

УДК 539.3

© 2002 г. К.В. КУИМОВ, А.В. КУЗЬМИН, Ф.Д. СОРОКИН

ДЕФОРМАЦИЯ КРУГЛОЙ ФОТОПЛАСТИНКИ В ТЕЛЕСКОПЕ ШМИДТА С УЧЕТОМ ЕЕ НЕПЛОТНОГО ПРИЛЕГАНИЯ К СФЕРИЧЕСКОЙ ОПОРЕ

Фотографические обзоры, выполненные с использованием телескопа Шмидта, в настоящее время являются практически единственным источником информации о положении слабых объектов. Отсутствие методов астрометрической редукиции наблюдений, учитывающих особенности телескопа Шмидта, вело к значительным остаточным систематическим ошибкам, которые не позволяли использовать шмидтовские обзоры как источник положений слабых объектов. В [1] показано, что основным источником систематических ошибок является неадекватный учет последствий деформации фотопластинки во время экспозиции, и предложен высокоточный метод учета деформации для случая квадратной пластинки. В публикуемой работе исследован еще один вероятный источник систематических ошибок – неполное прилегание деформированной пластинки к сферической опоре. Показано, что неполное прилегание может объяснить расхождения между предложенной в [1] моделью учета систематических ошибок, вызванных деформацией пластинки, и реальными отклонениями, обнаруженными при редукиции шмидтовских пластинок.

1. Введение. Фотографические обзоры, выполненные с использованием телескопа Шмидта, в настоящее время являются практически единственным источником информации о положении слабых объектов. Однако, шмидтовские обзоры никогда не рассматривались как высокоточный астрометрический наблюдательный материал, в первую очередь в связи с отсутствием адекватных методов астрометрической редукиции (подробный обзор методов астрометрической редукиции шмидтовских наблюдений см. в [2]). Причиной, по-видимому, является деформация фотопластинки во время экспозиции, коренным образом отличающая астрометрическую редукицию шмидтовских наблюдений от методов классической астрометрии.

Традиционно для учета систематических ошибок положений звезд, вызванных деформацией фотопластинки в кассете телескопа Шмидта, используется решение Шефферда [3]. Это решение получено в предположении, что круглая пластинка прижата к сфере прижимным кольцом без зазоров и трения; кроме того, в месте прижима края пластинки кольцом отсутствуют радиальные усилия (фиг. 1). Предсказываемое решением Шефферда смещение положения звезды в радиальном направлении ε , вызванное деформацией, имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1-\mu}{16} \gamma^2 \lambda - \frac{1-3\mu}{48} \lambda^3 \quad (1.1)$$

где μ – коэффициент Пуассона материала (в данном случае стекла), из которого изготовлена пластинка; $\gamma \approx a/R$ – угловой радиус поля зрения (от центра пластинки до прижимного кольца) в радианах; a – радиус круглой пластинки; R – радиус сферы (равный фокусному расстоянию телескопа Шмидта); λ – угловое расстояние точки пластинки от центра, в радианах.

В [1] было показано, что в реалистическом случае квадратной пластинки решение Шеферда не может описать картину деформации, и было предложено высокоточное аналитическое решение, основанное на тех же предположениях, но построенное с применением нелинейной теории деформации пластин. Применение предложенного метода к редукции наблюдений телескопов Шмидта Паламорской и Англо-Австралийской обсерваторий позволило снизить систематические ошибки в 2.5 раз и упростить их структуру при одновременном уменьшении числа неизвестных в редукционной модели втрое. Тем не менее, в остаточных отклонениях была обнаружена систематическая составляющая с амплитудой 4–6 мкм, которую не удалось объяснить.

В публикуемой работе исследуется возможный источник этих остаточных систематических ошибок – предположение о полном, без зазоров прилегании пластинки к сфере. Это предположение является общим для решения Шеферда и решения, полученного в [1]. В [3] отмечается, что предположение об отсутствии зазоров между сферой и пластинкой не может быть верным, так как из него следует, что в зоне $\lambda > 0.7\gamma$ контактное давление отрицательно. Цель данной работы – уточнить решение Шеферда при сохранении всех его предположений, кроме одного, допустив неполное прилегание пластинки к сфере. Кроме того, учитывается конечная толщина пластинки. Размер зоны контакта пластинки со сферой считается неизвестным и подлежит определению вместе с другими величинами.

Указанная задача решалась численно двумя способами: интегрированием нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка, описывающей сильный изгиб круглой пластинки, и методом конечных элементов (МКЭ). В обоих случаях решение носило итерационный характер по причине нелинейности самих уравнений и нелинейности, вносимой неизвестной границей r_c зоны контакта.

