МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2002

УДК 539.375

© 2002 г. А.В. БЕРЕЗИН, П.Л. ПОНОМАРЕВ

ТРЕЩИНЫ ПОПЕРЕЧНОГО И ПРОДОЛЬНОГО СДВИГОВ В РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ДИЛАТИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Построена итерационная схема для решения задачи о трещине поперечного сдвига, найдены оценки между точным решением и n-ым приближением, получена сходимость итерационного метода для решения задачи о трещине продольного сдвига и получена оценка на параметр сходимости этого метода.

При построении механики разрушения дилатирующих разномодульных сред [1, 2] отдельно рассматриваются задачи о трещинах нормального отрыва, поперечного и продольного сдвигов, соответствующие трем видам относительных перемещений берегов трещины [3–5]: нормальный отрыв (вид 1), поперечный (вид 2) и продольный (вид 3) сдвиги. Напомним, что вид 1 связан со смещением берегов трещины во взаимно противоположных направлениях по нормали к поверхности трещины, вид 2 соответствует смещениям, при которых поверхности трещины скользят друг по другу перпендикулярно фронту трещины, наконец, вид 3 соответствует скольжению поверхностей трещины параллельно фронту трещины. Первый из них в [1] уже был рассмотрен до конца. Оставшиеся лишь частично разобраны. В частности в [2] выписаны распределения напряжений вблизи трещин в зависимости от полярного угла и радиуса. В публикуемой работе рассматривается сходимость метода последовательных приближений для задачи о трещине продольного сдвига и находятся последовательные приближения задачи о трещине поперечного сдвига.

Итерационная схема метода последовательных приближений для нахождения функции напряжений $\chi(z, \bar{z})$ – решения задачи о трещине поперечного сдвига в комплексных переменных $z = x + iy$, $\bar{z} = x-iy$ имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^4\chi^{(n)}}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} = f^{(n-1)}(z,\bar{z})$$

$$\chi^{(n)} = \chi_0^{(n)} + \iiint\int f^{(n-1)}(z,\bar{z})dzdzd\bar{z}d\bar{z} \tag{1}$$

$$f(z,\bar{z}) = -\frac{1}{16(\alpha+\alpha_1/9+\alpha\delta u)}\left\{\frac{4}{3}\alpha\delta\frac{\partial^2\sigma_i}{\partial z\partial\bar{z}} + \right.$$

$$+\frac{3}{2}\alpha\delta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(-\sigma_{11}+\sigma_{22}-2i\sigma_{12}) + \frac{\partial^2 u}{\partial\bar{z}^2}(-\sigma_{11}+\sigma_{22}+2i\sigma_{12}) + \right.$$

$$\left.\left.+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) - 4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}\sigma_0 + 8\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\bar{z}} + 8\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\sigma_0}{\partial z}\right]\right\}, \quad u = \frac{\sigma_0}{\sigma_i}$$

где $\chi_0^{(n)}$ – соответствующее решение однородного уравнения (1), σ_i – интенсивность тензора напряжений, σ_0 – шаровая часть тензора напряжений, α, α_1 – постоянные, δ – малый параметр.

Из экспериментальных исследований известно [1], что $\delta < 1$. В качестве нулевого приближения возьмем случай $\delta = 0$. В этом случае имеем классическую плоскую задачу линейной теории упругости [6] для комплексных потенциалов $\Phi(z)$, $\psi(z)$:

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \psi(z)]$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \psi(z) = -z\Phi'(z)$$

Рассмотрим бесконечную плоскость с разрезом на отрезке $|x| \leqslant l$, $y = 0$, моделирующим трещину, и предположим, что берега разреза свободны от напряжений.

В первом приближении $f(z, \bar{z})$ вычисляется по напряжениям, полученным в нулевом приближении при $f(z, \bar{z}) \equiv 0$. Соответственно первое приближение для χ имеет вид

$$\chi^{(1)} = \chi_0^{(1)} + \iiiint f^0(z, \bar{z})dzdzd\bar{z}d\bar{z} \tag{2}$$

где $\chi_0^{(1)}$ – соответствующее решение однородного уравнения (1).

