

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. С.П. КУНЦЕВИЧ, Г.И. МИХАСЕВ

ЛОКАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НЕКРУГОВОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕОДНОРОДНОГО ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ

Исследуется задача о параметрической неустойчивости тонкой некруговой конической оболочки, подверженной действию неоднородного пульсирующего давления. На краях оболочки (которые не обязательно плоские кривые) рассматриваются условия шарнирного опирания. Частота возбуждения предполагается близкой к удвоенной наименьшей собственной частоте колебаний оболочки. С использованием комплексного ВКБ-метода в сочетании с методом многих масштабов по времени, решения разрешающих уравнений строятся в виде функций, убывающих вдаль от некоторой "наиболее слабой" образующей и медленно растущих во времени в случае параметрического резонанса. С учетом наличия вязкого трения определены границы главной области локальной параметрической неустойчивости.

1. Введение. Важной задачей на стадии проектирования тонкостенных конструкций является динамический расчет. Для оболочек, испытывающих периодические (силовые, температурные и др.) воздействия, во многих случаях определяющим является расчет на параметрическую устойчивость.

По-видимому, впервые общая постановка задачи о динамической неустойчивости тонких оболочек, находящихся под действием периодических внешних сил, была сделана В.В. Болотиным в его книге [1]. Впоследствии появилось большое количество публикаций, посвященных параметрической неустойчивости тонких оболочек. В частности, в работах [2–6] рассмотрены цилиндрические оболочки, подверженные воздействию периодических осевой и радиальной сил, в статье [7] найдены области неустойчивости усеченного тонкого конуса под действием пульсирующего внешнего гидростатического давления.

подавляющее большинство работ по параметрической неустойчивости тонких оболочек относится к тому случаю, когда геометрические и физические характеристики оболочки постоянны, а возбуждаемые колебания покрывают всю поверхность оболочки. Однако овальность поперечного сечения, переменность толщины, неоднородность материала оболочки, наличие косых краев, отклонения срединной поверхности от цилиндрической, неоднородность силового воздействия и ряд других факторов могут приводить к сильной локализации колебаний. Природа локализации свободных колебаний упругих цилиндрических и конических оболочек средней длины достаточно хорошо изучена (см., например, [8, 9]). В данной работе делается попытка восполнить пробел в изучении локальных параметрических колебаний тонких конических оболочек с переменными параметрами.

2. Постановка задачи. Рассматривается некруговая коническая оболочка толщины h , на срединной поверхности которой введена ортогональная система криволинейных координат s, φ где $s = R^{-1}s'$, s' – расстояние до вершины конуса, R – характерный размер срединной поверхности, φ – координата на направляющей, выбираемая таким

образом, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2 = R^2(ds^2 + s^2d\varphi^2)$. При этом радиус кривизны равен $R_2 = Rsk^{-1}(\varphi)$. Пусть оболочка замкнута в направлении φ и ограничена двумя (не обязательно плоскими) краями: $s_1(\varphi) \leq s \leq s_2(\varphi)$.

В предположении о малой изменяемости внешней нагрузки (по координатам и по времени) для описания движения оболочки в окрестности динамического безмоментного напряженно-деформированного состояния используем полубезмоментные уравнения [1, 9]:

$$\varepsilon^4 \Delta^2 w + \varepsilon^2 \Delta_1 w - \Delta_k \Phi + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \gamma \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

$$\varepsilon^2 \Delta^2 \Phi + \Delta_k w = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta w = \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \Delta_k w = \frac{k(\varphi)}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$$

$$\Delta_1 w = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(T_2 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(T_3 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(T_3 \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(s T_1 \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right]$$

