsilon^s v_0^s - A_2 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} \frac{dv_0^s}{d\xi} = \int_0^1 u_\Sigma(\zeta)\zeta d\zeta - P_u - P_v - \frac{A_2}{G_{12}} \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\tau_{xy,0}^s - \\
&-A_4 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+3} u_3^s - \sum_{s=0} \varepsilon^{s+2}(A_3 v_2^s + A_5 \varepsilon^2 v_4^s) \\
&B_1 \sum_{s=0} \varepsilon^s v_0^s - B_2 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} \frac{dv_0^s}{d\xi} = \int_0^1 v_\Sigma(\zeta) d\zeta - \overline{P}_u - \overline{P}_v - \frac{B_2}{G_{12}} \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1}\tau_{xy,0}^s - \\
&- B_4 \sum_{s=0} \varepsilon^{s+3} u_3^s - \sum_{s=0} \varepsilon^{s+2}(B_3 v_2^s + B_5 \varepsilon^2 v_4^s)
\end{aligned} \tag{6.48}$$

асимптотический анализ которых дает возможность получить краевые условия внутренней задачи изгиба стержня при любом s. В общем случае имеем

$$\begin{aligned}
&A_1 v_0^s - A_2 \frac{dv_0^{s-1}}{d\xi} = u_\Sigma^{s-1} - P_u^{s-1} - P_v^s - \frac{A_2}{G_{12}}\tau_{xy,0}^{s-1} - A_4 u_3^{s-3} - A_3 v_2^{s-2} - A_5 v_4^{s-4} \\
&B_1 v_0^s - B_2 \frac{dv_0^{s-1}}{d\xi} = v_\Sigma^{s-1} - \overline{P}_u^{s-1} - \overline{P}_v^s - \frac{B_2}{G_{12}}\tau_{xy,0}^{s-1} - B_4 u_3^{s-3} - B_3 v_2^{s-2} - B_5 v_4^{s-4}
\end{aligned} \tag{6.49}$$

$$u_\Sigma^0 = \int_0^1 u_\Sigma \zeta d\zeta, \quad v_\Sigma^0 = \int_0^1 v_\Sigma d\zeta, \quad P_u^0 = \frac{P_u}{\varepsilon}, \quad P_v^0 = P_v, \quad \overline{P}_u^0 = \frac{\overline{P}_u}{\varepsilon}, \quad \overline{P}_v^0 = \overline{P}_v$$

при $s \geqslant 1$ $u_\Sigma^s = v_\Sigma^s = P_u^s = P_v^s = \overline{P}_u^s = \overline{P}_v^s = 0$.

Для краевых условий $v_\Sigma = \text{const}$ и $u_\Sigma = \varepsilon\zeta\overline{u}_\Sigma$ получим

$$v_\Sigma^0 = v_\Sigma, \quad u_\Sigma^0 = \tfrac{1}{3}\overline{u}_\Sigma, \quad P_u^0 = (-A_2 + \tfrac{1}{3})\overline{u}_\Sigma, \quad \overline{P}_u^0 = -B_2\overline{u}_\Sigma,$$

$$P_v^0 = -A_1 v_\Sigma, \quad \overline{P}_v^0 = (-B_1 + 1)\, v_\Sigma$$

Тогда при $s = 0$ следуют классические краевые условия защемления

$$v_0^0 = v_\Sigma, \quad dv_0^0 / d\xi = -\overline{u}_\Sigma \tag{6.50}$$

при $s = 1$ будет $v_0^1 = 0$, а $dv_0^1 / d\xi$ находится совместно с v_0^2 из системы уравнений

$$A_1 v_0^2 - A_2 dv_0^1 / d\xi = -A_3 v_2^0, \quad B_1 v_0^2 - B_2 dv_0^1 / d\xi = -B_3 v_2^0 \tag{6.51}$$

Для приближения $s = 2$ $v_0^2 / d\xi$ находится из аналогичной системы (6.49):

$$A_1 v_0^3 - A_2 \frac{dv_0^2}{d\xi} = -A_3 v_2^1 - A_4 u_3^0, \quad B_1 v_0^3 - B_2 \frac{dv_0^2}{d\xi} = -B_3 v_2^1 - B_4 u_3^0 \tag{6.52}$$

Краевые условия симметричной задачи (6.44) и задачи изгиба (6.51), (6.52) показывают сложный характер переплетения кинематических краевых условий, который заключается в том, что уточнение напряженно-деформированного состояния начинается при $s = 1$, а не при $s = 2$, как это имеет место при остальных видах краевых условий. Решение задачи погранслоя по соотношениям (6.41) и (6.46) проводится при $\kappa = 1$ для симметричной задачи и задачи изгиба.

При рассмотренных краевых условиях задача их разделения решается так просто только в случае действительных корней собственной проблемы задачи погранслоя, что чаще всего имеет место для ортотропного материала. Для изотропного материала корни комплексные и решение для задачи растяжения – сжатия имеет вид (5.50). В этом случае в формировании краевых условий внутренней задачи участвуют собственные вектора действительной и мнимой частей решений собственной проблемы.