2. Уравнения сильного изгиба пластинки в осесимметричном случае. Воспользуемся уравнениями сильного изгиба пластин в декартовых координатах [4]. Для расчета осесимметричных деформаций круглой пластинки преобразуем их к полярным координатам. Часть преобразованных уравнений заменим на аналогичные из [3], так как это удобнее для численного расчета.

Уравнение равновесия в проекции на нормаль в осесимметричном случае имеет вид:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{r dr} \right)^2 w - \left(T_1 \frac{d^2 w}{dr^2} + T_2 \frac{dw}{r dr} \right) = p \quad (2.1)$$

где D – цилиндрическая жесткость, T_1 , T_2 – мембранные усилия в радиальном и окружном направлениях, p – давление на пластинку, w – нормальное перемещение.

Уравнения для расчета радиального перемещения $u(r)$ имеют вид

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \quad (2.2)$$

$$T_2 = \mu T_1 + Eh \frac{u}{r}, \quad \frac{d(T_1 r)}{dr} = T_2$$

где E – модуль упругости, h – толщина. Первые два из этих уравнений, которые являются соотношениями упругости, приведены в обычном для теории пластин виде и могут быть получены преобразованием соответствующих уравнений из [4]. Однако они отличаются от приведенных в [3]. Причина в том, что Шеферд отсчитывает перемещения не от исходного состояния пластинки, а от ее базового состояния, которое получается, если уложить пластинку на сферу так, что меридиан не растягивается. По этой причине в [3] дополнительное слагаемое от нормального перемещения имеет другой вид и помещено в другое соотношение упругости. Последнее уравнение из (2.2) – уравнение равновесия – аналогично приведенному в [3].

На участке контакта со сферой уравнение (2.1) существенно упрощается

$$w = -\frac{r^2}{2R}, \quad \frac{T_1}{R} + \frac{T_2}{R} = p \Big|_{0 \leq r \leq r_c} \quad (2.3)$$

Это позволяет найти контактное давление на участке контакта. На втором участке контактное давление отсутствует

$$p = 0 \Big|_{r_c < r < a} \quad (2.4)$$

3. Граничные условия. В центре пластинки нет различия между радиальным и окружным направлением, поэтому

$$T_1 = T_2 \Big|_{r=0} \quad (3.1)$$

На краю пластинки по предположению нет радиальных усилий, т.е.

$$T_1 = 0 \Big|_{r=a} \quad (3.2)$$

На границе контактного участка и на краю пластинки известны прогиб и угол поворота нормали, так как в этих точках имеет место касание со сферой (фиг. 1):

$$w \Big|_{r=r_c} = -\frac{r_c^2}{2R}, \quad \frac{dw}{dr} \Big|_{r=r_c} = -\frac{r_c}{R} \quad (3.3)$$

$$w \Big|_{r=a} = -\frac{a^2}{2R}, \quad \frac{dw}{dr} \Big|_{r=a} = -\frac{a}{R}$$

Система 6-и уравнений (2.1), (2.2) и 6-и граничных условий (3.1)–(3.3) полностью описывают состояние пластинки. Однако решение осложняется тем, что система нелинейна. Для преодоления этой трудности применяется итерационная схема, рекомендуемая теорией оболочек [5].

4. Итерационная схема. Граница контактной зоны r_c фиксируется. В качестве первого приближения принимается решение Шеферда с поправкой на отсчет перемещений от недеформированного состояния (поправка равна разности координатного угла λ и его синуса):

$$u^{(1)} = \frac{1-\mu}{16} \frac{ra^2}{R^2} - \frac{3-\mu}{16} \frac{r^3}{R^2} \quad (4.1)$$

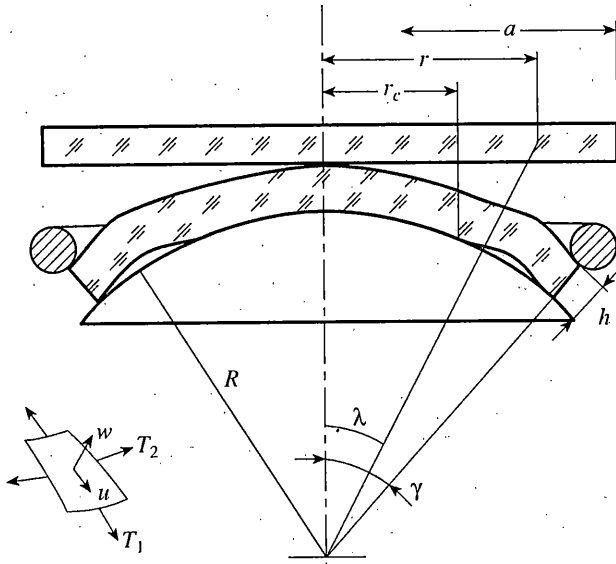
$$w^{(1)} = -r^2/(2R)$$

где верхним индексом в скобках отмечен номер итерации.