Здесь ε – малый параметр, γ – коэффициент вязкого трения, $T_i(s, \varphi, t)$, w , Φ , t – соответственно безразмерные усилия, прогиб, функция напряжений и время, связанные с соответствующими размерными величинами следующими соотношениями:

$$\varepsilon^8 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad (T_1^*, T_2^*, S^*) = \varepsilon^6 E h (T_1, T_2, T_3), \quad u_3^* = R w$$

$$\Phi^* = \varepsilon^4 E h R^2 \Phi, \quad t^* = R \sqrt{\rho / E t}$$

где h , ν , E , ρ – соответственно толщина оболочки, коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность материала. Предполагается, что все функции бесконечно дифференцируемы и вместе со своими производными являются величинами порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Напряженное состояние оболочки складывается из основного динамического напряженного состояния и простого краевого эффекта вблизи краев. Для построения интегралов, соответствующих основному напряженно-динамическому состоянию оболочки, необходимо на каждом краю выделить главные граничные условия – две линейные комбинации, в которые не входят интегралы краевого эффекта. В монографии [9] проведено расщепление 16 возможных вариантов граничных условий на четыре группы: группу заделки, группу шарнирной опоры, группу слабого закрепления и группу свободного края. Далее, для определенности изложения, будем рассматривать на краях оболочки $s = s_1(\varphi)$, $s = s_2(\varphi)$ условия шарнирного опирания. С точностью до величин порядка ε^2 главные условия, соответствующие шарнирному опиранию, имеют вид:

$$w = \partial^2 w / \partial s^2 = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi), s = s_2(\varphi) \quad (2.2)$$

Пусть оболочка находится под действием неоднородного пульсирующего давления $Q(\varphi) + \varepsilon Q_f(\varphi) \cos \Omega^* t$, где $Q(\varphi)$, $Q_f(\varphi)$ – статическая и периодическая составляющие давления, Ω^* – частота периодической составляющей, близкая к удвоенной наименьшей собственной частоте колебаний оболочки. Предполагая малую изменяемость давления как по времени, так и по координатам, из уравнений безмоментной теории оболочек [10] найдем окружное усилие:

$$T_2(s, \varphi, t) = s(q(\varphi) + \varepsilon q_f(\varphi) \cos \Omega t)$$

$$q(\varphi) = \frac{R}{E h \varepsilon^6} \frac{Q(\varphi)}{k(\varphi)}, \quad q_f(\varphi) = \frac{R}{E h \varepsilon^6} \frac{Q_f(\varphi)}{k(\varphi)}, \quad \Omega = R \sqrt{\rho / E} \Omega^*$$

3. Асимптотическое решение. Принимая во внимание неоднородность нагрузки и изменяемость кривизны, предположим, что на начальном промежутке времени возникающие колебания не покрывают всю срединную поверхность оболочки, а сосредоточены в окрестности некоторой (подлежащей определению) "наиболее слабой" образующей $\varphi = \varphi_0$. Решение задачи (2.1)–(2.2) с использованием асимптотического метода, развитого в [9], и метода многих масштабов по времени может быть построено в форме ВКБ-функций [11]:

$$w \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j(s, \xi, t_0, t_1) \exp \left\{ i \left[\varepsilon^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} b \xi^2 \right] \right\}$$

$$\Phi \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_j(s, \xi, t_0, t_1) \exp \left\{ i \left[\varepsilon^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} b \xi^2 \right] \right\} \quad (3.1)$$

$$\xi = \varepsilon^{-1/2} (\varphi - \varphi_0), \operatorname{Im} b > 0$$

Здесь $w_j(s, \xi, t_0, t_1)$, $f_j(s, \xi, t_0, t_1)$ – функции, подлежащие определению, p, b – неизвестные числа, $t_0 = t$, $t_1 = \varepsilon t$ – "медленное время". Последнее неравенство в (3.1) обеспечивает затухание функций вдали от линии $\varphi = \varphi_0$.

