

УДК 531.36

© 2002 г. Б.Н. СОКОЛОВ

О СТРУКТУРЕ МАКСИМАЛЬНО ЭКОНОМИЧНОГО ОДНОКАНАЛЬНОГО РЕЛЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА ГАРАНТИРОВАННОЙ ТОЧНОСТИ

Рассматривается задача формирования при наихудшей ограниченной помехе максимально экономичного по средней интенсивности расхода ресурсов релейного регулятора для управления одномерной динамической системой, моделирующей, в частности, стабилизацию с заданной гарантированной точностью углового движения космических аппаратов с помощью релейных реактивных двигателей с запаздыванием отключения тяги. С использованием игрового подхода [1–3] и метода фазовой плоскости из множества позиционных релейных управлений, обеспечивающих начиная с некоторого момента перевод системы из произвольного начального состояния в режим гарантированной стабилизации с заданной погрешностью, выбирается управление, отвечающее минимальной средней интенсивности расхода ресурсов. Решение приводится для некоторого множества параметров, определяющих технические характеристики релейного регулятора.

В [4–6] были рассмотрены эффективные релейные законы управления, применимые для стабилизации движения. Решения минимаксных задач стабилизации релейными регуляторами с запаздыванием в канале переключения управления приведены в [7–8], в частности, в [7] содержится приближенное решение задачи о максимально экономичном регуляторе гарантированной точности при величине помехи, малой по сравнению с величиной управляющего воздействия.

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = v, \quad x(t_0) = x_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad t \geq t_0$$

$$\dot{v} = u + F + \varepsilon, \quad F = \text{const}, \quad |\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_0 = \text{const} \quad (1.1)$$

$$(A): \quad u(t) = \{0, \pm u_0\}, \quad u_0 = \text{const} > 0$$

$$(B): \quad |F| + \varepsilon_0 < u_0, \quad |F| > \varepsilon_0$$

где $u(t)$ – релейное управление, $\varepsilon(t)$ – ограниченная случайная помеха. Если в некоторый момент времени t_α управление $u(t)$ приняло одно из ненулевых значений, то следующий момент t_β переключения на любое другое значение подчиняется неравенству

$$t_\beta - t_\alpha \geq \Delta t = \text{const} > 0 \quad (1.2)$$

где Δt – величина запаздывания в канале управления.

Назовем допустимым любой алгоритм управления системой (1.1), если он:

(1) удовлетворяет условиям (A), (B) и (1.2);

(2) для заданного начального состояния системы гарантированно обеспечивает начиная с некоторого конечного момента t_* ее стабилизацию с заданной точностью в

окрестности начала координат, т.е. сколь угодно долгое движение системы (1.1) в полосе

$$(C): |x(t)| \leq p, \quad \forall t \geq t_* \geq t_0$$

при любых реализациях помехи, $p = \text{const} > 0$ – точность стабилизации. Класс допустимых алгоритмов обозначим через \mathcal{D} . Средней интенсивностью расхода ресурсов за неограниченный период стабилизации назовем верхний предел отношения суммарной продолжительности составляющих период интервалов времени, отвечающих ненулевому управлению $u(t) = \pm u_0$, ко всему периоду стабилизации при сколь угодно большом увеличении этого периода. Требуется среди всех допустимых алгоритмов стабилизации выбрать такой, которому соответствует минимальная средняя интенсивность расхода ресурсов при наилучшей помехе.

Подобные задачи возникают, в частности, при построении алгоритма управления ориентацией космических объектов, стабилизируемых на орбите около программного квазистационарного углового положения. Конструкция реактивных двигателей системы ориентации такова, что отключение тяги может произойти не раньше, чем через время Δt после ее включения. При этом можно считать, что ограничений на момент включения нет, то есть время выхода тяги на стационарный режим пренебрежимо мало по сравнению с Δt . Применимость одноканальной модели обусловлена малостью отклонения от программы параметров углового движения [4], что делает возможным проведение декомпозиции [9, 10] исходных уравнений углового движения на линейные модели второго порядка вида (1.1), где фазовая переменная x – одно из угловых отклонений, F – известное квазистационарное воздействие, которое можно считать постоянным на некотором рассматриваемом промежутке времени.

Поставленная выше задача минимизации средней интенсивности расхода ресурсов при заданной точности стабилизации (1.1), (A) – (C) зависит от пяти параметров u_0 , Δt , F , ε_0 , p . Сведем ее к безразмерной задаче, имеющей фиксированные характеристики управления $u'_0 = 1$ и $p' = 1$ и зависящей только от трех параметров: запаздывания $\Delta t'$ и величин внешних воздействий F' и ε'_0 , причем $F' > \varepsilon'_0$. Для этого произведем замену величин

$$\begin{aligned} t' &= (u_0 p^{-1})^{1/2} t, \quad x' = I p^{-1} x, \quad \Delta t' = (u_0 p^{-1})^{1/2} \Delta t, \quad v' = dx' / dt' = \\ &= I (u_0 p)^{-1/2} v, \quad u' = I u_0^{-1} u, \quad \varepsilon' = I u_0^{-1} \varepsilon, \quad \varepsilon'_0 = u_0^{-1} \varepsilon_0, \quad F' = I u_0^{-1} F \end{aligned}$$

где $I = 1$ при $F \geq 0$, $I = -1$ при $F < 0$. Соотношения (1.1), (A) – (C) после замены отличаются от первоначальных лишь штрихами над всеми величинами. Далее штрихи будем опускать. Таким образом, будем рассматривать безразмерную систему (1.1) с условиями

$$u = \{0, \pm 1\} \tag{1.3}$$

$$F + \varepsilon_0 < 1, \quad F > \varepsilon_0 \geq 0 \tag{1.4}$$

$$|x(t)| \leq 1, \quad \forall t \geq t_* \geq t_0 \tag{1.5}$$

На основании (1.1) – (1.5) можно заключить, что позиция $y(t)$ (состояние) системы (1.1) в момент t полностью характеризуется ее текущей координатой и скоростью $z(t) = (x(t), v(t))$, безразмерным временем τ , прошедшим с момента последнего переключения, и знаком $n = u(t - \tau)$ установившегося в результате последнего переключения управления $y = (x, v, \tau, n)$, $y_0 = y(t_0)$. Множество позиций $\{y\}$ обозначим через \mathcal{Y} . При фиксированной начальной позиции y_0 класс допустимых позиционных управлений обозначим через $\mathcal{D}(y_0)$. Эффективность допустимого управления $u(y) \in \mathcal{D}(y_0)$

определим функционалом

$$V_{y_0}[u(\cdot)] = \max_{\varepsilon(t)} V_{y_0}[u(\cdot), \varepsilon(\cdot)], \quad |\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_0 \quad (1.6)$$

$$V_{y_0}[u(\cdot), \varepsilon(\cdot)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_*} \int_{t_*}^t |u(\tau)| d\tau \quad (1.7)$$

Точка в записи $u(\cdot)$ и $\varepsilon(\cdot)$ означает зависимость функционала от управления как от алгоритма и от помехи как от реализации, горизонтальная черта в записи предела означает, что предел берется верхний. Возмущение $\varepsilon(t)$ будем рассматривать как игрока, стремящегося или сделать погрешность стабилизации больше 1 (т.е. нарушить условие (1.5)), или увеличить интенсивность расхода ресурсов (1.7), t_* определено формулой (1.5).

Задача 1. При заданном начальном положении y_0 системы (1.1) – (1.5) требуется выбором допустимого позиционного управления $u(y)$ минимизировать функционал (1.6).

