МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2002

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. В.Л. ЛЕОНТЬЕВ

# ВАРИАЦИОННО-СЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ, СВЯЗАННЫЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается применение ортогональных финитных функций в смешанном вариационно-сеточном методе механики упругих деформируемых твердых тел, который обладает всеми достоинствами смешанных методов, но отличается от них уменьшенным за счет ортогональности базисных функций числом узловых неизвестных. Сравнение с методом Ритца, в котором используются функции Куранта, показывает его более высокие вычислительные характеристики: расщепление глобальной системы сеточных уравнений на подсистемы и улучшение ее обусловленности. Метод позволяет находить приближенные собственные частоты с недостатком и в сочетании с методом Ритца дает двусторонние оценки собственных частот.

**Введение.** В статье [1] предложены ортогональные финитные функции, которые формируются с помощью двух производящих функций, и доказано, что использованная там методика не позволяет создавать системы ортогональных финитных функций, обладающих симметрией. Сложность структуры и несимметричность этих функций затрудняет их применение. В [2] разработан способ формирования систем ортогональных финитных функций с помощью одной производящей функции, имеющих более простую чем у функций типа [1], структуру. В [3] выполнены исследования нескольких таких систем ортогональных финитных функций первой степени, а в [4] предложен алгоритм генерации ортогональных симметричных финитных функций различных степеней. Одна из областей их применения – смешанные вариационно-сеточные методы [5, 6]. Ортогональность функций позволяет исключить часть узловых неизвестных до начала решения системы уравнений, тем самым устраняется основной недостаток смешанных методов – большее по сравнению с вариационно-сеточными методами [5], связанными с условием минимума потенциальной энергии, число узловых неизвестных. Вместе с тем в отличие от последних методов смешанные методы позволяют находить приближенные решения для производных основной неизвестной функции без операции численного дифференцирования, поскольку производные аппроксимируются независимо от самих функций, вследствие чего приближенное решение для производных избавляется от разрывов. В теории упругости это означает независимую аппроксимацию перемещений и напряжений при построении приближенных решений и приводит к повышению их гладкости.

Здесь рассматривается вариант смешанного вариационно-сеточного метода решения задач о собственных колебаниях трехмерных тел, связанный с вариационным принципом Рейсснера, позволяющим использовать ортогональные кусочно-линейные функции. Вследствие их ортогональности матрица Грама, в отличие от аналогичной матрицы метода, использующего классические $B$-сплайны первой степени, становится диагональной, что приводит, как показывают полученные оценки чисел обусловленности, к улучшению обусловленности систем сеточных уравнений. Получены оценки точности приближенных собственных частот, подтверждающие эффективность предлагаемого метода, который в сочетании с методом Ритца дает двусторонние оценки собственных значений. Отмечается, что системы сеточных уравнений распадаются на несколько подсистем, что приводит к уменьшению числа арифметических операций, затрачиваемых на полное решение, и к уменьшению объема требуемой памяти компьютера. Результаты, полученные здесь для задач о собственных колебаниях, позволяют использовать предлагаемый вариационно-сеточный метод для решения задач статики и задач о вынужденных колебаниях упругих трехмерных тел тогда, когда частота колебаний не совпадает ни с одной из собственных частот. В этом случае матрица системы сеточных уравнений будет невырожденной, несмотря на то, что применяется единообразная аппроксимации кинематических и силовых факторов.

**1. Постановки задач. Вариационные принципы.** *1.1. Задача математической физики.* От краевой задачи на собственные значения в классической

$$-\Delta u(x,y)=\omega u(x,y) \quad (\Omega\subset \mathbf{R}^2), \quad u\big|_{\partial\Omega}=0 \tag{1.1}$$

и в смешанной

$$-(\partial u_1/\partial x+\partial u_2/\partial y)=\omega u, \quad \partial u/\partial x=u_1, \quad \partial u/\partial y=u_2 \quad (\Omega); \quad u\big|_{\partial\Omega}=0 \tag{1.2}$$

постановках можно перейти к равносильным вариационным формулировкам:

$$\hat{\delta}L(u)=\hat{\delta}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[(\partial u/\partial x)^2+(\partial u/\partial y)^2-\omega u^2]d\Omega=-\int\limits_{\Omega}(\Delta u+\omega u)\hat{\delta}u d\Omega=0 \tag{1.3}$$

с главным краевым условием и

$$\hat{\delta}R(u,u_1,u_2)=\hat{\delta}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[(\partial u_1/\partial x+\partial u_2/\partial y+\omega u)u-(\partial u/\partial x-u_1)u_1-(\partial u/\partial y-u_2)u_2]d\Omega+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}[u(u_1 n_x+u_2 n_y)]d\Gamma\right\}=0 \tag{1.4}$$

с естественным краевым условием. Здесь $\hat{\delta}$ – вариация, $n_x$, $n_y$ – компоненты вектора внешней нормали к границе $\partial\Omega$ двумерной области $\Omega$, $d\Gamma$ – элемент границы.