Напряжения в первом приближении определяются по формулам

$$\sigma_{11}^{(1)} = -\left[\frac{\partial^2\chi_0^{(1)}}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2\chi_0^{(1)}}{\partial z d\bar{z}} + \frac{\partial^2\chi_0^{(1)}}{\partial \bar{z}^2} + \iint f^0(z,\bar{z})d\bar{z}d\bar{z} - \right.$$

$$\left. - 2\iint f^0(z,\bar{z})dzd\bar{z} + \iint f^0(z,\bar{z})dzdz\right]$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = \left[\frac{\partial^2\chi_0^{(1)}}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\chi_0^{(1)}}{\partial z d\bar{z}} + \frac{\partial^2\chi_0^{(1)}}{\partial \bar{z}^2} + \iint f^0(z,\bar{z})d\bar{z}d\bar{z} + \right. \tag{3}$$

$$\left. + 2\iint f^0(z,\bar{z})dzd\bar{z} + \iint f^0(z,\bar{z})dzdz\right]$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = -i\left[\frac{\partial^2\chi_0^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\chi_0^{(1)}}{d\bar{z}^2} + \iint f^0(z,\bar{z})d\bar{z}d\bar{z} - \iint f^0(z,\bar{z})dzdz\right.$$

Теперь, поскольку $f^0(z, \bar{z})$ определена из решения нулевого приближения, удовлетворить граничным условиям в первом приближении можно только выбором $\chi_0^{(1)}$. Предполагаем, что для плоскости с трещиной поперечного сдвига длины $2l$ граничными условиями будут [3–5] $\sigma_{12} = \tau_0$ на бесконечности и свободные от усилий берега трещины. Тогда, поскольку в нулевом приближении

$$\sigma_{12} = \frac{\tau_0 z}{\sqrt{z^2 - l^2}}, \quad \sigma_0 = 0, \quad \sigma_i = \sqrt{3}\tau_0 \frac{\sqrt{z\bar{z}}}{\sqrt[4]{(l^2 - z^2)(l^2 - z^2)}}, \quad u = 0$$

при $|z| \to \infty$ $\delta^2\sigma_i/\partial z\partial\bar{z} \sim 0$.

Поэтому при $|z| \to \infty$ члены в (3) с интегралами обращаются в нуль и остается проверить только выполнение граничных условий на берегах трещины. Для нулевого приближения

$$Z_1 = \tau_0 z / \sqrt{z^2 - l^2}, \quad \sigma_i = \sqrt{3Z_1\bar{Z}_1}$$

Тогда в круге $|z| < l$:

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\frac{\tau_0}{l}\sqrt{z\bar{z}}\left(1 - \frac{z^2 + \bar{z}^2}{l^2} + \frac{z^2\bar{z}^2}{l^4} + \ldots\right)^{-1/4} =$$

$$= \mp\sqrt{3}\,\frac{\tau_0}{l}\sqrt{z\bar{z}}\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}(z^m\bar{z}^n + z^n\bar{z}^m)$$

$$\frac{\partial^2\sigma_i}{\partial z\partial\bar{z}} = \mp\sqrt{3}\,\frac{\tau_0}{l^3}\sqrt{z\bar{z}}\sum b_{mn}(m + n + mn)(z^{m-1}\bar{z}^{n-1} + z^{n-1}\bar{z}^{m-1})$$

Здесь выбрана такая однозначная ветвь $\sqrt[4]{(l^2-z^2)(l^2-\bar{z}^2)}$, что знак (–) нужно брать при $y > 0$, а знак (+) – при $y < 0$ согласно [6]. Заметим, что $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$.