Искомый минимум обозначим через

$$J_{y_0} = \min_{u(\cdot)} V_{y_0}[u(\cdot)], \quad u(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0) \quad (1.8)$$

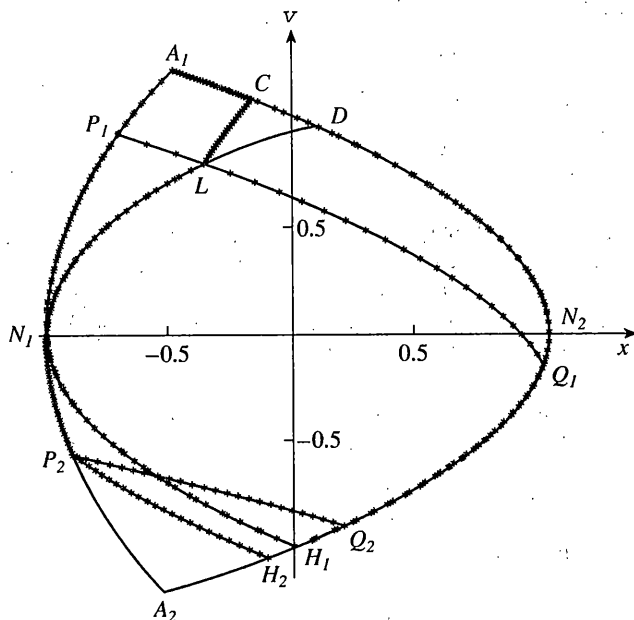
Ниже будет показано, что значение функции (1.8) определяется только параметрами задачи и от начального положения y_0 не зависит.

Введем обозначения $X = \{(y_0, u(\cdot))\}$ – декартово произведение пространства состояний системы (1.1) и множества допустимых алгоритмов $\mathcal{D}(y_0)$, $Y_1 = \{y: \tau < \Delta t, u = \pm 1\}$; $Y = \{y\} \setminus Y_1$. Условие (1.2) влечет равенство $u(z, \tau, n) = n$ в области Y_1 . Поэтому во всех дальнейших построениях конкретные алгоритмы управления задаются только на оставшейся части пространства Y . Разделим множество X на два подмножества X_0 и $X_1 = X \setminus X_0$, где класс X_0 определяется следующим условием. На любой траектории $y = y(t)$, порожденной элементом $w = (y_0, u) \in X_0$ и случайной помехой $\varepsilon(t)$, реализуется зависимость $u(t)$ такая, что $u(t) = \{0, -1\}$ начиная с некоторого момента $T(w) < \infty$.

2. Оптимальная стабилизация при отсутствии помехи. Решение задачи 1 при отсутствии помехи приведено в [7]. Здесь будет дано другое представление результата, позволяющее детерминированную задачу рассматривать как частный случай задачи с помехой. Решение задачи при $\varepsilon_0 = 0$ будем искать среди программных управлений, обеспечивающих начиная с некоторого момента t_* периодическое движение системы (1.1) – (1.4) в заданных пределах (1.5). Соответствующая фазовая траектория в пределах полосы (1.5) должна представлять замкнутую кривую линию такую, что фазовая точка возвращается в исходное положение, сделав за период T один полный оборот вокруг начала координат. Частным видом таких кривых будут траектории, проходящие последовательно через точки $N_1(-1, 0)$ и $N_2(1, 0)$ соответственно. Данный класс управлений не исчерпывает все возможные варианты движения в полосе (1.5), однако он удобен и прост для технической реализации. При некотором соотношении параметров траектории из этого класса доставляют абсолютный минимум функционалу (1.6), где надо положить $\varepsilon_0 = 0$. Траектории указанного типа и соответствующие управления будем называть простыми периодическими.

Задача 2. Выбором простого периодического управления $u(t)$, обеспечивающего движение в полосе (1.5), требуется минимизировать функционал (1.6).

Рассмотрим следующий вид траекторий – замкнутую кривую $N_2H_1N_1D$ на фиг. 1. Эта кривая состоит из участков параболических траекторий динамических систем $\ddot{x} = F$ и $\ddot{x} = F-1$ и проходит через точки $N_1(-1, 0)$ и $N_2(1, 0)$ соответственно. Фазовая траектория симметрична относительно оси Ox . Такая траектория может реали-



Фиг. 1

зываются лишь при условии

$$\Delta t \leq \Delta t_0 = 4\sqrt{\frac{F}{1-F}} \quad (2.1)$$

порождаемом ограничением (1.2), (1.5), Δt_0 – продолжительность интервала постоянства отрицательного управления $u(t) = -1$ за период T при движении по участку DN_2H_1 траектории $N_2H_1N_1D$ (фиг. 1). Значение функционала (1.7) в этом случае равно

$$J = F \quad (2.2)$$

и является точной нижней гранью этого функционала для любых допустимых движений внутри полосы (1.5), так как управление знакопостоянно, в силу чего нет перерасхода ресурсов на компенсацию возмущения F .

Пусть $\Delta t > \Delta t_0$. Рассмотрим замкнутую траекторию $A_1N_2A_2N_1$, состоящую из двух симметричных относительно оси Ox участков парабол $A_2N_1A_1$ и $A_1N_2A_2$, порожденных проходящими через точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ фазовыми траекториями системы $\ddot{x} = F + u(t)$ при управлении $u(t) = 1$ и $u(t) = -1$ соответственно. Обозначим через Δt^* и Δt_1 продолжительность участков, отвечающих управлению $u = 1$ и $u = -1$ соответственно. Их величины определяются формулами

$$\Delta t^* = 2\sqrt{\frac{2(1-F)}{1+F}}, \quad \Delta t_1 = 2\sqrt{\frac{2(1+F)}{1-F}}, \quad T = \Delta t^* + \Delta t_1, \quad \Delta t^* < \Delta t_1 \quad (2.3)$$

Минимальная продолжительность интервала постоянства управления в этом режиме равна Δt^* – продолжительность участка положительного значения управления. Среди всех режимов, обеспечивающих движение в полосе (1.5), максимальная продолжительность участка положительного управления достигается на режиме (2.3) и равна Δt^* . При $\Delta t > \Delta t_0$ наряду с участками отрицательного управления обязательно

должны быть участки с положительным управлением. Поэтому при

$$\Delta t > \max(\Delta t^0, \Delta t^*) \quad (2.4)$$

не существует управления, обеспечивающего движение в полосе (1.5). Пусть выполнено условие

$$\Delta t^0 \leq \Delta t \leq \Delta t^* \quad (2.5)$$

Найдем геометрическое место точек (x, v) таких, что движение системы (1.1), начавшееся из этих точек с управлением $u(t) = 1$, через промежуток Δt заканчивается на параболе $x = 1 - v^2/(2(1 - F))$, порожденной проходящей через точку (1.0) траекторией системы $\ddot{x} = F - 1$ (парабола A_1N_2 на фиг. 1). Можно показать, что искомые точки принадлежат параболе

$$x = 1 + \Delta t^2 - \frac{(v + 2\Delta t)^2}{2(1 - F)} \quad (2.6)$$

При условии (2.5) оптимальные траектории имеют следующую структуру. Обозначим через P и Q точки пересечения параболы (2.6) с параболой $A_1N_1A_2$ и $A_1N_2A_2$ соответственно. Пусть точка P лежит ниже оси Ox (точка P_2 на фиг. 1). Обозначим через H_2P_2 отрезок траектории $\ddot{x} = F$ проходящей через точку P_2 и в точке H_2 пересекающей параболу $x = 1 - v^2/(2(1 - F))$. Тогда оптимальная траектория состоит из участков P_2A_1, A_1H_2, H_2P_2 , отвечающих движению системы (1.1) с управлением $u = 1, u = -1$ и $u = 0$ соответственно.