В постановке кинематических краевых условий имеется многовариантность, которая описывается в симметричной задаче соотношениями (1.16)–(1.18), а в задаче изгиба – (1.28)–(1.31). Для каждого из этих вариантов краевых условий можно получить свои краевые условия внутренней задачи и свою задачу погранслоя. Их разделения производятся аналогичным образом. При любом варианте краевых условий считается, что по всей кромке стержня Σ выполняется один вид краевых условий. Смена краевых условий на высоте кромки не рассматривается.

Выше показано разделение различных вариантов краевых условий для внутренней задачи и задачи погранслоя двумя методами: с использованием условий существования затухающих решений задачи погранслоя [3] и с учетом краевых условий, полученных вариационным путем. Они для выбранной модели стержня должны приводить к одним и тем же результатам.

7. Упрощенный вариант получения краевых условий внутренней задачи. В плоской задаче теории упругости имеются два пути выполнения краевых условий. Первый путь решения задачи заключается в прямом выполнении поставленных краевых условий. При непрерывных функциях u_Σ и v_Σ по поперечной координате ζ этот вариант обсуждался выше.

Второй путь, который фактически является обратным методом решения задачи, заключается в постановке геометрических краевых условий для выбранных точек кромки слоя. Например, для точки оси стержня при $\xi = 0$ могут быт поставлены краевые условия для задачи растяжения – сжатия $u_0 = u_\Sigma$ и $u_1 = u_\Sigma$, $v_0 = v_\Sigma$ для задачи изгиба. Асимптотический анализ приводит к краевым условиям симметричной задачи

$$u_0^0 = u_\Sigma, \quad u_0^s = 0 \quad \text{при} \quad s \geqslant 1 \tag{7.1}$$

и для задачи изгиба

$$u_1^0 = u_\Sigma, \quad u_1^s = 0, \quad v_0^0 = v_\Sigma, \quad v_0^s = 0 \quad \text{при} \quad s \geqslant 1 \tag{7.2}$$

Но так как перемещения u_0 и u_1, v_0 содержат не только ОНС, то в этом случае на решения погранслоя накладываются условия

$$\alpha_{11}C_1^s + \alpha_{12}C_2^s + \alpha_{13}C_3^s + \ldots = 0$$

для симметричной задачи и

$$\alpha_{11}C_1^s + \alpha_{12}C_2^s + \alpha_{13}C_3^s + \ldots = 0, \quad \alpha_{21}C_1^s + \alpha_{22}C_2^s + \alpha_{23}C_3^s + \ldots = 0$$

для задачи изгиба.

Остальные компоненты перемещений внутренней задачи растяжения – сжатия u_2, u_4, v_1, v_3 и задачи изгиба u_3 и v_2, v_4 не участвуют в формировании краевых условий, а находятся в ходе решения задачи. В этом случае перемещения симметричной задачи на границе имеют вид

$$u_\Sigma = \sum_{s=0} \varepsilon^s (u_\Sigma^s + \varepsilon^2\zeta^2 u_2^s + \varepsilon^4\zeta^4 u_4^s + \ldots), \quad v_\Sigma = \sum_{s=0} \zeta\varepsilon^{s+1} (v_1^s + \varepsilon^2\zeta^2 v_3^s + \ldots) \tag{7.3}$$

а для задачи изгиба

$$u_\Sigma = \sum_{s=0} \zeta\varepsilon^{s+1}(u_\Sigma^s + \varepsilon^2\zeta^2 u_2^s + \ldots), \quad v_\Sigma = \sum_{s=0} \varepsilon^s(v_\Sigma^s + \varepsilon^2\zeta^2 v_2^s + \varepsilon^4\zeta^4 v_4^s + \ldots) \tag{7.4}$$

Таким образом обратным путем устанавливаются те перемещения на границе, которым соответствует решенная задача. Аналогично для статических краевых условий на кромке могут иметь место самоуравновешенные напряжения σ_x, τ_{xy}, которые должны быть приложены на границе.

При таком подходе к краевым условиям в обеих задачах отсутствует погранслой и $C_k^s = 0$. Для появления погранслоя, например, в симметричной задаче краевые условия должны быть поставлены и для остальных величин перемещений. Рассмотрим краевые условия при $\xi = 0$: $u_0 = u_\Sigma$, $u_2 = u_4 = v_1 = v_3 = 0$. В этом случае краевые условия записываются так

$$\sum_{s=0} \varepsilon^s u_0^s + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{4} \alpha_{1n} C_n^s = u_\Sigma, \quad \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} v_1^s + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{4} \alpha_{2n} C_n^s = 0$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+2} u_2^s + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{4} \alpha_{3n} C_n^s = 0, \quad \sum_{s=0} \varepsilon^{s+3} v_3^s + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{4} \alpha_{4n} C_n^s = 0$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+4} u_4^s + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\varkappa+1} \sum_{n=1}^{4} \alpha_{5n} C_n^s = 0$$

Точные краевые условия внутренней задачи получаем после решения последних четырех алгебраических уравнений относительно C_k^s и использования их в первом условии. Таким образом все компоненты перемещений влияют на формирование краевых условий внутренней задачи и задачи погранслоя. Если принять $C_k^s = 0$ и снять постановку краевых условий для u_2, v_1, ..., то и получим предыдущие результаты.