Тогда

$$f(z,\bar{z}) = \frac{\tau_0 |z|}{l} \sum a_{mn}(z^n \bar{z}^m + z^m \bar{z}^n), \quad \operatorname{Im} a_{mn} = 0$$

Поскольку

$$\iint f(z,\bar{z}) dz dz = \frac{\tau_0 |z|}{l} \sum a_{mn} \left[\frac{z^{n+2}\bar{z}^m}{(n+3/2)(n+5/2)} + \frac{z^{m+2}\bar{z}^n}{(m+3/2)(m+5/2)} \right]$$

$$\iint f(z,\ \bar{z}) d\bar{z} d\bar{z} = \frac{\tau_0 |z|}{l} \sum a_{mn} \left[\frac{z^n \bar{z}^{m+2}}{(m+3/2)(m+5/2)} + \frac{z^m \bar{z}^{n+2}}{(n+3/2)(n+5/2)} \right]$$

то

$$\iint f(z,\bar{z}) dz dz + \iint f(z,\bar{z}) d\bar{z} d\bar{z} = \frac{\tau_0 |z|}{l} \Phi_1(z,\bar{z})$$

где $\Phi_1(z,\ \bar{z})$ – регулярная функция в круге $|z| < l$. Аналогично

$$\iint f(z,\bar{z}) dz d\bar{z} = \frac{\tau_0 |z|}{l} \Phi_2(z,\bar{z})$$

где $\Phi_2(z,\ \ \bar{z})$ – регулярная функция в круге $|z| < l$. Поэтому на берегах трещины интегралы обращаются в нуль. В этом случае выбираем $\chi_0^{(1)}$ – решение однородного уравнения (1), доставляющее решение в первом приближении, которое удовлетворяет всем граничным условиям. Для этого подставим в левую часть соотношений (3) нулевое приближение, которое, как было показано выше, удовлетворяет граничным условиям, и получим дополнительные соотношения, которым должно удовлетворять решение однородного уравнения (1):

$$\frac{\partial^2 \chi_0^{(1)}}{\partial z \partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi_0^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi_0^{(1)}}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi_0^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \chi_0^{(1)}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{iz\tau_0}{\sqrt{z^2-l^2}}$$

С учетом этих соотношений решение однородного уравнения (1) имеет вид

$$\chi_0^{(1)} = \frac{1}{2} \iint \frac{iz\tau_0}{\sqrt{z^2-l^2}} dz dz - \frac{1}{2} \iint \frac{i\bar{z}\tau_0}{\sqrt{\bar{z}^2-l^2}} d\bar{z} d\bar{z}$$

Тем самым, в первом приближении получим

$$\sigma_{11}^{(1)} = -\frac{\alpha\delta}{6(\alpha+\alpha_1/9)} \frac{\sqrt{3}\tau_0 |z|}{\sqrt[4]{(l^2-z^2)(l^2-\bar{z}^2)}}$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = -\frac{\alpha\delta}{6(\alpha+\alpha_1/9)} \frac{\sqrt{3}\tau_0 |z|}{\sqrt[4]{(l^2-z^2)(l^2-\bar{z}^2)}} \tag{4}$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = \frac{z\tau_0}{\sqrt{z^2-l^2}} - i\iint f^0(z,\bar{z}) d\bar{z} d\bar{z} + i\iint f^0(z,\bar{z}) dz dz$$

$$\iint f^0(z,\bar{z}) d\bar{z} d\bar{z} = \left[\frac{1}{2} z^{-1/2}(l^2-z^2)^{-1/4} + \frac{1}{4} z^{1/2}(l-z)^{-5/4}(l+z)^{-1/4} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{4} z^{1/2}(l+z)^{-5/4}(l-\bar{z})^{-1/4} \right] \frac{(-\alpha\delta)}{12(\alpha+\alpha_1/9)} \int \frac{\sqrt{\bar{z}}}{\sqrt[4]{(l^2-\bar{z}^2)}} d\bar{z}$$

$$\iint f^0(z,\bar z)dzdz = \left[\frac{1}{2}\bar z^{-1/2}(l^2 - z^2)^{-1/4} + \frac{1}{4}\bar z^{1/2}(l-\bar z)^{-5/4}(l+\bar z)^{-1/4} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}\bar z^{1/2}(l+\bar z)^{-5/4}(l-\bar z)^{-1/4}\right]\frac{(-\alpha\delta)}{12(\alpha+\alpha_1/9)}\int\frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{(l^2-z^2)}}dz$$