Пусть теперь P лежит выше оси Ox (точка P_1 на фиг. 1). Обозначим через L и H_1 точки пересечения траектории $\ddot{x} = F$ проходящей через точку $(-1, 0)$, с параболой (2.6) и $x = 1 - v^2/(2(1 - F))$ соответственно. Тогда оптимальная траектория состоит из участков LC, CN_2H_1, H_1N_1L , отвечающих движению системы (1.1) с управлением $u = 1, u = -1, u = 0$ соответственно.

В монографии [7] построено допустимое программное управление, переводящее динамическую систему (1.1) из произвольного начального состояния в полосу (1.5), найдено минимальное значение функционала (1.6), которое определяется только параметрами задачи и от начальных условий не зависит.

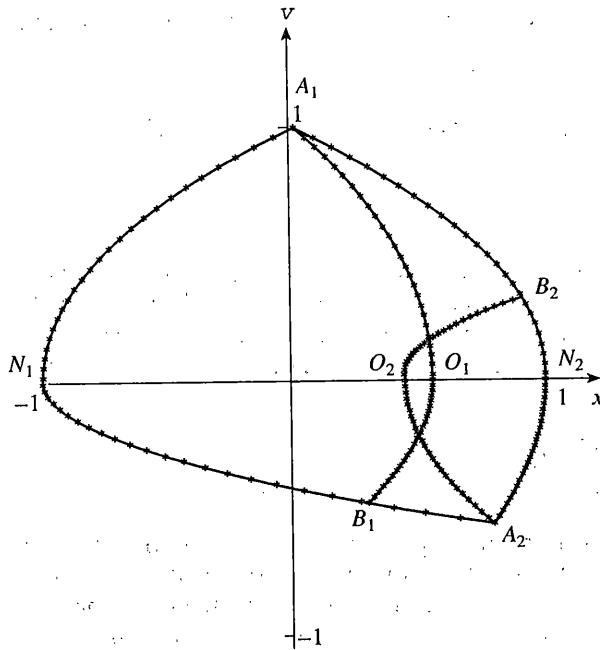
3. Оптимальная гарантированная стабилизация знакопостоянным управлением. В этом пункте будут указаны значения параметров $F, \epsilon_0, \Delta t$, при которых возможна стабилизация знакопостоянным управлением (то есть множество X_0 не пусто) и найдено соответствующее решение задачи 1.

Построим четыре контура, состоящие из параболических участков траекторий на фазовой плоскости системы (1.1) с началом в точках A_i ($i = 1, 2$). Каждый контур отвечает траектории движения системы (1.1) с постоянным управлением $u(t)$, которое принимает одно из двух значений: -1 либо 0 для траекторий, исходящих из точек A_1 , либо A_2 соответственно, в сочетании с помехой такой, что изображающая точка на фазовой плоскости максимально отклоняется влево либо вправо по ходу движения. Точки пересечения контуров друг с другом и с осью Ox обозначим через A_i, B_i, O_i ($i = 1, 2$), $N_1(-1, 0), N_2(1, 0)$ (фиг. 2). Траектории, образующие внешний контур $A_1N_2A_2$ и $A_2N_1A_1$ этой фигуры, проходят через точки с координатами $N_2(1, 0)$ и $N_1(-1, 0)$ и отвечают помехе

$$\epsilon(v) = \epsilon_0 \operatorname{sign} v \quad (3.1)$$

а внутренние линии $A_iO_iB_i$ — помехе

$$\epsilon(v) = -\epsilon_0 \operatorname{sign} v \quad (3.2)$$



Фиг. 2

Таким образом, внешние линии $A_1N_2A_2$ и $A_2N_1A_1$ являются траекториями, наиболее отклоняющимися влево, а линии $A_1O_1B_1$ и $A_2O_2B_2$ – вправо по ходу движения.

Эквивалентны следующие утверждения: траектория при любом возмущении не выходит из (а) полосы (1.5), (б) контура $N_1A_1N_2A_2$. Действительно, допустим, траектория вышла из контура. Это может произойти только на участках A_1N_2 и A_2N_1 . Дальнейшее движение с помехой $\varepsilon(t) = -\varepsilon_0 \text{sign } v(t)$ неминуемо приводит к нарушению условия (1.5), т.е. к выходу из полосы.

Определим величину запаздывания в канале управления, при которой движение в контуре $N_1A_1N_2A_2$ возможно. Рассмотрим в контуре $N_1A_1N_2A_2$ всевозможные траектории системы (1.1), начинающиеся на линии A_1B_2 , с управлением $u = -1$ до их пересечения с линией A_2B_1 . В работе [8] показано, что минимальный по продолжительности интервал постоянства управления $u = -1$ достигается при движении либо из точки A_1 , либо из точки B_2 на траектории $\ddot{x} = F - 1 - \varepsilon_0$. Обозначим через $t_{A_1}(F, \varepsilon_0)$ и $t_{B_2}(F, \varepsilon_0)$ соответствующие времена движения

$$\begin{aligned}
 t_{A_1}(F, \varepsilon_0) &= 2(1 - F + \varepsilon_0)^{-1} \sqrt{1 - F - \varepsilon_0} \left[\sqrt{(F - \varepsilon_0)(1 + 2\varepsilon_0)} + \sqrt{F + \varepsilon_0} \right] \\
 t_{B_2}(F, \varepsilon_0) &= \frac{2\sqrt{1 - F - \varepsilon_0}}{(1 - F + \varepsilon_0)} \left[1 - 2\varepsilon_0 \frac{1 - F - \varepsilon_0}{(F + \varepsilon_0)(1 - 2\varepsilon_0)} \right]^{1/2} \times \\
 &\times \left\{ \sqrt{(F - \varepsilon_0)(1 + 2\varepsilon_0)} + \sqrt{F + \varepsilon_0} \left[1 + 4\varepsilon_0 \frac{(F - \varepsilon_0)(1 - F + \varepsilon_0)}{(F + \varepsilon_0)(1 - F - \varepsilon_0)} \right]^{1/2} \right\} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Минимальный по продолжительности интервал $t_*(F, \varepsilon_0)$ постоянства управления опре-

деляется соотношением

$$t_*(F, \varepsilon_0) = \min(t_{A_1}, t_{B_2}) \quad (3.4)$$

В зависимости от соотношений между F и ε_0 минимум может достигаться как на первом, так и на втором аргументе. Из соотношений (3.4) следует, что при $\Delta t > t_*(F, \varepsilon_0)$ множество X_0 пусто, так как в силу условия (1.4) стабилизация системы (1.1) в полосе (1.5) с управлением $u(t)$ со значениями только из множества $\{0, -1\}$ невозможна. Пусть

$$\Delta t \leq t_*(F, \varepsilon_0) \quad (3.5)$$

Множество X_0 не пусто, так как это множество содержит элемент $(y_0, u(y))$, где

$$\begin{aligned} z_0 \in A_1 B_2 \cup A_2 B_1, \quad \tau \geq \Delta t, \quad n_0 - \text{любое} \\ u(y) = \{0, z \in A_2 B_1; -1, z \in A_1 B_2; n, z \notin A_1 B_2 \cup A_2 B_1\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

На этом управлении значение функционала $V_{y_0}[u(\cdot)]$ (1.6) достигает минимума и равно

$$J_{y_0} = F + \varepsilon_0 \quad (3.7)$$

и является точной нижней гранью для функционала (1.8) по всем допустимым управлениям и начальным позициям y_0 , так как управление $u(y)$ (3.6) знакопостоянно, в силу чего нет перерасхода ресурсов на компенсацию возмущений F и ε_0 . При знакопостоянном управлении наилучшей по критерию (1.8) является помеха $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$.