Все функции, зависящие от φ , раскладываются в ряды по степеням $\varepsilon^{1/2} \xi$. Подставляя (3.1) в задачу (2.1)–(2.2) и исключая f_j , получаем последовательность краевых задач

$$\sum_{j=0}^n D_j w_{n-j} = 0 \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=0}^n L_j w_{n-j} = \sum_{j=0}^n L_j \frac{\partial^2 w_{n-j}}{\partial s^2} = 0 \text{ при } s = s_1(\varphi_0), s = s_2(\varphi_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$D_0 = H + s \frac{\partial^2}{\partial t_0^2}, \quad H = \frac{k^2(\varphi_0)}{p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \frac{p^4}{s^3} - p^2 q(\varphi_0)$$

$$D_1 = \frac{\partial H}{\partial \varphi_0} \xi + \frac{\partial H}{\partial p} \left(b \xi - i \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0^2} \xi^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0 \partial p} \left(b \xi^2 - i \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{i}{2} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \left(\frac{1}{2} b^2 \xi^2 - i b \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{i}{2} b - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) + H^*$$

$$H^* = 2s \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + s \gamma \frac{\partial}{\partial t_0} - p^2 q_f(\varphi_0) \cos \Omega t$$

$$L_0 = 1, \quad L_1 = \xi s'(\varphi_0) \frac{\partial}{\partial s}, \quad L_2 = \frac{\xi^2}{2} \left(s'^2(\varphi_0) \frac{\partial^2}{\partial s^2} + s''(\varphi_0) \frac{\partial}{\partial s} \right)$$

3.1. Нулевое приближение. В нулевом ($n = 0$) приближении имеем однородную краевую задачу:

$$\frac{k^2(\varphi_0)}{p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} \right) + \frac{p^4}{s^3} w_0 - p^2 q(\varphi_0) w_0 + s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t_0^2} = 0$$

$$w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} = 0 \text{ при } s = s_1(\varphi_0), s = s_2(\varphi_0)$$

Ее решение будем искать в виде

$$w_0(s, \xi, t_0, t_1) = y(s)P_0(\xi, t_0, t_1)$$

$$P_0(\xi, t_0, t_1) = P_{0,c}(\xi, t_1) \cos \omega_0 t_0 + P_{0,s}(\xi, t_1) \sin \omega_0 t_0$$

Здесь $P_{0,c}(\xi, t_1)$, $P_{0,s}(\xi, t_1)$ – некоторые полиномы по ξ с коэффициентами, зависящими от t_1 ; ω_0 – нулевое приближение для собственной частоты колебаний оболочки, а $y(s)$ – собственная функция однородной краевой задачи

$$H(p, \varphi_0)y - s\lambda y = 0, \quad y = \partial^2 y / \partial s^2 = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi_0), \quad s = s_2(\varphi_0) \quad (3.3)$$

Параметр ω_0 и собственное значение λ задачи (3.3) связаны соотношением $\lambda = (\omega_0)^2$. Наименьшее положительное собственное значение λ_0 можно найти, например, методом асимптотического интегрирования, описанным в статье [12]. Заметим, что величина λ_0 является функцией параметров p и φ_0 : $\lambda_0 = \lambda_0(p, \varphi_0)$. Пусть $\lambda_0^* = \min_{p, \varphi_0} \lambda_0(p, \varphi_0) = \lambda_0(p^*, \varphi_0^*)$, где p^* , φ_0^* находятся из условий

$$\partial \lambda_0 / \partial \varphi_0 = \partial \lambda_0 / \partial p = 0 \quad (3.4)$$

которые равносильны следующим уравнениям [9]:

$$\int_{s_1}^{s_2} u \frac{\partial H}{\partial p} y ds = 0 \quad (3.5)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} u \frac{\partial H}{\partial \varphi_0} y ds + \frac{k^2(\varphi_0)s^3 s'}{p^4} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{\partial^3 y}{\partial s^3} \frac{\partial u}{\partial s} \right) \Big|_{s_1}^{s_2} = 0 \quad (3.6)$$

Здесь $u(s)$ – всякое решение однородной краевой задачи

$$Hu - s\lambda_0 u = 0$$

$$u = \partial^2 u / \partial s^2 = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi_0), \quad s = s_2(\varphi_0)$$

В дальнейшем градус у p^* , φ_0^* опускается.