причем, последние два интеграла можно разложить с любой степенью точности в ряд по степеням $\bar z$ и z соответственно:

$$\int\frac{\sqrt{\bar z}}{\sqrt[4]{(l^2-\bar z^2)}}\,d\bar z = \sqrt{\frac{\bar z}{l}}\left(\frac{2}{3}\bar z + \frac{1}{10}\bar z^2 + \frac{5}{112}\bar z^3 + O(\bar z^4)\right)$$

$$\int\frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{(l^2-z^2)}}\,dz = \sqrt{\frac{z}{l}}\left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{10}z^2 + \frac{5}{112}z^3 + O(z^4)\right)$$

Таким образом, задача о трещине поперечного сдвига имеет итерационное решение (1), доставляющее решение в первом приближении (4), которое удовлетворяет всем граничным условиям. При этом доказательство сходимости для обобщенного решения $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, определяемого

$$\int\limits_V \left(\frac{3}{2}a\bar\sigma_{ij}\bar\tau_{ij} + a_1\sigma_1\tau_0\right)dV = \int\limits_V \left\{\frac{3}{2}a[1-\omega(u)]\bar\sigma_{ij}\bar\tau_{ij} - a_i\sigma_i\tau_0 \times \right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\varphi^2(u)-\omega(u)}{u}\right]\right\}dV + A_{S_u}(\tau_{ij}, u_i^0), \quad \tau_{ij}\in H, \quad \tau_0\in L_m(S_{\tau_0}), \quad m > \frac{4}{3}$$

где H – полное гильбертово пространство с нормой

$$\|\sigma_{ij}\|^2 = \int\limits_V\left(\frac{3}{2}a\bar\sigma_{ij}\bar\sigma_{ij} + a_1\sigma_0^2\right)dV$$

приведено в [1]. Пользуясь оценкой [1] и зная первое и нулевое приближения итерационной схемы (1) можно получить оценку между напряжениями, вычисленными на (n) и $(n+1)$ шагах итерационного метода

$$\|\sigma_{ij}^{(n+1)} - \sigma_{ij}^{(n)}\| \leqslant \delta\|\sigma_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n-1)}\| \leqslant \ldots \leqslant \delta^n\|\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(0)}\| \tag{5}$$

где параметр δ оценен [1]. Учитывая, что нормы между соседними приближениями образуют геометрическую прогрессию и используя оценку (5) можно получить оценку между решением задачи о трещине поперечного сдвига σ_{ij}^∞, получающегося при переходе к пределу при $n\to\infty$ в итерационной схеме (1), и (n)-м шагом итерационного метода

$$\|\sigma_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^\infty\| \leqslant \frac{\delta^n}{1-\delta}\|\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(0)}\|$$

Таким образом получены оценки, дающие возможность вычислять на каждом шаге точность приближения итерационной схемы для задачи о трещине поперечного сдвига. Тем самым, эта задача полностью решена для разномодульных дилатирующих сред.

Для решения задачи о трещине продольного сдвига следует перейти к деформационной формулировке соотношений между напряжениями и деформациями. В обычном виде эта связь описывается соотношениями, рассмотренными в [2], а именно

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} a\omega(u)\overline{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\left\{a_1\sigma_0 + a\sigma_i \frac{\varphi^2(u) - \omega(u)}{u}\right\} \tag{6}$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \varphi^2(u) = -2u^2 \int \frac{\omega(u)}{u^3}\, du$$

где δ_{ij} – символ Кронеккера, a, a_1 – коэффициенты, $\overline{\sigma}_{ij}$ – девиатор напряжений, $\omega(u)$ – функция разномодульности.

Введем параметр вида деформированного состояния $\nu = \varepsilon_0/\varepsilon_i$, где $\varepsilon_0 = {}^1\!/_3\varepsilon_{ii}$ – шаровая часть тензора деформаций, ε_i – интенсивность тензора деформаций, $\overline{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0$ – девиатор деформаций, $\varepsilon_i = \sqrt{{}^2\!/_3\overline{\varepsilon}_{ij}\overline{\varepsilon}_{ij}}$.