Подстановка (4.1) в (2.2) позволяет найти мембранные усилия $T_1^{(1)}$ и $T_2^{(1)}$, которые подставляются в (2.1). Уравнение (2.1) преобразуется так, чтобы мембранные усилия оказались в правой части

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{rdr} \right)^2 w^{(2)} = \frac{1}{D} \left(T_1^{(1)} \frac{d^2 w^{(1)}}{dr^2} + T_2^{(1)} \frac{dw^{(1)}}{rdr} \right) \quad (4.2)$$

Так как нормальное перемещение в первом приближении известно из (4.1), вся правая часть (4.2) оказывается заданной. Уравнение (4.2) является линейным дифференциальным уравнением 4-го порядка. Краевая задача для (4.2) с граничными условиями (3.3) решалась стандартным методом начальных параметров. Найденная функция $w^{(2)}$ подставляется в (2.2). Таким образом, единственная нелинейность в (2.2) устраняется, после чего линейная относительно неизвестных $u^{(2)}$, $T_1^{(2)}$, $T_2^{(2)}$ система решается обычным способом с учетом граничных условий (3.1), (3.2). Нахождение



Фиг. 1

всех неизвестных $u^{(2)}$, $w^{(2)}$, $T_1^{(2)}$, $T_2^{(2)}$ завершает вторую итерацию. Третья и последующие итерации выполняются аналогично. Итерационный процесс завершается, когда перестают меняться 5 значащих цифр каждой из величин, это происходит на 12–15-й итерации.

После завершения итерационного процесса контролируется непрерывность кривизны на границе контактной зоны, т.е. проверяется условие

$$\left. \frac{d^2 w}{dr^2} \right|_{r=r_c} = -\frac{1}{R} \quad (4.3)$$

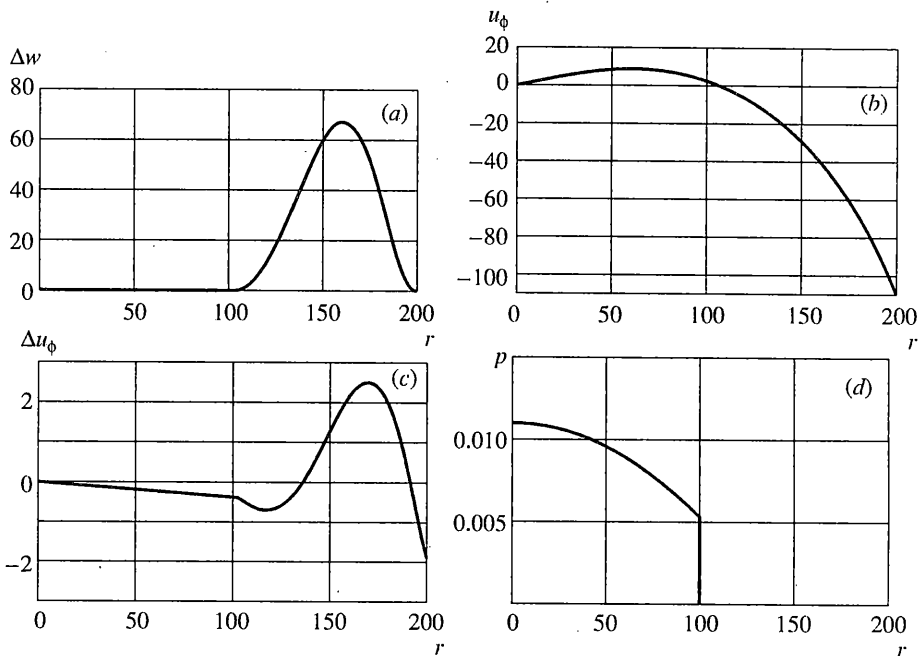
Если это условие не выполнено, граница передвигается, и итерационный процесс повторяется. Процедура поиска границы контактной зоны продолжается до тех пор, пока условие (4.3) не будет выполнено с заданной точностью. Проверка точности решения осуществляется контролем за равновесием конечных частей пластинки и контрольным сравнением с другим численным методом (МКЭ).