3.2. *Первое приближение.* При $n = 1$ в (3.2) имеем неоднородную краевую задачу:

$$D_0 w_1 + D_1 w_0 = 0 \quad (3.7)$$

$$L_0 w_1 + L_1 w_0 = L_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2} + L_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi_0), \quad s = s_2(\varphi_0)$$

Решение задачи (3.7) ищем в виде

$$w_1(s, \xi, t_0, t_1) = \left[b \xi y_p(s) + \xi y_\varphi(s) - i y_p(s) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] P_0(\xi, t_0, t_1) + y(s) P_1(\xi, t_0, t_1)$$

$$P_1(\xi, t_0, t_1) = P_{1,c}(\xi, t_1) \cos \omega_0 t_0 + P_{1,s}(\xi, t_1) \sin \omega_0 t_0$$

где $P_{1,c}(\xi, t_1)$, $P_{1,s}(\xi, t_1)$ – некоторые полиномы по ξ с коэффициентами, зависящими от t_1 ; $y_p(s)$, $y_\varphi(s)$ – собственные функции краевых задач, полученных дифференцированием (3.3) по параметрам p и φ_0 :

$$H y_p - s\lambda_0 + \frac{\partial H}{\partial p} y - s \frac{\partial \lambda_0}{\partial p} y = 0 \quad (3.8)$$

$$y_p = \partial^2 y_p / \partial s^2 = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi_0), \quad s = s_2(\varphi_0)$$

$$Hy_\varphi - s\lambda_0 + \frac{\partial H}{\partial \varphi_0} y - s \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} y = 0 \quad (3.9)$$

$$y_\varphi + s'(\varphi_0) \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial^2 y_\varphi}{\partial s^2} + s'(\varphi_0) \frac{\partial^3 y}{\partial s^3} = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi_0), s = s_2(\varphi_0)$$

Заметим, что условия существования решения в первом приближении совпадают с равенствами (3.5)–(3.6).

3.3. *Второе приближение.* В работе [4] показано, что неустойчивость возникает в том случае, когда отношение частоты нагружения к частоте собственных колебаний оболочки оказывается равным или близким к одному из следующих значений: 2/1, 2/2, 2/3, 2/4 и т.д. Рассмотрим наиболее важный случай, когда $\Omega \approx 2\omega_0$. Пусть $\Omega = 2\omega_0 + \varepsilon\sigma$, $\sigma \sim 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где σ – параметр расстройки частоты Ω периодической составляющей внешней нагрузки. Тогда возникающую во втором приближении ($n = 2$) краевую задачу можно переписать в виде

$$\begin{aligned} D_0 w_2 - y(s) \frac{p^2 q_f(\varphi_0)}{2} \{P_{0,c} \cos(3\omega_0 t_0 + \sigma t_1) + P_{0,s} \sin(3\omega_0 t_0 + \sigma t_1)\} + \\ + (MP_{0,c} + D_1 y(s) P_{1,c}) \cos \omega_0 t_0 + (MP_{0,s} + D_1 y(s) P_{1,s}) \sin \omega_0 t_0 + \\ + y(s) \left\{ \left(2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \gamma \right) \omega_0 P_{0,s} + \frac{p^2 q_f(\varphi_0)}{2} (P_{0,s} \sin \sigma t_1 - P_{0,c} \cos \sigma t_1) \right\} \cos \omega_0 t_0 - \\ - y(s) \left\{ \left(2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \gamma \right) \omega_0 P_{0,c} - \frac{p^2 q_f(\varphi_0)}{2} (P_{0,s} \cos \sigma t_1 + P_{0,c} \sin \sigma t_1) \right\} \sin \omega_0 t_0 = 0 \\ w_2 + \{GP_{0,c} + L_1 y(s) P_{1,c}\} \cos \omega_0 t_0 + \{GP_{0,s} + L_1 y(s) P_{1,s}\} \sin \omega_0 t_0 = \\ = \frac{\partial^2 w_2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{GP_{0,c} + L_1 y(s) P_{1,c}\} \cos \omega_0 t_0 + \\ + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{GP_{0,s} + L_1 y(s) P_{1,s}\} \sin \omega_0 t_0 = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi_0), s = s_2(\varphi_0) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$M = \xi^2 (b^2 M_p + b M_{p\varphi} + M_\varphi) - i \xi (2b M_p + M_{p\varphi}) \frac{\partial}{\partial \xi} - i (b M_p + M_{p\varphi}) - M_p \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