В работе [8] построено управление $u(y)$, приводящее при условии (3.5) систему (1.1) из произвольного начального состояния и любой помехе на множество $A_1 B_2 \cup A_2 B_1$ со значением $\tau_0 \geq \Delta t$. Последующий переход на управление (3.6) доставляет функционалу (1.6) гарантированный минимум (3.7). Поэтому значение функции (1.8) от начальных условий не зависит и определяется только параметрами задачи, а условие (3.5) – необходимое и достаточное для обеспечения возможности стабилизации системы (1.1) в полосе (1.5) при интенсивности расхода ресурсов не выше (3.7) и любой допустимой помехе и начальном состоянии.

4. Исследование незнакопостоянных режимов стабилизации. При $\Delta t > \Delta t_*$ (3.4) стабилизация системы (1.1) в полосе (1.5) знакопостоянным управлением $u(t)$ невозможна и, если стабилизация вообще возможна, управление $u(t)$ должно также принимать на бесконечном числе интервалов значение $u(t) = 1$ с продолжительностью каждого интервала постоянства не менее Δt (1.2). Построим контуры, состоящие из параболических участков траекторий, точки пересечения которых друг с другом и с осью Ox обозначим A_i, B_i, N_i, O_i ($i = 1, 2$). Внешний контур $N_1 A_1 N_2 A_2$ проходит через точки с координатами $(-1, 0)$, $(1, 0)$ и является траекторией системы (1.1) при $u(t) = 1$ для линии $A_2 N_1 A_1$ и $u(t) = -1$ для линии $A_1 N_2 A_2$ в сочетании с помехой $\varepsilon(v) = \varepsilon_0 \operatorname{sign} v$ (3.1). Внутренние линии $A_i O_i B_i$ ($i = 1, 2$) представляют собой участки траекторий при $u(t) = (-1)^i$ и возмущении $\varepsilon(v) = -\varepsilon_0 \operatorname{sign} v$ (3.2). Таким образом, внешние линии $A_2 N_1 A_1$ и $A_1 N_2 A_2$ являются траекториями, наиболее отклоняющимися влево, а внутренние линии $A_1 O_1 B_1$ и $A_2 O_2 B_2$ – вправо по ходу движения. Соответствующие кривые качественно не отличаются от изображенных на фиг. 2.

Из построения контуров следует, что траектория при любой помехе не выходит из полосы (1.5) тогда и только тогда, когда она не выходит из контура $N_1 A_1 N_2 A_2$. Определим величину запаздывания, при которой движение в контуре еще возможно.

Рассмотрим всевозможные траектории, порожденные движением системы (1.1) с управлением $u(t) = (-1)^j$, начинающиеся на линии $A_j B_j$ и заканчивающиеся на линии $A_i B_i$ ($i, j = 1, 2, i \neq j$). Показано [7], что минимальный интервал постоянства управления достигается при движении с управлением $u(t) = 1$ из точки B_1 при помехе $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ до линии $A_1 B_2$. Соответствующая продолжительность Δt_{**} интервала постоянства управ-

ления равна

$$\Delta t_{**} = \frac{\sqrt{2(1-F-\varepsilon_0)}}{(1+F+\varepsilon_0)\sqrt{(1-\varepsilon_0)(1-F+\varepsilon_0)}} \times \\ \times \left\{ \sqrt{(1+\varepsilon_0)[(1-\varepsilon_0)^2 - F^2]} + \sqrt{1-\varepsilon_0^4 + 2F\varepsilon_0(1-\varepsilon_0^2) - F^2(1+\varepsilon_0^2)} \right\}$$

Отсюда следует, что при $\Delta t \leq \Delta t_{**}$ множество X_1 не пусто. Действительно, рассмотрим управление $u(y)$ с дугами переключений A_1B_2 и A_2B_1 для траекторий, начинающихся на этих же дугах. Данное управление удовлетворяет условию (1.2), а траектории остаются в области (1.5) неограниченно долго при любой реализации помехи.

Таким образом, при

$$\Delta t \leq \max(\Delta t_*, \Delta t_{**}) \quad (4.1)$$

существуют начальные состояния и алгоритмы управления, обеспечивающие стабилизацию системы (1.1) в полосе (1.5). В работах [7, 8] показано, что при условии (4.1) стабилизация системы (1.1) в полосе (1.5) возможна при любом начальном состоянии и любой допустимой реализации помехи и построено соответствующее позиционное управление $u(y)$. При $\Delta t \leq \Delta t_*$ задача 1 решена полностью в п. 3.

Пусть

$$\Delta t_* < \Delta t \leq \Delta t_{**} \quad (4.2)$$

В этом случае задача 1 исследовалась численно. Для этого построим однопараметрическое семейство позиционных управлений $u(y)$, гарантированно обеспечивающих стабилизацию системы в полосе (1.5), и определим минимальное значение функционала (1.6) на этом семействе. Правомерность такого подхода к решению игровой задачи 1 будет обоснована ниже. Найдем геометрическое место точек, таких что начавшееся из этих точек движение системы (1.1) с управлением $u(t) \equiv 1$ и $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_0$ заканчивается через Δt на параболы A_1N_2 , порожденной проходящей через точку $N_2(1, 0)$ траекторией $\ddot{x} = F - 1 + \varepsilon_0$. Искомые координаты удовлетворяют уравнению

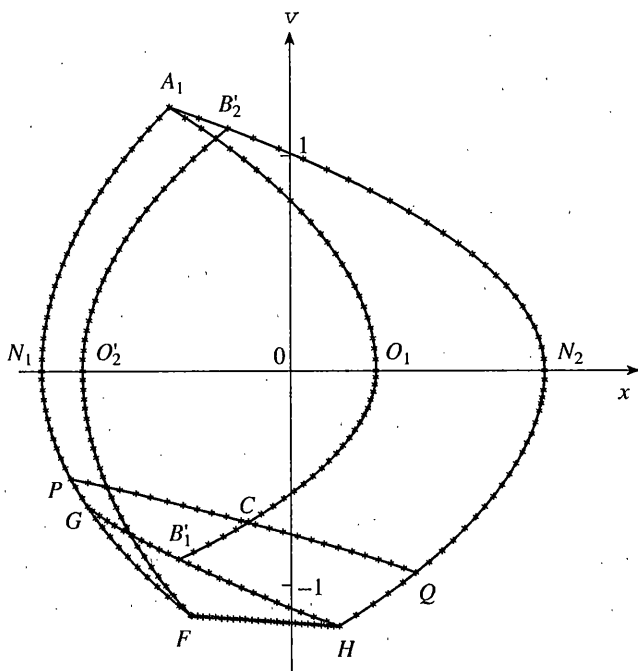
$$x = 1 + \Delta t^2 - \frac{(\nu + 2\Delta t)^2}{2(1 - F - \varepsilon_0)} \quad (4.3)$$

которое при $\varepsilon_0 = 0$ совпадает с (2.6). Можно показать, что Δt – минимальное по всем реализациям помехи $\varepsilon(t)$ время движения системы (1.1) из этих точек до параболы A_1N_2 . Точки пересечения параболы (4.3) с контурами $A_2N_1A_1$ и $A_2N_2A_1$ обозначим через P и Q соответственно. На контуре A_2N_2 зафиксируем точку $H(x_H, \nu_H)$ и проведем через нее две параболы FH и GH , отвечающие траекториям системы (1.1) при нулевом управлении и значениях помехи $\varepsilon(t) \equiv -\varepsilon_0$ и $\varepsilon(t) \equiv +\varepsilon_0$ соответственно.