Аналогичным образом обратный метод решения можно использовать при невариационной постановке кинематических краевых условий в любой точке кромки. Рассмотрим симметричную задачу при условиях $\xi = 0$, $\zeta = \pm 1$, $u = u_\Sigma$. В этом случае краевые условия внутренней задачи находятся асимптотическим анализом выражения

$$u = u_0 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^4 u_4 + \ldots = u_\Sigma \tag{7.5}$$

В остальных точках кромки компоненты перемещений устанавливаются в ходе решения внутренней задачи. Анализ выражения (7.5) показывает, что при $s = 0$ краевые условия задач (7.1) и (7.5) совпадают, а остальные краевые условия при $s \geqslant 1$ различаются. При выполнении условия (7.5) на решение задачи погранслоя накладывается условие

$$(\alpha_{11} + \alpha_{31} + \alpha_{51} + \ldots)C_1^s + (\alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{52} + \ldots)C_2^s + \ldots = 0$$

Аналогично можно поступать и для задачи изгиба. Таким образом расширяются возможности на постановку краевых условий внутренней задачи.

Остановимся на некоторых особенностях выполнения кинематических краевых условий задачи изгиба. Известно, что при защемлении стержня в плоской задаче теории упругости возможны два варианта закрепления малого элемента: один соответствует закреплению малого элемента вдоль оси ξ, второй – вдоль оси η. Первое условие (7.2) можно представить в виде

$$u_1^s = \tau_{xy,0}^s / G_{12} - dv_0^s / d\xi = u_\Sigma^s \tag{7.6}$$

Откуда при $s \geqslant 1$ следует

$$dv_0^s / d\xi = \tau_{xy,0}^s / G_{12} \quad (u_1^s = 0) \tag{7.7}$$

что соответствует закреплению элемента вдоль оси ξ. Условию же закрепления элемента вдоль оси η соответствует выражение

$$dv_0^s / d\xi = 0 \quad (u_1^s = \tau_{xy,0}^s / G_{12}) \tag{7.8}$$

Для задачи изгиба стержня при его защемлении и постоянной внешней нагрузке q^0 следует, что решение для v имеет вид

$$v = v_0^0 + \varepsilon v_0^1 + \varepsilon^2 (v_0^2 + \zeta^2 v_2^0) + \varepsilon^4 \zeta^4 v_4^0$$

в котором v_0^1, v_0^2 отличны от нуля только за счет краевых условий.

Предложенная методика по решению внутренней задачи и задачи погранслоя была проверена на целом ряде плоских задач теории упругости [6]. Получено полное совпадение результатов с известными в литературе [7]. Поэтому можно утверждать, что представлена самая простая модель для решения неклассических задач расчета ортотропных стержней при выделении ОНС и РТП. Простота модели связана с возможностью выделения ОНС и РТП и с краевыми условиями, которые не связаны с условиями существования затухающих решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00410).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутенко Ю.И.* Модифицированный метод асимптотического интегрирования при построении теории стержней из ортотропного материала (часть I) // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 4. С. 91–105.
2. *Бутенко Ю.И.* Модифицированный метод асимптотического интегрирования при построении теории стержней из ортотропного материала (часть II) // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 177–188.
3. *Бутенко Ю.И.* Модифицированный метод асимптотического интегрирования при построении теории стержней из ортотропного материала (часть III) // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 2. С. 163–177.
4. *Агаловян Л.А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. Физматлит, 1997. 414 с.
5. *Гусей-Заде М.И.* О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 752–760.
6. *Бутенко Ю.И.* Вариационно-асимптотический метод построения теории стержней. Казань, КИСИ. 1986. – Деп. в ВИНИТИ 6.05.86, № 3227-В-86.
7. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

Казань

Поступила в редакцию
5.02.1999

Зав. редакцией *В.М. Кутырева*

Технический редактор *В.М. Пахомова*

Сдано в набор 04.04.2002 Подписано к печати 20.05.2002 Формат бумаги $70 \times 100^1/_{16}$
Офсетная печать Усл.печ.л. 16,9 Усл.кр.-отт. 5,7 тыс. Уч.-изд.л. 20,1 Бум.л. 6,5
Тираж 334 экз. Зак. 6127

Свидетельство о регистрации № 0110261 от 08.02.93 г.
в Министерстве печати и информации Российской Федерации
Учредители: Российская академия наук

Адрес издателя: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
Адрес редакции: 117526 Москва, проспект Вернадского, д. 101. Тел. 434-35-38
Отпечатано в ППП "Типография "Наука", 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6