$$M_p = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} y + \frac{\partial H}{\partial p} y_p, \quad M_\varphi = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0^2} y + \frac{\partial H}{\partial \varphi_0} y_\varphi, \quad M_{p\varphi} = \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0 \partial p} y + \frac{\partial H}{\partial \varphi_0} y_p + \frac{\partial H}{\partial p} y_\varphi$$

$$G = \xi s' \left(b \xi \frac{\partial y_p}{\partial s} + \xi \frac{\partial y_\varphi}{\partial s} - i \frac{\partial y_p}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + L_2 y$$

Решение задачи (3.10) представим в виде суммы двух функций: $w_2(s, \xi, t_0, t_1) = w_{2,N}(s, \xi, t_0, t_1) + w_{2,S}(s, \xi, t_0, t_1)$, где $w_{2,N}$ – решение неоднородной краевой задачи

$$\begin{aligned} D_0 w_2 - y(s) \frac{p^2 q_f(\varphi_0)}{2} \{P_{0,c} \cos(3\omega_0 t_0 + \sigma t_1) + P_{0,s} \sin(3\omega_0 t_0 + \sigma t_1)\} = 0 \\ w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi_0), s = s_2(\varphi_0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

а $w_{2,s}$ – решение неоднородной краевой задачи

$$\begin{aligned}
 & D_0 w_2 + (MP_{0,c} + D_1 y(s)P_{1,c}) \cos \omega_0 t_0 + (MP_{0,s} + D_1 y(s)P_{1,s}) \sin \omega_0 t_0 + \\
 & + y(s) \left\{ \left(2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \gamma \right) \omega_0 P_{0,s} + \frac{p^2 q_f(\varphi_0)}{2} (P_{0,s} \sin \sigma t_1 - P_{0,c} \cos \sigma t_1) \right\} \cos \omega_0 t_0 - \\
 & - y(s) \left\{ \left(2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \gamma \right) \omega_0 P_{0,c} - \frac{p^2 q_f(\varphi_0)}{2} (P_{0,s} \cos \sigma t_1 + P_{0,c} \sin \sigma t_1) \right\} \sin \omega_0 t_0 = 0 \\
 & w_2 + \{GP_{0,c} + L_1 y(s)P_{1,c}\} \cos \omega_0 t_0 + \{GP_{0,s} + L_1 y(s)P_{1,s}\} \sin \omega_0 t_0 = \\
 & = \frac{\partial^2 w_2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{GP_{0,c} + L_1 y(s)P_{1,c}\} \cos \omega_0 t_0 + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{GP_{0,s} + L_1 y(s)P_{1,s}\} \sin \omega_0 t_0 = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi_0), \quad s = s_2(\varphi_0)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Задача (3.12) имеет решение в виде $w_{2,s}(s, \xi, t_0, t_1) = P_{2,c}(s, \xi, t_1) \cos \omega_0 t_0 + P_{2,s}(s, \xi, t_1) \sin \omega_0 t_0$, если вектор-функция $\mathbf{X} = (P_{0,s}, P_{0,c})^T$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial p^2} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \xi^2} + a \xi \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} + \left(c \xi^2 + \frac{1}{2} a + \eta \right) \mathbf{X} + \tag{3.13}$$