Пусть $F = F(H)$ и $G = G(H)$ – точки пересечения этих парабол с контуром A_2PQ , как показано на фиг. 3. Ту часть контура A_2PQ , которую высекают из него параболы FH и GH , обозначим через L_H . Если точка H близка к точке A_2 , то обе точки G и F существуют, если точка H близка к N_2 , то вышеупомянутые кривые могут не пересекаться. Пусть B'_1 и C – точки пересечения линии $A_1O_1B_1$ с линиями GH и PQ соответственно, H_{\max} – точка с максимальной ординатой ν_H , при которой: (а) обе точки F и G существуют, (б) точка $G \notin (C, Q)$; H_{\min} – точка, которой соответствует $G(H_{\min}) = B_1$. Смысл условия (б) будет пояснен ниже.

Пусть выполнено

$$H \in [H_{\min}, H_{\max}] \quad (4.4)$$



Фиг. 3

где $[H_{\min}, H_{\max}]$ – криволинейный отрезок на контуре A_2N_2 . Обозначим через O'_2 и B'_2 точки последовательного пересечения осью Ox и параболой A_1N_2 (фиг. 3) наиболее уклоняющейся вправо траектории, исходящей из линии L_H .

Определение. Будем говорить, что позиционное допустимое управление $u(y)$ является простым, если для любого начального положения $y(t_0) = y_0$ системы (1.1) существует такое $t_1(y_0) < \infty$, что при всех $t > t_1$ и любой допустимой реализации помехи $\epsilon(t)$ между двумя последовательными интервалами времени со значением управления $u(y(t)) = 1$ находится ровно один интервал со значением $u(t) = -1$.

Рассмотрим множество Y_H начальных позиций y_0 :

$$z_0 \in A_1B'_2 \cup B'_1H \cup L_H, \quad \tau \geq \Delta t, \quad n_0 - \text{любое} \quad (4.5)$$

Пусть U_H – множество простых управлений $u(y)$ таких, что

(a) порожденные начальными условиями (4.5) траектории не выходят за пределы замкнутого контура $HFN_1A_1N_2H$ ни при какой реализации помехи $\epsilon(t)$;

(b) все точки фазовой плоскости (x, v) , в которых управление $u(y(t))$ на этих траекториях переключается с -1 на 0 , лежат на линии B'_1H .

Утверждение 4.1. Пусть выполнено условие (4.4). Тогда $U_H \neq \emptyset$.

Множество U_H в условиях леммы содержит управление

$$u(y) = \begin{cases} 0, & z \in B'_1H, \quad \tau \geq \Delta t, \quad n = -1 \\ 1, & z \in L_H, \quad \tau - \text{любое}, \quad n = 0 \\ -1, & z \in A_1B'_2, \quad \tau \geq \Delta t, \quad n = 1 \\ n, & z \notin A_1B'_2 \cup B'_1H \cup L_H \end{cases} \quad (4.6)$$

Управление (4.6) при начальных условиях (4.5) и произвольной реализации помехи

порождает трубку траекторий T , целиком содержащуюся в контуре $HFN_1A_1N_2$. Условие (1.2) на траекториях этой трубки выполнено при всех $H \in [H_{\min}, H_{\max}]$ (4.4) по построению линий PQ , L_H и определению точки H_{\max} (условие (b) определения).

Задача 3. Требуется найти

$$J_* = \min_H V_H, \quad H \in [H_{\min}, H_{\max}] \quad (4.7)$$

$$V_H = \min_u \max_{y_0} V_{y_0}[u(\cdot)], \quad y_0 \in Y_H(4.5), \quad u(y) \in U_H \quad (4.8)$$

где функционал $V_{y_0}[u(\cdot)]$ определен формулой (1.6). Ниже будет показано, что $V_{y_0}[u(\cdot)]$ при оптимальном управлении $u(y)$ от y_0 не зависит. Зафиксируем H и рассмотрим бесконечную траекторию, порожденную парой $(y_0, u(y))$, $y_0 \in Y_H$, $u \in U_H$ при наихудшей в смысле критерия (1.6) помехи. Соответствующая фазовая точка $z(t)$ движется в пределах замкнутого контура $HFN_1A_1N_2$, переходя из верхней полу-плоскости в нижнюю и обратно, совершая таким образом бесконечное число витков. Пусть i – номер витка, S_k^i – точки на фазовой траектории, в которых управление $u(y(t))$ меняет значение с $\sin(k\pi/2)$ на $\cos(k\pi/2)$ ($k = 0 - 4$), где k – порядковый номер переключения в пределах одного витка. Конец S_4^i одного витка считается началом S_0^{i+1} следующего. Точку S_0^i будем считать началом траектории. При доказательстве утверждений 4.2–4.8 точка H предполагается фиксированной.

Утверждение 4.2. На оптимальной траектории, соответствующей минимуму функции (4.8) при любом $y_0 \in Y_H$, продолжительность участков положительного значения управления в точности равна Δt (1.2) при любой реализации помехи.

При движении в контуре $HFN_1A_1N_2$ продолжительность участка $S_0^i S_1^i$ положительного значения управления $u(y(t))$ меньше продолжительности участка $S_2^i S_3^i$ его отрицательного значения. Условие (1.2) на участке положительного значения выполняется по построению линии PQ . Управление, при котором продолжительность положительного участка в точности равна Δt , отличается от (4.6) тем, что по истечении Δt с момента переключения на значение 1 управление $u(y(t))$ полагается равным 0; и с нулевым управлением фазовая точка $z(t)$ (1.1) движется до линии A_1N_2 . Далее управление $u(y(t))$ переключается на значение -1 . При увеличении продолжительности участка положительного значения управления при наихудшей помехе уменьшается продолжительность последующих участков с нулевым управлением и увеличивается продолжительность участка с отрицательным управлением. Это ведет к увеличению относительной продолжительности времени включения управления. Поэтому продолжительность участка положительного управления $u(y(t))$ следует выбирать как можно меньшей, т.е. равной Δt .

Замечание 4.2. Из вышеприведенных рассуждений следует, что наихудшая помеха на участке $S_1^i S_2^i$ принимает значение $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ при любой реализации управления $u(y(t))$.

Утверждение 4.3. Наихудшая по критерию (1.6) помеха есть релейная функция времени, имеющая на каждом участке постоянства управления $u(y(t))$ не более одного переключения.

Наихудшая помеха принуждает систему (1.1) проходить участки с ненулевым управлением $u(y(t))$ как можно медленнее, а с нулевым как можно быстрее. Утверждение 4.3 следует из принципа максимума [11] в задаче быстрогодействия для линейной системы второго порядка.

Утверждение 4.4. На оптимальной траектории переключение управления $u(y(t))$ на значение -1 происходит на линии A_1N_2 .