5. Результаты. Приведем результат решения контактной задачи, найденного по описанной выше схеме для круглой пластинки с параметрами, близкими к реальной шмидтовской пластинке: $E = 64$ ГПа, $\mu = 0.2$, $a = 200$ мм, $R = 3070$ мм, $h = 1$ мм. Наружный радиус a выбран так, чтобы площадь круглой пластины примерно совпала с площадью реальной квадратной фотопластинки размером 355×355 мм.

Итерационный процесс приводит к значению $r_c = 99.2$ мм. Отметим, что при увеличении найденного контактного радиуса r_c энергия деформаций возрастает, а при уменьшении r_c пластинка пытается проникнуть под сферу, т.е. нарушается неравенство $w(r) \geq -r^2/(2R)$. Это, как и следовало ожидать, означает, что найденное положение пластинки доставляет минимум энергии деформаций.

Полные перемещения точек фотоэмульсии в плане вычисляются в соответствии с гипотезой Кирхгоффа по формуле

$$u_\Phi = u - \frac{h}{2} \frac{dw}{dr} \quad (5.1)$$



Фиг. 2

Отклонение от решения Шеферда [3] определяется соотношением

$$\Delta u_{\phi} = u_{\phi} - \left(u^{(1)} + \frac{h}{2} \frac{r}{R} \right) \quad (5.2)$$

где $u^{(1)}$ берется из (4.1). На фиг. 2 приведены полные перемещения в радиальном направлении u_{ϕ} [мкм], отклонения Δu_{ϕ} [мкм], отрыв от сферы в нормальном направлении Δw [мкм] и эпюра давления p [МПа] пластинки на сферу в зависимости от радиуса r [мм].

Полученные результаты свидетельствуют о том, что предположение о полном прилегании действительно не реализуется – пластинка отклоняется от сферы, причем нормальное перемещение достигает почти 70 мкм. Нормальные перемещения пластинки вызывают и радиальные перемещения, отклонение которых от предсказываемых решением Шеферда составляет около 3 мкм (примерно 3% максимального перемещения). Отметим (см. фиг. 2), что полученное в настоящей работе решение для случая неполного прилегания свободно от парадокса "отрицательного контактного давления", присущего решению Шеферда.

Разумеется, некорректное предположение о полном прилегании вызывает неучтенные систематические ошибки и при рассмотрении деформаций квадратной шмидтовской пластинки методом, предложенным в [1]. Так как максимальное перемещение в плане для квадратной шмидтовской пластинки размером 355 × 355 мм составляет около 200 мкм, ожидаемая остаточная систематическая ошибка, возникающая вследствие неполного прилегания пластинки к фокальной сфере, должна составлять примерно 3% от максимального перемещения (по аналогии с круглой пластинкой), т.е. около 6 мкм.

6. Заключение. В публикуемой работе проанализировано предположение о полном прилегании фотопластинки к сферической опоре при ее деформации в кассете телескопа Шмидта. Это предположение лежит в основе решения Шеферда для случая круглой пластинки [3] и аналогичного решения для случая квадратной пластинки [1].

Для случая круглой пластинки построено численное решение без предположения о полном прилегании. На основе анализа построенного решения показано, что предположение о полном прилегании служит причиной остаточных систематических ошибок, достигающих 3 мкм в случае круглой пластинки и (по оценке) 6 мкм при деформации квадратной шмидтовской пластинки. Весьма вероятно, что отказ от предположения о полном прилегании в случае квадратной пластинки позволит построить модель учета систематических ошибок положений звезд, вызванных деформацией фотопластинки в кассете телескопа Шмидта, с систематической точностью лучше 1 мкм.

Работа выполнена в рамках проекта, поддержанного грантами Российского фонда фундаментальных исследований 99-02-16663 и 98-02-16986.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куимов К.В., Сорокин Ф.Д., Кузьмин А.В., Барушева Н.Т. Высокоточная астрометрия с телескопом Шмидта // *Астрон. ж.* 2000. Т. 77. Вып. 5. С. 281.
2. Morrison J.E., Smart R.L., Taff L.G. Do we need to model plates at all? // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 1998. V. 296. № 1. P. 66–76.
3. Shepherd W.B. The deformation of a photographic plate in a Schmidt camera // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 1953. V. 113. № 4. P. 450–454.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
5. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. М.: Наука. Физматлит, 1992. 390 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.09.2000