Соответственно

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3}a^{-1}\Omega_2(\nu)\overline{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\left(\frac{\varepsilon_0}{a_1} + \frac{\varepsilon_i}{a\nu}[\psi_2^2(\nu) - \Omega_2(\nu)]\right) \tag{7}$$

$$\psi_2^2(\nu) = \left[\varphi^2[u(\nu)] - \frac{a\{\varphi^2[u(\nu)]\}'}{a_1}\left\{\nu\omega[(u(\nu)] - \{\varphi^2[u(\nu)]\}'\right\}\right]\frac{1}{\omega^2[u(\nu)]}$$

$$\varphi^2(u) = -2u^2 \int \frac{\omega(u)}{u^3}du, \quad \Omega_2(\nu) = \psi_2^2(\nu) - \frac{\nu}{2}[\psi_2^2(\nu)]'$$

Из [2] следует, что для линейного приближения существует взаимно однозначное соответствие между первыми и вторыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций: $\sigma_i = \varepsilon_i/(a\omega(u))$, $u = \sigma_0/\sigma_i$, $\sigma_0 = \varepsilon_0/a_1$, поэтому из формулы (6) можно выразить напряжения через деформации. Однозначность соответствия следует из того, что

$$\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\sigma_i} = \frac{\partial}{\partial\sigma_i}\left[a\omega\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_i}\right)\sigma_i\right] = a\left[\omega\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_i}\right) - \frac{\sigma_0}{\sigma_i}\left(\frac{\partial\omega(\sigma_0/\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right)\right] \neq 0$$

В предположении зависимости перемещений только от координат x_1, x_2, т.е. $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2), u_3 = u_3(x_1, x_2)$ получим, что условия совместности деформаций удовлетворяются автоматически, а подстановка (7) в уравнения равновесия приводит к уравнениям для перемещений, решение которых методом последовательных приближений в комплексных переменных $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$ дает

$$u_1^n = u_{10}^{(n)} - \frac{1}{2}\iiint f_1^{(n-1)}dzdzd\bar{z} - \frac{1}{2}\iiint f_2^{(n-1)}dzd\bar{z}d\bar{z}$$

$$u_2^n = u_{20}^{(n)} + \frac{i}{2}\iiint f_1^{(n-1)}dzdzd\bar{z} - \frac{i}{2}\iiint f_2^{(n-1)}dzd\bar{z}d\bar{z} \tag{8}$$

$$u_3^n = u_{30}^{(n)} - \iiint \frac{1}{2\Omega_2(\nu^{(n-1)})}\left(\frac{\partial u_3^{(n-1)}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\Omega_2^{(n-1)}}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial u_3^{(n-1)}}{\partial z}\frac{\partial\Omega_2^{(n-1)}}{\partial z}\right)dzd\bar{z}$$

где f_1 и f_2 являются частями уравнений равновесия, не содержащими тройной частной производной по комплексным переменным, а $u_{10}^n, u_{20}^{(n)}, u_{30}^{(n)}$ – соответствующие решения однородных уравнений. Для доказательства сходимости последовательных приближений (8) для односвязной области рассмотрим линейное множество N [7] функций $\beta = \{\beta_{ij}\}$, дважды непрерывно дифференцируемых в области V и $\beta_{ij}n_j = u_i^0$, n_j –

направляющие косинусы нормали к поверхности S_ν с заданными перемещениями $u_i^0 \in L_m(S_\nu)$ ($m > 4/3$), а на остальной части полной поверхности – произвольных. Очевидно, что разыскиваемое классическое решение ε_{ij} принадлежит этому множеству и существует, если поверхность тела без изломов. Определим на множестве N скалярное произведение

$$(\varepsilon_{ij},\beta_{ij}) = \int\limits_V \left(\frac{2}{3}a^{-1}\overline{\varepsilon}_{ij}\overline{\beta}_{ij} + a_1^{-1}\varepsilon_0\beta_0\right)dV$$

и дополним множество N всеми возможными предельными элементами так, чтобы для них также существовало это скалярное произведение. Тогда получим полное гильбертово пространство H обобщенно дифференцируемых функций с суммируемыми квадратами производных. Нормой элементов пространства H будет выражение

$$\| \varepsilon_{ij} \|^2 = \int\limits_V \left(\frac{2}{3}a^{-1}\overline{\varepsilon}_{ij}\overline{\varepsilon}_{ij} + a_1^{-1}\varepsilon_0^2\right)dV$$