Рассмотрим произвольный виток $S_0^i S_1^i S_2^i S_3^i S_4^i$ оптимальной траектории при наихудшей помехе между двумя последовательными моментами переключения управления на значение 1 с любого другого. Обозначим через T_1 продолжительность движения по этому витку с отличным от нуля управлением $u(y(t))$ и через T – общее время движения по этому витку. Пусть $S_2^i S_3^i$ – участок витка, соответствующий отрицательному управлению $u(y(t))$. Этот участок система (1.1) проходит при наихудшей помехе за максимальное по всем реализациям помехи время, поэтому он должен состоять из дуг двух парабол, отвечающих реализациям помехи $-\varepsilon_0$ и ε_0 соответственно. Обозначим через s^i точку на траектории, где помеха меняет знак, а через ζ^i – точку пересечения участка $S_2^i S_3^i$ с осью Ox . Таким образом, на линиях $S_2^i s^i$ и $s^i S_3^i$ при отрицательном управлении $u(y(t))$ помеха принимает значения $-\varepsilon_0$ и ε_0 соответственно. Допустим, что переключение управления $u(y(t))$ на -1 произошло в точке $\hat{S}_2^i \notin A_1 N_2$, то есть раньше, чем на исходной траектории. Обозначим через $\Delta v_1^i = v(S_2^i) - v(\hat{S}_2^i)$ приращение скорости при переходе из точки \hat{S}_2^i в точку S_2^i . Зафиксируем точку ζ^i и рассмотрим линию $\hat{S}_2^i s^i \zeta^i S_3^i$, отвечающую отрицательному управлению $u(y(t))$ на проварьированной траектории. Обозначим через $\hat{S}_2^i \hat{s}^i$ отрезок на линии $\hat{S}_2^i s^i \zeta^i S_3^i$, на котором $\varepsilon(t) = -\varepsilon_0$. Таким образом, участку $\hat{s}^i s^i$ проварьированной траектории соответствует значение помехи ε_0 . Изменение скорости на $\hat{s}^i s^i$ обозначим через $\Delta v_2^i = v(s^i) - v(\hat{s}^i)$. Пусть T_1' – продолжительность движения с отличным от нуля управлением по проварьированной траектории, и T' – общее время движения по ней. Обозначим $\tau_1 = \Delta v_1^i / (F + \varepsilon_0)$, $\tau_2 = \Delta v_1^i / (1 - F + \varepsilon_0)$, $\tau_3 = \Delta v_2^i / (1 - F + \varepsilon_0)$, $\tau_4 = \Delta v_2^i / (1 - F - \varepsilon_0)$. Тогда $T_1 = T_1' + \tau_2 - \tau_3 + \tau_4$, $T = T' + \tau_1 + \tau_2 - \tau_3 + \tau_4$. Но $\tau_4 < \tau_3$ и $\tau_2 / (\tau_1 + \tau_2) < F + \varepsilon_0 < T_1' / T'$, поэтому $T_1 / T = (T_1' + \tau_2 - \tau_3 + \tau_4) / (T' + \tau_1 + \tau_2 - \tau_3 + \tau_4) < T_1' / T'$. Следовательно, движение по проварьированной траектории увеличивает значение функционала (1.6).

Аналогично может быть доказано следующее утверждение

Утверждение 4.5. Пусть v_{A_1} и v_{B_1} – ординаты точек A_1 и B_1 , где B_1 – точка пересечения линий $A_1 O_1 B_1$ и GH (фиг. 3), и справедливо неравенство

$$2\varepsilon_0 v_{A_1} (F + \varepsilon_0) < -(1 - F + \varepsilon_0) v_{B_1} \quad (4.9)$$

Тогда на оптимальной траектории точки S_4^i переключения управления $u(y(t))$ на значение 1 принадлежат линии L_H .

Утверждение 4.6. При условии

$$v_0^i + \Delta t \geq 0 \quad (4.10)$$

помеха $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_0$ является наихудшей на участке $S_0^i S_1^i$ положительного значения управления $u(y(t))$. Здесь v_0^i – ордината точки S_0^i .

Можно показать, что при условии (4.10) равенство $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_0$ на участке $S_0^i S_1^i$ траектории обеспечивает минимальную продолжительность интервала $S_1^i S_2^i$ нулевого значения управления $u(y(t))$ и максимум ординаты точки S_2^i , что при наихудшей помехе ведет к увеличению продолжительности интервалов с ненулевым значением управления и, тем самым, – к увеличению значения функционала (1.6).

Замечание 4.6. Из утверждения 4.3, замечания 4.2 и условия, что помеха – наихудшая, следует, что на каждом из последующих участках $S_2^i S_3^i$ и $S_3^i S_4^i$ постоянства

управления $u(y(t))$ помеха $\varepsilon(t)$ может только изменить значение $c - \varepsilon_0$ на ε_0 . Совместно с утверждением 4.6 это позволяет определить структуру наихудшей помехи на каждом витке траектории.

Утверждение 4.7. Допустим, что при некотором H (4.4) фазовая траектория динамической системы (1.1), порожденная парой $y_0 \in Y_H$ (4.5), $u_H(y) \in U_H$, удовлетворяет условиям:

- (a) все $S_0^i \in L_H \subset N_1 A_2$, $S_2^i \in A_1 N_2$;
- (b) продолжительность участков $S_0^i S_1^i$ равна Δt ;
- (c) выполнено условие (4.10).

Тогда траектория $z(t)$, соответствующая наихудшей помехе, – замкнутый без самопересечения контур $S_0 S_1 S_2 S_3$, а значение функционала (1.6) от $y_0 \in Y_H$ не зависит.

Линии условия (a) можно рассматривать как проекции на плоскость (x, v) поверхностей переключения управления $u_H(y)$, обеспечивающих при начальных условиях $y_0 \in Y_H$ и любой помехе движение фазовой точки $z(t)$ в контуре $HFN_1 A_1 N_2$. Допустим, что фазовая точка $z(t)$, сделав два витка при наихудшей помехе, вернулась в исходное положение, так что точки S_0^1 и S_0^3 совпадают. Из условий (a)–(c) следует что двухвитковая замкнутая траектория должна на одном из участков $S_3^i S_0^i$ либо $S_2^i S_3^i$ ($i = 1, 2$) самопересечься. Таким образом, двухвитковая траектория распадается на две одновитковые, причем только от реализации помехи зависит, по какому из витков точка будет двигаться, так как условие (1.2) выполнено на обоих. Если относительная продолжительность времени движения с ненулевым управлением на двухвитковой траектории равна m , то на одной из одновитковых она не меньше m . Повторяя эти рассуждения для траектории с произвольным числом витков, приходим к выводу, что наихудшей помехе соответствует замкнутый одновитковый контур. Величина $V_{y_0}[u_H(\cdot)]$ (1.6) от y_0 не зависит, так как любые две начальные точки из множества (4.5) при управлении u_H могут быть соединены траекторией на фазовой плоскости (x, v) при подходящей реализации помехи.

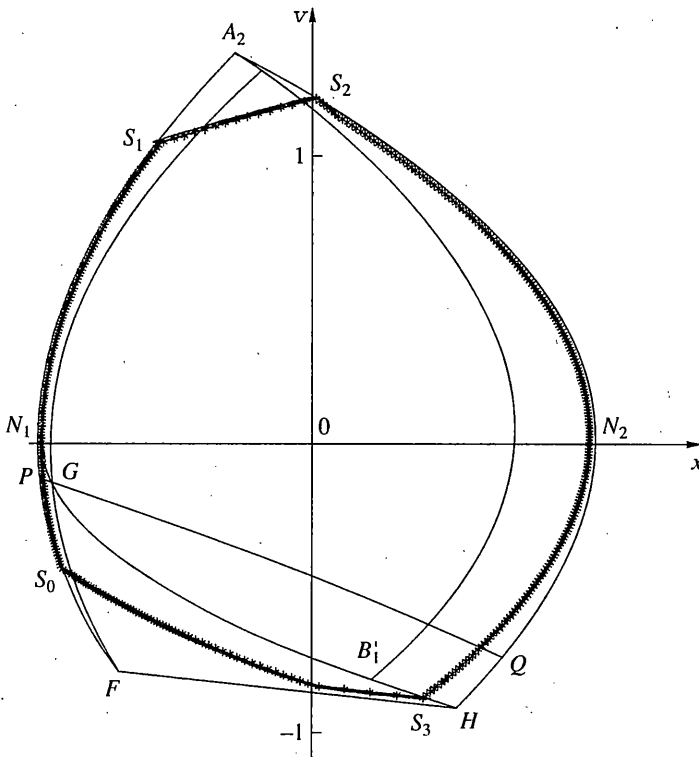
Замечание 4.7. Доказательство утверждения справедливо для любой линии переключения $I_H: x = x_i(v)$, при всех i, j обеспечивающей выполнение условия: участок траектории $S_1^{i+1} S_2^{i+1}$ расположен выше участка $S_1^i S_2^i$, если участок траектории $S_3^j S_0^j$ расположен выше участка $S_3^i S_0^i$. Для этого достаточно, например, выполнения неравенства $dx_i/dv \leq (v + \Delta t)/(F + \varepsilon_0)$ в каждой точке линии переключения I_H .

