

УДК 533.6.013.42

© 2002 г. М.В. ВИЛЬДЕ, Ю.Д. КАПЛУНОВ, В.А. КОВАЛЕВ

РАЗВИТИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТИПА ПЛОСКОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Рассматривается задача о рассеянии стационарных акустических волн тонкой упругой круговой цилиндрической оболочкой. С учетом предположения о малости длины волны деформации по сравнению с радиусом оболочки получено приближенное решение для рассеянного давления. При этом описание движения оболочки сводится к рассмотрению уравнений плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат, т.е. оболочка заменяется плоским слоем. Обсуждается область применимости построенного решения, приводятся результаты сравнения его с точным решением.

Известно [1], что при рассеянии акустической волны тонкой оболочкой рассеянное давление в существенной мере формируется периферическими волнами, являющимися аналогом волн Лэмба в плоском слое. По этой причине модель плоского слоя широко использовалась в задачах рассеяния (см. например, [1–4]), но не для определения рассеянного давления, а только для вычисления резонансных частот парциальных мод.

В работе [5] при исследовании в коротковолновом приближении резонансов волны Рэлея в задачах рассеяния для упругих цилиндров и сфер применялась приближенная модель, в рамках которой в уравнениях теории упругости сохранялись только старшие производные, а радиальная координата замораживалась на поверхности контакта. В результате описание движения тела сводилось к рассмотрению уравнений плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат. Данный подход может быть применен и к оболочкам, при этом радиальная координата должна замораживаться на срединной поверхности. Последнее возможно в силу малости толщины оболочки.

В настоящей статье изучается рассеяние акустических волн цилиндрической оболочкой. Строится асимптотическая модель, являющаяся развитием модели плоского слоя, в ней рассматривается вынужденная задача и учитывается, что слой контактирует с жидкостью. Эта модель позволяет приближенно определить рассеянное давление и формы резонансных кривых. Эффективность предлагаемой модели проверяется путем сравнения с точным решением задачи, попутно обсуждается область ее применимости.

1. Постановка задачи в рамках модели типа плоского слоя. Рассмотрим двумерную стационарную задачу рассеяния для круговой цилиндрической оболочки. Введем следующие обозначения для параметров, характеризующих процесс рассеяния:

$$\kappa = \rho / \rho_1, \quad \beta_i = c_i / c \quad (i = 1, 2), \quad k = \omega / c \quad (1.1)$$

Здесь c_1 и c_2 – скорости продольной и поперечной волн в упругом теле, ρ_1 – плотность материала оболочки, c и ρ – скорость звука и плотность акустической среды, ω – круговая частота, k – волновое число в жидкости.

Примем, что движение оболочки описывается уравнениями

$$\Delta_p \varphi + \beta_1^{-2} k^2 R^2 \varphi = 0, \quad \Delta_p \psi + \beta_2^{-2} k^2 R^2 \psi = 0 \quad (1.2)$$

$$\Delta_p = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \zeta = \frac{r}{R} - 1 \quad (1.3)$$

где φ и ψ – упругие потенциалы Ламе, r – радиальная координата, θ – угол в окружном направлении, R – радиус срединной поверхности оболочки.

Переход от уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат к уравнениям (1.2) опирается на предположения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \sim \eta^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \sim \eta^{-1}, \quad \frac{\omega R}{c_2} \sim \eta^{-1}, \quad \eta = \frac{h}{R} \quad (1.4)$$

где h – полутолщина оболочки. Условия (1.4) определяют коротковолновые колебания оболочки. Они позволяют оставить в уравнениях теории упругости только старшие производные, и заморозить радиус r на срединной поверхности. Аналогичные упрощения следует сделать и в формулах для перемещений и напряжений, которые в результате примут вид

$$u_r = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \quad u_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \quad (1.5)$$

$$\sigma_r = \rho_1 c^2 \frac{1}{R^2} \left[-k^2 R^2 \varphi + 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \rho_1 c^2 \frac{1}{R^2} \left[k^2 R^2 \psi + 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (1.6)$$

Уравнения (1.2), (1.5), (1.6) совпадают с соответствующими соотношениями плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат (ζ, θ) , причем координата ζ изменяется в пределах $(-\eta \leq \zeta \leq \eta)$. Таким образом, переходим от задачи для оболочки к задаче для плоского слоя.