$$+ \left\| 2 \frac{\partial}{\partial t_1} + \gamma \right\| \omega_0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{X} + d \begin{vmatrix} \cos \sigma t_1 & \sin \sigma t_1 \\ \sin \sigma t_1 & -\cos \sigma t_1 \end{vmatrix} \mathbf{X} = 0$$

$$a = -i \left(b \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0 \partial p} \right), \quad c = \frac{1}{2} \left(b^2 \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial p^2} + 2b \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0 \partial p} + \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0^2} \right)$$

$$d = \frac{p^2 q_f(\varphi_0)}{2z} \int_{s_1}^{s_2} u y ds, \quad z = \int_{s_1}^{s_2} u y ds.$$

$$\eta = \frac{i}{2z} \left\{ \int_{s_1}^{s_2} u \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_0} y_p - \frac{\partial H}{\partial p} y_\varphi \right) ds + \frac{k^2(\varphi_0) s^3 s'}{p^4} \left(\frac{\partial y_p}{\partial s} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{\partial^3 y_p}{\partial s^3} \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right\}_{s_1}^{s_2}$$

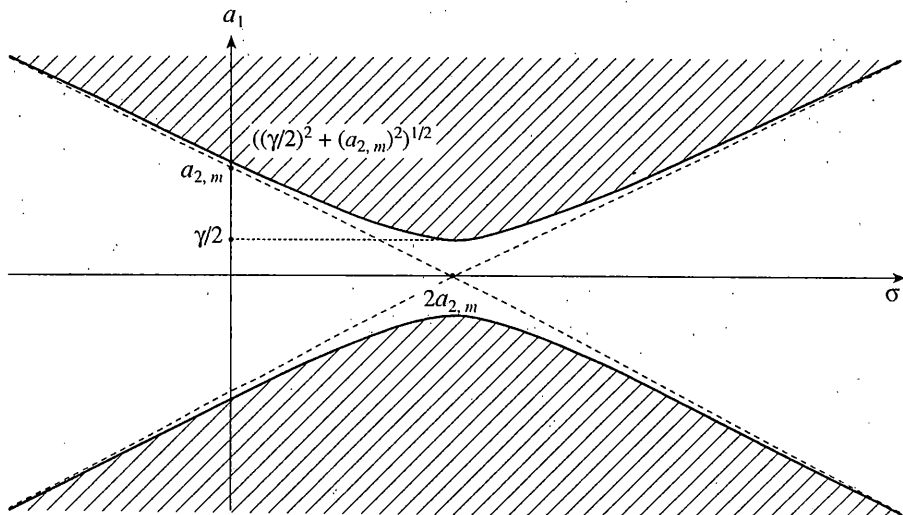
Для того чтобы система уравнений (3.13) имела решения в виде полиномов по ξ , необходимо чтобы $c = 0$. Из этого условия находим единственное значение b такое, что $\text{Im } b > 0$.

Решение системы (3.13) будем искать в виде

$$\mathbf{X} = H_m(r, \xi) \mathbf{Y}_m \tag{3.14}$$

где $\mathbf{Y}_m = (S_m(t_1), C_m(t_1))^T$, а $H_m(r, \xi)$ – полином Эрмита степени m :

$$r = \left(\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial p^2} \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0^2} - \left(\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0 \partial p} \right)^2 \right)^{1/4} \left(\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial p^2} \right)^{-1/2}$$



Подставляя (3.14) в (3.13), получаем однородную систему дифференциальных уравнений для определения Y_m :

$$\dot{Y}_m - A_m(t_1)Y_m = 0 \quad (3.15)$$

$$A_m(t_1) = \begin{vmatrix} -\frac{\gamma}{2} - a_1 \sin \sigma t_1 & -a_{2,m} + a_1 \cos \sigma t_1 \\ a_{2,m} + a_1 \cos \sigma t_1 & -\frac{\gamma}{2} + a_1 \sin \sigma t_1 \end{vmatrix}$$

$$a_1 = \frac{d}{2\omega_0}, \quad a_{2,m} = a \frac{2m+1}{4\omega_0} + \frac{\eta}{2\omega_0}$$

Формально, процесс нахождения функций $w_j(s, \xi, t_0, t_1)$ можно продолжить, однако точность уравнений (2.1) для этого является недостаточной.