Утверждение 4.8. Допустим, что при некотором H (4.4) фазовая траектория динамической системы (1.1), порожденная парой $y_0 \in Y_H$ (4.5), $u_H(y) \in U_H$, при наихудшей помехе $\varepsilon(t)$ удовлетворяет условиям (\mathbf{I} – подмножество множества \mathbf{N} натуральных чисел):

- (a) $S_0^i \in L_H$, $S_2^i \in A_1 N_2$, $i \in \mathbf{N}$;
- (b) $S_0^i \in L_H \cap PQ$, $i \in \mathbf{I} \subset \mathbf{N}$;
- (c) продолжительность участков $S_0^i S_1^i$ равна Δt ;
- (d) выполнены условия (4.9), (4.10).

Тогда точки S_0^i и G совпадают при всех $i \in \mathbf{I}$.

Доказательство от противного основывается на том, что если точки S_0^i и G не совпадают при некотором $i \in \mathbf{I}$, то при условии (4.9) помеха "может", сдвинув точку переключения S_0^i по линии PQ в сторону G , увеличить относительную интенсивность траты ресурсов на i -м витке, так как при заданном $u_H(y) \in U_H$ положение точки переключения S_0^i на линии переключения L_H целиком определяется помехой.



Фиг. 4

Замечание 4.8. В условиях утверждения 4.8 аналогичными приведенным при доказательстве утверждения 4.7 рассуждениями можно установить, что при наихудшей помехе фазовая точка $z(t)$, сделав не более двух витков, каждый раз возвращается в исходное положение. Выполнение дополнительно условия замечания 4.7 обеспечивает возвращение фазовой точки в исходное положение после каждого витка.

Решение задачи 1 будем искать в классе простых позиционных управлений $u(y)$ таких, что порожденные начальными условиями

$$z_0 \in A_1 B_2 \cup A_2 B_1, \quad \tau \geq \Delta t, \quad n_0 - \text{любое} \quad (4.11)$$

траектории остаются в контуре $A_1 N_1 A_2 N_2$ при любой реализации помехи, а переключение управления $u(y(t))$ с -1 на 0 происходит на произвольной фиксированной линии W , соединяющей ветви $A_1 B_1$ и $A_1 A_2$ наиболее отклоняющихся вправо и влево траекторий, исходящих из точки A_1 . В этом классе управлений при нижеприведенных проверяемых предположениях решения задач 1 и 3 совпадают.

Утверждение 4.9. Допустим, что при всех $H \in [H_{\min}, H_{\max}]$:

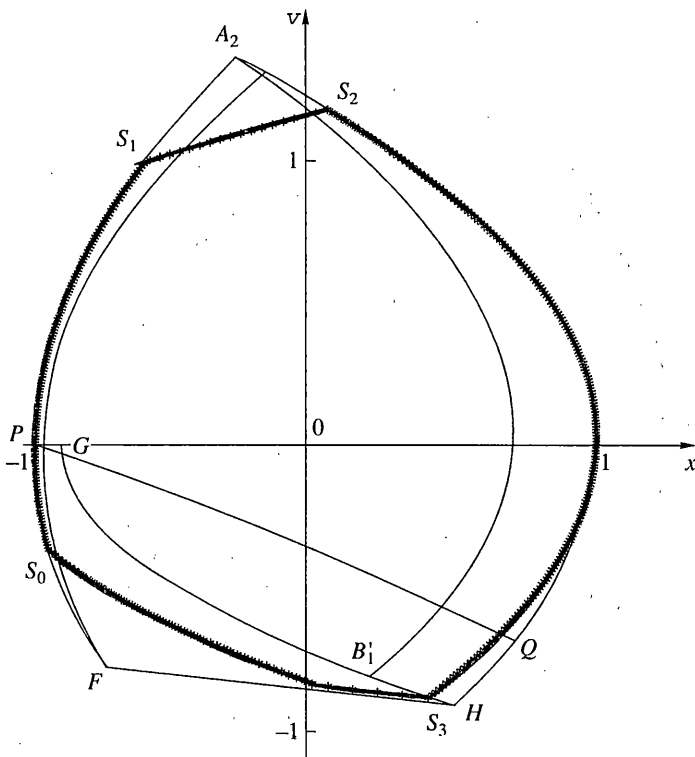
(a) наихудшей помехе в задаче 3 при каждом H соответствует замкнутая одно-витковая траектория;

(b) координаты точки $S_3(H)$ при наихудшей помехе $\varepsilon(t)$ непрерывно зависят от H ;

(c) точка минимума $h \in [H_{\min}, H_{\max}]$ функции V_H (4.8) — единственна.

Тогда значения величин (1.8) и (4.7) совпадают, а соответствующее управление, доставляющее гарантированный минимум в задаче 3, доставляет его и задаче 1.

Допустим, утверждение 4.9 не верно, и оптимальное управление u_W в задаче 1 выделяется условием $S_3^i \in W$, где W — непрерывная линия, отличная от $B_1' h$. Соот-



Фиг. 5

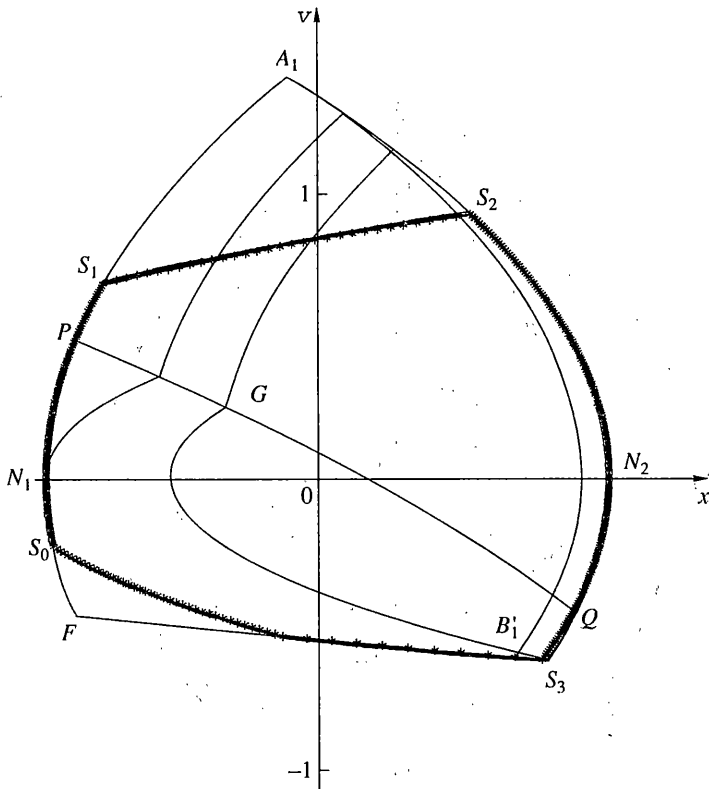
ветствующее значение функционала (1.6) обозначим через $V_W < V_h = J_*$. В силу определения управлений из множества U_H линия W проходит не выше линии $B'_1 H_{\max}$ (фиг. 3). Тогда в силу непрерывной зависимости точки $S_3(H)$ от H найдется такое $H_1 \leq H_{\max}$, что $S_3(H_1) \in W$. Рассмотрим оптимальное управление $u_{H_1} \in U_{H_1}$, порождающее согласно предположению (а) при наихудшей для этого управления помехе замкнутую траекторию $S_0(H_1)S_1(H_1)S_2(H_1)S_3(H_1)$, которой соответствует значение $V_{H_1} = V[u_{H_1}(\cdot)]$ функции (4.8), $V_{H_1} \geq J_*$ (4.7) (неравенство обращается в точное равенство только при $H_1 = h$). Но $S_3(H_1) \in W$, поэтому помехе как минимум гарантируется интенсивность расхода ресурсов V_{H_1} при использовании линии W в качестве линии переключения управления $u(y)$. Следовательно, линии W при наихудшей помехе соответствует значение функционала $V_W \geq V_{H_1} \geq V_h = J_*$, что противоречит предположению об исключительной оптимальности u_W .