Граничные условия на лицевых поверхностях имеют вид

$$\sigma_r |_{\zeta=\eta} = -(p_i + p_s) |_{r=a}, \quad u_r |_{\zeta=\eta} = \frac{1}{\rho c^2 k^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) |_{r=a}, \quad \sigma_{r\theta} |_{\zeta=\eta} = 0$$

$$\sigma_r |_{\zeta=-\eta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} |_{\zeta=-\eta} = 0 \quad (1.7)$$

где a – внешний радиус оболочки, p_i и p_s – давление в падающей и рассеянной волне, соответственно. Они должны удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (1.8)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

где Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат.

Давление p_s должно еще удовлетворять условию излучения на бесконечности.

2. Рассеяние плоской акустической волны цилиндрической оболочкой. Получим решение поставленной задачи для случая нормального падения на оболочку плоской акустической волны

$$p_i = p_0 \exp[-i(k\zeta + \omega t)] \quad (2.1)$$

где p_0 – постоянная, имеющая размерность давления; ось ξ направлена навстречу распространению плоской волны, а угол θ отсчитывается от положительного направления оси ξ .

Разложим давление в падающей волне в тригонометрический ряд

$$p_i = p_0 \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n J_n(kr) \cos n\theta \quad (2.2)$$

$$E_0 = 1, \quad E_n = 2 \quad (n \geq 1)$$

где J_n – функция Бесселя.

Рассеянное давление ищем в виде

$$p_s = p_0 \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n B_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\theta \quad (2.3)$$

где B_n – искомые постоянные, $H_n^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода.

Потенциалы Ламе представим как и в работе [5] в виде тригонометрических рядов:

$$\varphi(\zeta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\zeta) \cos n\theta, \quad \psi(\zeta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\zeta) \sin n\theta \quad (2.4)$$

временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен.

Подставляя (2.4) в (1.2), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций φ_n и ψ_n . Их общие решения можно записать в виде

$$\varphi_n(\zeta) = C_{1n} \operatorname{ch}(\alpha_1 \zeta) + C_{2n} \operatorname{sh}(\alpha_1 \zeta) \quad (2.5)$$

$$\psi_n(\zeta) = C_{3n} \operatorname{sh}(\alpha_2 \zeta) + C_{4n} \operatorname{ch}(\alpha_2 \zeta)$$

$$\alpha_i = \sqrt{n^2 - \beta_i^{-2} k^2 R^2} \quad (i = 1, 2)$$

Подставим соотношения (2.2) – (2.5) в граничные условия (1.7). В результате для каждого значения n ($n = 0, 1, 2, \dots$) получим систему пяти линейных алгебраических уравнений относительно пяти постоянных $C_{j,n}$, B_n ($j = \overline{1,4}$). Из нее определяются постоянные B_n :

$$B_n = - \frac{J'_n(x) d_1 - 2k^3 R^3 \kappa J_n(x) d_2}{H_n^{(1)'}(x) d_1 - 2k^3 R^3 \kappa H_n^{(1)}(x) d_2} \quad (2.6)$$

$$d_1 = 4D_s D_a, \quad d_2 = \alpha_1 (\operatorname{sh}(\alpha_1 \eta) \operatorname{sh}(\alpha_2 \eta) D_a + \operatorname{ch}(\alpha_1 \eta) \operatorname{ch}(\alpha_2 \eta) D_s)$$

$$D_s = \gamma^4 \operatorname{ch}(\alpha_1 \eta) \operatorname{sh}(\alpha_2 \eta) - 4\beta_2^4 n^2 \alpha_1 \alpha_2 \operatorname{sh}(\alpha_1 \eta) \operatorname{ch}(\alpha_2 \eta)$$

$$D_a = \gamma^4 \operatorname{sh}(\alpha_1 \eta) \operatorname{ch}(\alpha_2 \eta) - 4\beta_2^4 n^2 \alpha_1 \alpha_2 \operatorname{ch}(\alpha_1 \eta) \operatorname{sh}(\alpha_2 \eta)$$