4. Область неустойчивости. Таким образом, форма локальных параметрических колебаний в окрестности слабой образующей имеет вид

$$w = \{ [C_m(\epsilon t) \cos \omega_0 t + S_m(\epsilon t) \sin \omega_0 t] y(s) H_m(r\xi) + O(\epsilon^{1/2}) \} \exp \left\{ i \left[\epsilon^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} b \xi^2 \right] \right\} \quad (4.1)$$

В зависимости от соотношения между параметрами задачи, это решение может быть неограниченно растущим во времени или конечным, т.е. определять неустойчивые или устойчивые формы колебаний. Заметим, что уравнения (3.15) были выведены ранее при решении других задач о параметрической неустойчивости цилиндрических оболочек [11, 13, 14]. Таким образом, система (3.15) инвариантна как относительно формы оболочки, так и относительно вида нагружения. Область ее неустойчивости в случае отсутствия вязкого трения ($\gamma = 0$) была найдена в работе [13]. На фигуре ее границы показаны пунктирными линиями. Для точек (σ, a_1) , лежащих в заштрихованной области, амплитуды параметрических колебаний $S_m(\epsilon t)$, $C_m(\epsilon t)$ являются неограниченно растущими во времени функциями. За пределами заштрихованной области, если $a_1, a_{2,m}, \sigma \sim 1$, амплитуды ограничены.

В силу неравенства $\text{Im } b > 0$ решение (4.1) описывает параметрические колебания, сосредоточенные в окрестности слабой образующей $\varphi = \varphi_0$. В случае параметрической неустойчивости, принимая во внимание отсутствие периодичности по координате φ , данное решение следует рассматривать на некотором начальном отрезке времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. *Марков А.Н.* Динамическая устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 2. С. 145–150.
3. *Ониашвили О.Д.* О динамической устойчивости пологих оболочек // Сообщ. АН ГССР. 1950. Т. 11. № 3. С. 169–175.
4. *Yao J.C.* Dynamic stability of cylindrical shells under static and periodic axial and radial loads // AIAA Journal. 1963. V. 1. № 6. P. 1391–1396.
5. *Vijayaraghavan A., Evan-Iwanowski R.M.* Parametric instability of circular cylindrical shell // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1967. V. 34. № 4. P. 985–990.
6. *Сальников Г.М.* Динамическая устойчивость цилиндрических и конических оболочек кругового и некругового сечения при различных граничных условиях // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанс. ун-та, 1967. Вып. 5. С. 469–479.
7. *Kornecki A.* Dynamic stability of truncated conical shells under pulsating pressure // Israel J. Technol. 1966. V. 4. № 1–2. P. 110–120.
8. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.В., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
9. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука. Физматлит, 1995. 320 с.
10. *Новожиллов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
11. *Mikhasev G.I.* Free and parametric vibrations of cylindrical shells under static and periodic axial loads // Technische Mechanik. 1997. Bd 17. Heft 3. S. 209–216.
12. *Товстик П.Е.* Об определении наименьшей частоты колебаний конической оболочки вращения // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. С. 109–116.
13. *Mikhasev G.I., Kuntsevich S.P.* Thermoparametric vibrations of noncircular cylindrical shell in non-stationary temperature field // Technische Mechanik. 1997. Bd 17. H. 2. S. 113–120.
14. *Kuntsevich S.P., Mikhasev G.I.* Parametric vibrations of viscoelastic cylindrical shell under static and periodic axial loads // Technische Mechanik. 1999. Bd 19. H. 3. S. 187–195.

Витебск

Поступила в редакцию
10.01.2000