5. Описание численного алгоритма и результаты расчетов. Утверждения 4.2–4.9 позволяют свести решение игровой задачи 1 к последовательному решению трех задач однопараметрической оптимизации. Пусть управление $u_H(y)$ совместно с начальными позициями (4.5) при наихудшей помехе порождает траекторию, на каждом витке удовлетворяющую следующим условиям:

(а) $S_0 \in L_H$, $S_2 \in A_1 N_2$, $S_3 \in B'_1 H$;

(б) продолжительность участков $S_0 S_1$ равна Δt .

Зафиксируем H (4.4) и выберем точку $z_0 \in L_H$ (4.5) в качестве начальной при движении в контуре $HFN_1 A_1 N_2$ с управлением $u_H(y)$. Наихудшую для этого управления помеху



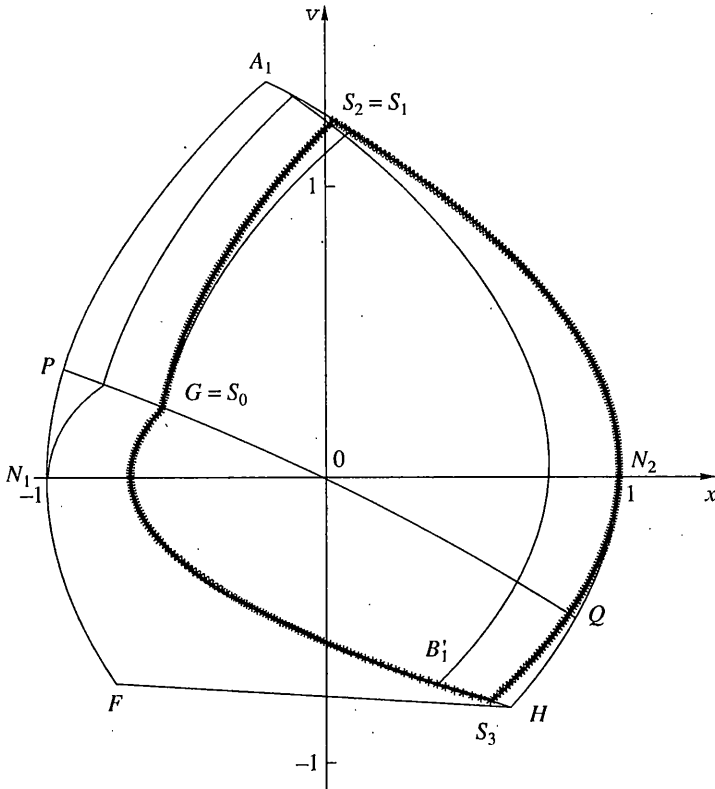
Фиг. 6

будем искать среди релейных функций времени, обеспечивающих возвращение фазовой точки $z(t)$ в исходное положение после каждого витка. Выполнение последнего условия обеспечивается утверждениями 4.7, 4.8 и замечаниями к ним, и для каждого примера проверялось отдельно, так как не удалось найти единого доказательства этого свойства для любых значений параметров задачи. На первых двух интервалах постоянства управления $u_H(y(t))$ помеха постоянна и принимает максимальное значение ϵ_0 , на двух последующих знак значения помехи может измениться с -1 на $+1$ (замечание 4.6). Совместно с условием замкнутости траектории на каждом витке получаем, что соответствующая наихудшей помехе траектория при фиксированном начальном условии определяется только одним параметром. Например, точкой ζ пересечения траекторией на участке S_2S_3 оси Ox . Величину относительной интенсивности расхода топлива на означенной траектории обозначим через $V(H, z_0, \zeta)$. Окончательно имеем

$$J_* = \min_H \max_{z_0} \max_{\zeta} V(H, z_0, \zeta)$$

$$z_0 \in L_H, H \in [H_{\min}, H_{\max}], \zeta \in O_1N_2 \in Ox \quad (5.1)$$

Величина (5.1) вычислялась путем перебора значений функции $V(H, z_0, \zeta)$ по всем входящим в нее допустимым значениям параметров. На фиг. 4–7 представлены результаты расчетов оптимальной структуры линий переключения релейного регулятора в их проекции на фазовую плоскость и соответствующие фазовые траектории (они отмечены жирной линией) при наихудшей по интенсивности расхода ресурсов помехе для различных значений параметров регулятора и величины помехи. На фиг. 4, 5 изображены проекции линий переключения при $F = 0.2$ и $\epsilon_0 = 1$, и значениях



Фиг. 7

запаздывания $\Delta t = 1.14$ и 1.04 соответственно. Уменьшение величины запаздывания привело к незначительному изменению линий переключения и к уменьшению относительной интенсивности расхода ресурсов с 0.638 до 0.600 , а также к изменению характера траектории при наихудшей помехе. Этим примерам соответствует отрицательное значение ординаты точки P . При уменьшении величины запаздывания ордината точки P становится положительной и структура оптимальных линий переключения меняется. На фиг. 6, 7 изображены линии переключения и соответствующие фазовые траектории при одинаковом запаздывании $\Delta t = 0.8$ и значениях параметров $F = 0.1, \epsilon_0 = 0.05$ и $F = 0.15, \epsilon_0 = 0.1$ соответственно. Этим примерам отвечает положительное значение ординаты точки P и величина относительной интенсивности расхода ресурсов 0.333 и 0.459 соответственно. При одинаковом качественном характере линий переключения отвечающая наихудшей помехе траектория меняется. В п. 3 показано, что гарантированно минимальная интенсивность расхода ресурсов не меньше $F + \epsilon_0$ (3.7) и при указанных значениях F и ϵ_0 оценка (3.7) может быть достигнута либо за счет уменьшения запаздывания, либо за счет ухудшения точности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-00988).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.

3. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. *Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г.* Управление космическим летательным аппаратом. М.: Машиностроение, 1964. 402 с.
5. *Гаушус Э.В., Смольянинов Н.Д.* Исследование релейной системы стабилизации летательного аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 5–13.
6. *Гаушус Э.В.* Исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Наука, 1976. 368 с.
7. *Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др.* Механика больших космических конструкций. М.: Факториал, 1997. 302 с.
8. *Иванова В.Ф., Соколов Б.Н.* Максимальная гарантированная точность релейного регулятора в одномерной задаче стабилизации // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 26–36.
9. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении динамическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
10. *Черноузько Ф.Л.* Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 6. С. 64–82.
11. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.04.2000