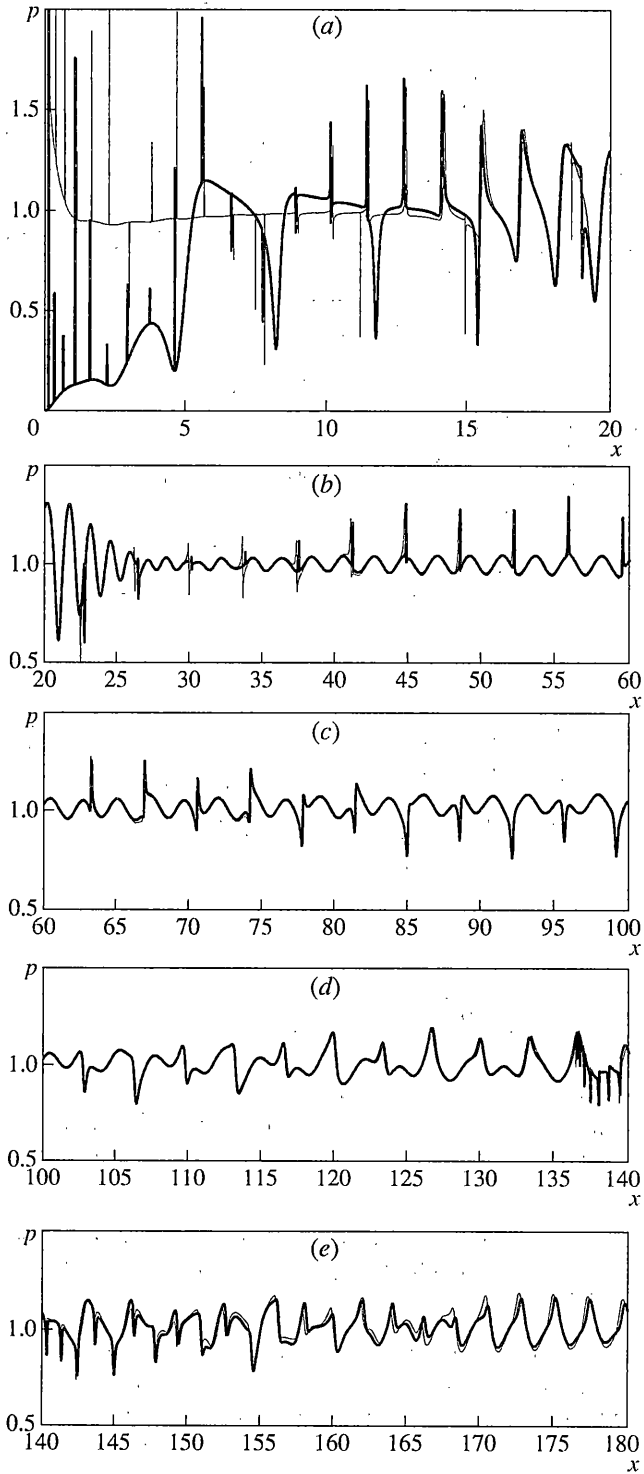
$$\gamma^2 = 2n^2 \beta_2^2 - k^2 R^2, \quad x = ka$$

Рассмотрим резонансный компонент парциальных мод при рассеянии назад ($\theta = 0$). Для фонового компонента, соответствующего давлению, рассеянному акустически жестким цилиндром, он вычисляется по формуле [1]