Введем следующее определение: обобщенным решением рассматриваемой задачи назовем функцию $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\} \in H$, удовлетворяющую интегральному уравнению

$$\int\limits_V \left(\frac{2}{3}a^{-1}\overline{\varepsilon}_{ij}\overline{\beta}_{ij} + a_1^{-1}\varepsilon_0\beta_0\right)dV = \int\limits_V \left\{\frac{2}{3}a^{-1}(1-\Omega_2(\nu))\overline{\varepsilon}_{ij}\overline{\beta}_{ij} -\right.$$

$$\left. -a^{-1}\varepsilon_i\left[\frac{\psi_2^2(\nu)-\Omega_2(\nu)}{\nu}\right]\beta_0\right\} dV + A_{S_\nu}(\beta_{ij},u_i^0)$$

$$\overline{\beta}_{ij} = \beta_{ij} - \delta_{ij}\beta_0 \quad \beta_0 = (1/3)(\beta_{11}+\beta_{22}+\beta_{33})$$

где $A_{S_\nu}(\beta_{ij},u_i^0)$ – работа внутренних упругих сил на заданных перемещениях u_i^0 на части поверхности тела S_ν, $\beta = \{\beta_{ij}\} \in H$ – любая функция.

Отметим, что обобщенное решение будет всегда классическим, если оно дважды непрерывно дифференцируемо в V.

Докажем, что в пространстве H существует обобщенное решение уравнений (7) при условиях $\varepsilon_{ij}n_j = u_i^0$. Применим для нахождения функции $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ итерационный процесс

$$(\varepsilon_{ij}^{(n+1)},\beta_{ij}) = \int\limits_V \left(\frac{2}{3}a^{-1}\overline{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)}\overline{\beta}_{ij} + a_1^{-1}\varepsilon_0^{(n+1)}\beta_0\right)dV =$$

$$= \int\limits_V \left\{\frac{2}{3}a^{-1}[1-\Omega_2(\nu^{(n)})]\overline{\varepsilon}_{ij}^{(n)}\overline{\beta}_{ij} -\right.$$

$$\left. -a^{-1}\varepsilon_i^{(n)}\beta_0\left[\frac{\psi_2^2(\nu^{(n)})-\Omega_2(\nu^{(n)})}{\nu^{(n)}}\right]\right\}dV + A_{S_\nu}(\beta_{ij},u_i^0)$$

Для изучения сходимости этого процесса оценим квадрат нормы разности между ($n+1$) и n приближениями

$$\| \varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)} \|^2 = \int\limits_V \left\{\frac{2}{3}a^{-1}[\overline{\varepsilon}_{ij}^{(n)} - \Omega_2(\nu^n)\overline{\varepsilon}_{ij}^{(n)} - \overline{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} +\right.$$

$$+ \Omega_2(\nu^{n-1})\overline{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)}](\overline{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)} - \overline{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) - a^{-1}\left[\varepsilon_i^{(n)}\frac{\psi_2^2(\nu^{(n)})-\Omega_2(\nu^{(n)})}{\nu^{(n)}} -\right.$$

$$- \varepsilon_i^{(n-1)} \frac{\psi_2^2(\nu^{(n-1)}) - \Omega_2(\nu^{(n-1)})}{\nu^{(n-1)}}\Bigg](\varepsilon_0^{(n+1)} - \varepsilon_0^{(n)})\Bigg\}dV =$$

$$= \int\limits_V \Bigg\{\frac{2}{3}a^{-1}(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)})(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) + \frac{2}{3}a^{-1}\Big[\Omega_2(\nu^{(n-1)}\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} -$$

$$- \Omega_2(\nu^{(n)})\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}\Big](\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) - a^{-1}\Bigg[\varepsilon_i^{(n)} \frac{\psi_2^2(\nu^{(n)}) - \Omega_2(\nu^{(n)})}{\nu^{(n)}} -$$

$$- \varepsilon_i^{(n-1)} \frac{\psi_2^2(\nu^{(n-1)}) - \Omega_2(\nu^{(n-1)})}{\nu^{(n-1)}}\Bigg] \varepsilon_0^{(n+1)} - \varepsilon_0^{(n)}\Bigg\}dV$$

Для получения параметра сходимости итерационного процесса по аналогии с [1] достаточно рассмотреть линейное приближение функции $\Omega_2(\nu) = 1 + \gamma\nu$ в связи с тем, что исходные соотношения (6) записаны в линейном приближении. Используя этот факт для оценки квадрата нормы разности двух приближений получим

$$\| \varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)} \|^2 = \frac{2}{3}a^{-1}\gamma\int\limits_V \Big\{(\nu^{n-1}\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} - \nu^n\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)})(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) -$$

$$- \frac{3}{2}(\varepsilon_i^{(n)} - \varepsilon_i^{(n-1)})(\varepsilon_0^{(n+1)} - \varepsilon_0^{(n)})\Big\}dV = \tag{9}$$

$$= -\frac{2}{3}a^{-1}\gamma\int\limits_V \Big\{(\nu^{(n)}\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} - \nu^{(n-1)}\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)})(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) +$$

$$+ \frac{3}{2}(\varepsilon_i^{(n)} - \varepsilon_i^{(n-1)})(\varepsilon_0^{(n+1)} - \varepsilon_0^{(n)})\Big\}dV$$

Применяя теорему о среднем для функции $\nu\bar{\varepsilon}_{ij}$, получим

$$\nu^{(n)}\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} - \nu^{(n-1)}\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)} = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^*}{\varepsilon_i^*}\delta_{kl} - \frac{9}{2}\nu^*\delta_{ik}\delta_{jl}\right) +\right.$$

$$\left.+ \nu^*\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\right][\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)} - \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n-1)} + \delta_{kl}(\varepsilon_0^{(n)} - \varepsilon_0^{(n-1)})] = \tag{10}$$

$$= -\frac{\nu^*}{2}(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)}) + \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^*}{\bar{\varepsilon}_i^*}(\varepsilon_0^{(n)} - \varepsilon_0^{(n-1)}) - \frac{3}{2}\nu^*\delta_{ij}(\varepsilon_0^{(n)} - \varepsilon_0^{(n-1)})$$

где $\bar{\varepsilon}_{ij}^* \in [\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)}]$, в предположении что ($n$)-ое приближение меньше, чем (n–1)-е. Если это не так, то концы отрезка меняем местами.

Подставив (10) в (9), будем иметь

$$\| \varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)} \|^2 = -\frac{2}{3}a^{-1}\gamma\int\limits_V \Big\{-\frac{\nu^*}{2}(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)})(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) +$$

$$+ \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^*}{\varepsilon_i^*}(\bar{\varepsilon}_0^{(n)} - \bar{\varepsilon}_0^{(n-1)})(\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) +$$

$$+ \frac{3}{2}(\bar{\varepsilon}_i^{(n)} - \bar{\varepsilon}_i^{(n-1)})(\bar{\varepsilon}_0^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_0^{(n)})\Big\}dV =$$

$$
= \frac{2}{3} a^{-1}\gamma \int\limits_V \left\{ \frac{\nu^*}{2} (\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n-1)}) (\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) - \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^*}{\varepsilon_i^*} (\bar{\varepsilon}_0^{(n)} - \bar{\varepsilon}_0^{(n-1)}) \times \right.
$$

$$
\left. \times (\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) - \frac{3}{2} (\bar{\varepsilon}_i^{(n)} - \bar{\varepsilon}_i^{(n-1)}) (\bar{\varepsilon}_0^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_0^{(n)}) \right\} dV \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{2}{3} a^{-1}\gamma \int\limits_V \left\{ \frac{|\nu^*|}{3} \varepsilon_i (\varepsilon_{ij}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^{(n-1)}) \varepsilon_i (\varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)}) + \right.
$$

$$
+ \sqrt{\frac{2}{3}} \, | \varepsilon_0 (\varepsilon_{ij}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^{(n-1)}) | \, \varepsilon_i (\varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)}) + \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_i (\varepsilon_{ij}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^{(n-1)}) \times
$$