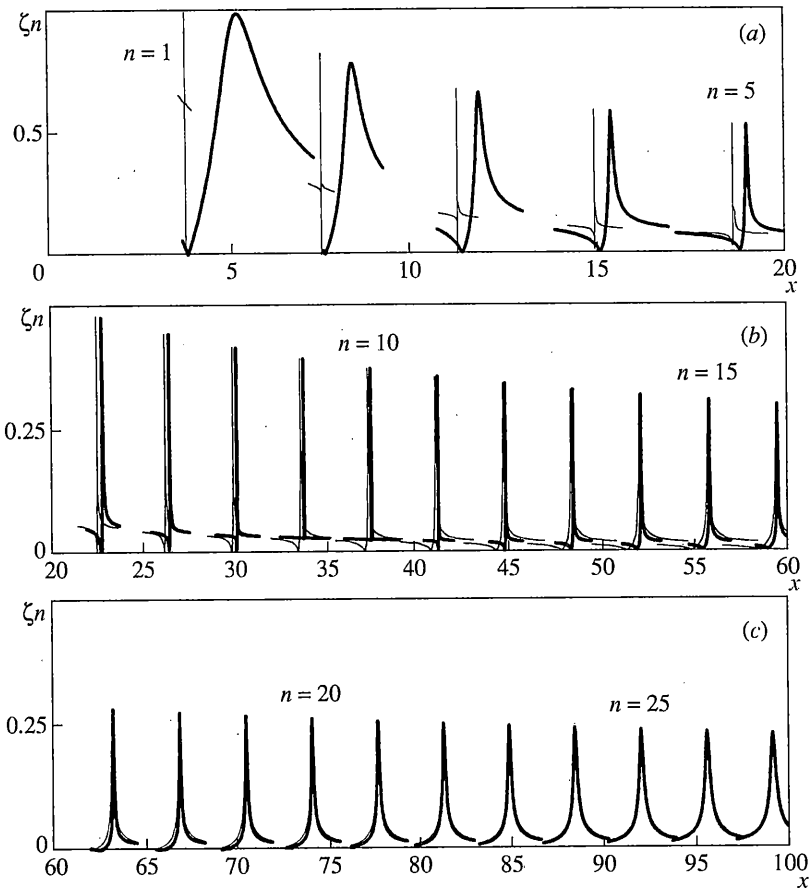
$$\zeta_n = \frac{4}{\sqrt{\pi x}} \left| B_n + \frac{J'_n(x)}{H_n^{(1)'}(x)} \right| \quad (2.7)$$

Внося (2.6) в (2.7) и используя известную формулу для вронскиана цилиндрических функций

$$W\{J_n(x), H_n^{(1)}(x)\} = 2i/(\pi x)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

будем иметь

$$\zeta_n = \frac{8}{(\pi x)^{3/2}} \frac{2k^3 R^3 \kappa d_2}{|d_1 - 2k^3 R^3 \kappa d_2 H_n^{(1)}(x) / H_n^{(1)'}(x) \| H_n^{(1)'}(x)|} \quad (2.8)$$

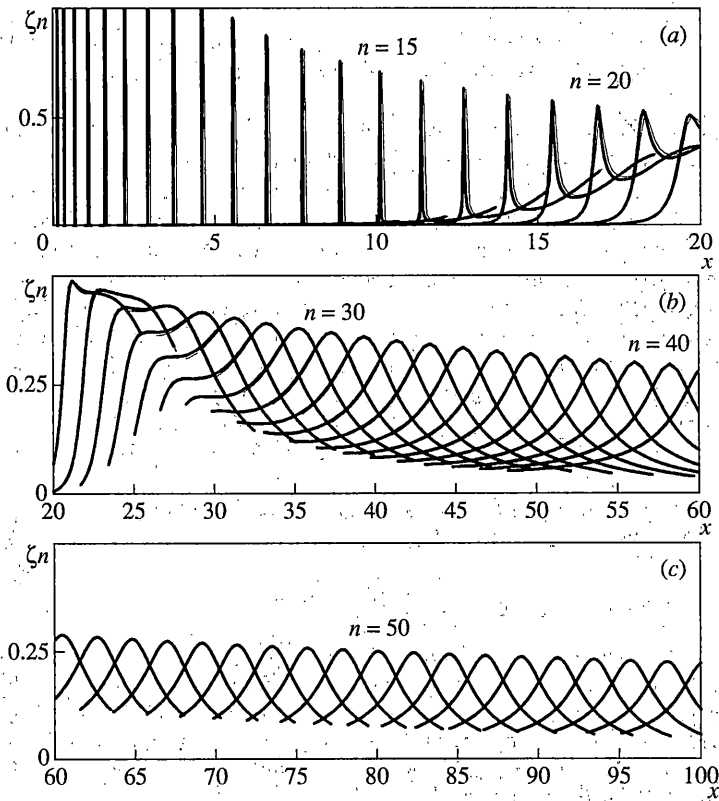
Формула (2.8) показывает, что при значительном различии импедансов оболочки и жидкости и для достаточно больших n резонансы рассеянного давления приближенно соответствуют нулям функции d_1 , т.е., корням уравнений

$$D_s = 0, \quad D_a = 0 \quad (2.9)$$

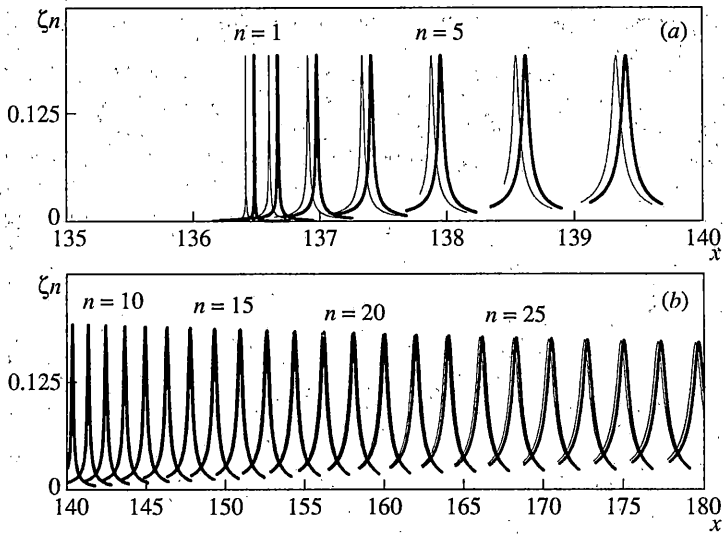
которые являются, соответственно, дисперсионными уравнениями для симметричных и антисимметричных волн Лэмба. Заметим, что построенная модель, учитывая смещение резонансных частот из-за взаимодействия оболочки с жидкостью, позволяет более точно определить их положение, чем модель сухого плоского слоя. Кроме того, до частоты совпадения волна Лэмба A_0 сменяется порожденной жидкостью волной A , описать резонансы которой с помощью уравнения (2.9) невозможно.

На фиг. 1–4 представлены результаты сравнения полученного приближенного решения с точным решением [6]. На фиг. 1 приводится функция формы в дальнем поле для рассеяния назад

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi x}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} E_n B_n (-1)^n \right| \quad (2.10)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

на фиг. 2–4 – графики резонансных компонентов, вычисленные по формуле (2.7), для волн S_0 (фиг. 2), A (до $n = 24$) и A_0 (начиная с $n = 25$) (фиг. 3), A_1 (фиг. 4). На всех рисунках точное решение показано жирной линией, приближенное решение – тонкой линией.

В расчетах принимались следующие значения параметров: $c_1 = 5960$ м/с, $c_2 = 3240$ м/с, $c = 1493$ м/с, $\rho = 1000$ кг/м³, $\rho_1 = 7700$ кг/м³, $\eta = 1/39$.

Из фиг. 1–4 видно, что построенная приближенная модель не применима для описания рассеянного давления в тех областях, где появляются резонансы малых номеров, т.е. в окрестности нулевой частоты и частот запертия. Применяя для этих областей, соответственно, теорию Кирхгофа – Лява (или уточненную теорию Кирхгофа – Лява) [2, 7] и теорию длинноволновых высокочастотных колебаний [2] и срачивая эти три модели, можно описать рассеянное давление в достаточно широком диапазоне частот.

Отметим также, что область применения построенной модели ограничена первыми высшими волнами Лэмба, когда число узлов по толщине оболочки невелико. Для описания волн Лэмба с большими номерами она требует уточнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-01123).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векслер Н.Д. Акустическая спектроскопия. Таллинн: Валгус, 1989. 324 с.
2. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. N.Y. etc.: Acad. Press, 1998. 226 p.
3. Векслер Н.Д. Дисперсионные кривые фазовых скоростей периферических волн типа Лэмба, возбужденных в круговой цилиндрической оболочке при рассеянии ею плоской акустической волны // Акуст. ж. 1989. Т. 35. Вып. 6. С. 1032–1035.
4. Векслер Н.Д. Фазовые скорости волн типа Лэмба и Стоунли при рассеянии акустической волны полый упругой сферой // Акуст. ж. 1991. Т. 37. Вып. 1. С. 42–45.
5. Каплунов Ю.Д., Ковалев В.А. Приближенное описание резонансов волны Рэлея в задачах рассеяния акустических волн упругими цилиндрами и сферами // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 180–186.
6. Doolittle R.D., Überall H. Sound scattering by elastic cylindrical shells // J. Acoust. Soc. America. 1966. V. 39. № 2. P. 272–275.
7. Belov A.V., Kaplunov J.D., Nolde E.V. A refined asymptotic model of fluidstructure interaction in scattering by elastic shells // Flow, Turbulence and Combustion. 1999. V. 61. № 1–4. P. 255–267.

Саратов, Москва

Поступила в редакцию
9.04.2001