$$
\left. \times | \varepsilon_0 (\varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)}) | \right\} dV = \frac{2}{3} a^{-1}\gamma \int\limits_V \varepsilon_i (\varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)}) \varepsilon_i (\varepsilon_{ij}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^{(n-1)}) \times
$$

$$
\times \left[\frac{|\nu^*|}{3} + \frac{|\nu(\varepsilon_{ij}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^{(n-1)})|}{\varepsilon_{ij}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^{(n-1)}} \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{|\nu(\varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)})|}{\varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)}} \right] dV \leqslant
$$

$$
\leqslant \zeta\gamma \, \| \varepsilon_{ij}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^{(n-1)} \| \, \| \varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)} \|
$$

$$
\zeta = \max[\tfrac{1}{3} |\nu^*| + \sqrt{2/3} \, |\nu| + \sqrt{3/2} \, |\nu|]
$$

Сопоставив начало и конец этой оценки можно избавиться от квадрата нормы получив неравенство

$$
\| (\varepsilon_{ij}^{(n+1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)}) \| \leqslant \zeta\gamma \, \| \varepsilon_{ij}^{(n)} - \varepsilon_{ij}^{(n-1)} \| \tag{11}
$$

которое, в связи с полнотой пространства решений H, будет доказывать сходимость итерационного процесса (6), если параметр γ выбрать таким, чтобы коэффициент $\zeta\gamma < 1$. Оценим ζ через $|u| = |\sigma_0/\sigma_i| < 2/3$ (учитывая соотношения (6), (7)):

$$
\nu = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_i} = \frac{1}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \frac{a_1\sigma_0 + a\sigma_i(\varphi^2(u) - \omega(u))/u}{3a\omega(u)\sigma_i} \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{2}{9} \frac{a_1}{a} \Omega_2(\nu) + \frac{\varphi_2(u) - \omega(u)}{3u\omega(u)}
$$

Теперь воспользуемся линеаризацией функций $\Omega_2(\nu)$ и $\omega(u)$ для получения оценки параметра γ из условия сходимости итерационного процесса

$$
\frac{2}{9} \frac{a_1}{a} \Omega_2(\nu) + \frac{\varphi_2(u) - \omega(u)}{3u\omega(u)} < \frac{2}{9} \frac{a_1}{a} \Omega_2(\nu) + \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \frac{a_1}{a} (1 + \nu\gamma) + \frac{1}{3}
$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$
|\nu| \leqslant \frac{1/3 + \tfrac{2}{9}(a_1/a)}{|1 - \tfrac{2}{9}(a_1/a)\gamma|}
$$

что позволяет вычислить ранее определенный параметр

$$
\zeta = 0.421 \frac{1/3 + \tfrac{2}{9}(a_1/a)}{|1 - \tfrac{2}{9}(a_1/a)\gamma|}
$$

Из условия сходимости (11) итерационного процесса и последнего равенства получим оценку для коэффициента γ, а именно

$$
\gamma < \frac{0.421 \, |1 - \tfrac{2}{9}(a_1/a)\gamma|}{(1/3 + \tfrac{2}{9}(a_1/a))}
$$

которую с учетом a_1, a, полученных из экспериментальных данных и занесенных в таблицу в [1] можно вычислить $\gamma < 0.503$.

Итак, найдено первое приближение для задачи о трещине поперечного сдвига, удовлетворяющее граничным условиям, доказано существование решения задачи о трещине продольного сдвига, которое получается при использовании итерационного метода, что позволяет получать распределения деформаций и напряжений в телах с трещинами, учитывая эффекты разномодульности. Кроме того, оценен параметр сходимости этого метода показывающий, что четырех итераций достаточно для достижения точности вычислений порядка 1%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березин А.В.* Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел. М.: Наука, 1990. 135 с.
2. *Березин А.В.* Механика разрушения дилатирующих разномодульных сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1997. № 1. С. 59–70.
3. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
5. Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие. В 4 т. / Под ред. В.В. Панасюка, Киев: Наукова думка, 1988. т. 1. 487 с.; т. 2. 619 с.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Быков Д.Л.* О некоторых соотношениях между инвариантами напряжений и деформаций в физически нелинейных средах // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1971. Вып. 2. С. 114–128.

Москва

Поступила в редакцию
24.05.2000