*1.2. Задачи трехмерной теории упругости.* Условие стационарности функционала Рейсснера [6]:

$$\begin{aligned}R(u,v,w,\sigma_{ij})&=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\{[\partial\sigma_{11}/\partial x+\partial\sigma_{12}/\partial y+\partial\sigma_{13}/\partial z+\omega^2\rho u]u+[\partial\sigma_{12}/\partial x+\partial\sigma_{22}/\partial y+\\&+\partial\sigma_{23}/\partial z+\omega^2\rho v]v+[\partial\sigma_{13}/\partial x+\partial\sigma_{23}/\partial y+\partial\sigma_{33}/\partial z+\omega^2\rho w]w-\sigma_{11}[\partial u/\partial x-\\&-(\sigma_{11}-v(\sigma_{22}+\sigma_{33}))/E]-\sigma_{22}[\partial v/\partial y-(\sigma_{22}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{33}))/E]-\sigma_{33}[\partial w/\partial z-\\&-(\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}))/E]-\sigma_{12}[\partial u/\partial y+\partial v/\partial x-\sigma_{12}/(2G)]-\sigma_{13}[\partial u/\partial z+\\&+\partial w/\partial x-\sigma_{13}/(2G)]-\sigma_{23}[\partial v/\partial z+\partial w/\partial y-\sigma_{23}/(2G)]\}d\Omega+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_1}(u\sigma_{1j}n_j+\\&+v\sigma_{2j}n_j+w\sigma_{3j}n_j)d\Gamma-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_2}(u\sigma_{1j}n_j+v\sigma_{2j}n_j+w\sigma_{3j}n_j)d\Gamma\end{aligned} \tag{1.5}$$

в силу независимости и произвольности вариаций компонент $u$, $v$, $w$ вектора перемещений и компонент $\sigma_{ij}$ тензора напряжений равносильно краевым условиям: $u=v=$

$= w = 0$ на $\partial\Omega_1$ и $\sigma_{kj}n_j = 0$ ($k$ = 1, 2, 3) на $\partial\Omega_2$ ($\partial\Omega_1 + \partial\Omega_2 = \partial\Omega$ – граница области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$), а также уравнениям свободных гармонических колебаний с частотой $\omega$ и соотношениям упругости, невязки которых находятся в квадратных скобках под знаком интеграла функционала. Здесь $E$ – модуль упругости изотропного линейно-упругого тела, $G$ – модуль сдвига, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $\rho$ – плотность, $n_k$ – компоненты вектора внешней нормали к $\partial\Omega$.

Условие стационарности функционала Лагранжа

$$L(u,v,w) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \{(\lambda+2\mu)[(\partial u/\partial x)^2 + (\partial v/\partial y)^2 + (\partial w/\partial z)^2] + 2\lambda[\partial u/\partial x \partial v/\partial y + \tag{1.6}$$

$$+\partial u/\partial x \partial w/\partial z + \partial v/\partial y \partial w/\partial z] + \mu[((\partial u/\partial y) + (\partial v/\partial x))^2 + ((\partial u/\partial z) + (\partial w/\partial x))^2 +$$

$$+((\partial v/\partial z) + ((\partial w/\partial y))^2] - \omega^2\rho(u^2 + v^2 + w^2)\}d\Omega - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_1} (u\sigma_{1j}n_j + v\sigma_{2j}n_j + w\sigma_{3j}n_j)d\Gamma$$

равносильно уравнениям собственных гармонических колебаний упругого тела, в которых напряжения выражаются через $u$, $v$, $w$ и исключаются с помощью соотношений упругости. Краевые условия для перемещений являются главными, для напряжений – естественными. Здесь $\lambda$, $\mu$ – коэффициенты Ляме, характеризующие свойства упругости изотропного тела.

**2. Ортогональные финитные функции. Вариационно-сеточный метод.** Для построения приближенных решений в вариационно-сеточном методе используются базисы гильбертова пространства $\mathbf{L}_2$ квадратично суммируемых функций, состоящие из непрерывных кусочно-линейных финитных функций [3]:

$$\Phi_i^{(1)}(\alpha,\beta,x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h, x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + h_1] \cup [x_{i-1} + h_2, x_1] \\ -\alpha + 2(\alpha h + h_1)(x_{i-1} + \omega_N - x)/(h(h_2 - h_1)), x \in [x_{i-1} + h_1, x_{i-1} + \omega_N] \\ -\alpha + 2(\alpha h + h_2)(-x_{i-1} - \omega_N + x)/(h(h_2 - h_1)), x \in [x_{i-1} + \omega_N, x_{i-1} + h_2] \\ (x_{i+1} - x)/h, x \in [x_i, x_i + h_1] \cup [x_i + h_2, x_{i+1}] \\ \beta + 2(h\beta + h_1 - h)(-x_i - \omega_N + x)/(h(h_2 - h_1)), x \in [x_i + h_1, x_i + \omega_N] \\ \beta + 2(h\beta + h_2 - h)(x_i + \omega_N - x)/(h(h_2 - h_1)), x \in [x_i + \omega_N, x_i + h_2] \\ 0, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{2.1}$$

или [4]:

$$\Phi_i^{(2)}(\alpha,\vartheta,x) = \begin{cases} \alpha(x_{i-1} - x)(h\vartheta), x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + h\vartheta] \\ (2\alpha+1)(x_{i-1} + x_i - 2x)/(2h(2\vartheta - 1)) + 1/2, x \in [x_{i-1} + h\vartheta, x_i - h\vartheta] \\ \alpha(x_i - x)/(h\vartheta) + 1, x \in [x_i - h\vartheta, x_i] \\ \alpha(x - x_i)/(h\vartheta) + 1, x \in [x_i, x_i + h\vartheta] \\ (2\alpha+1)(2x - x_{i+1} - x_i)/(2h(2\vartheta - 1)) + 1/2, x \in [x_i + h\vartheta, x_{i+1} - h\vartheta] \\ \alpha(x - x_{i+1})/(h\vartheta), x \in [x_{i+1} - h\vartheta, x_{i+1}] \\ 0, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{2.2}$$

являющихся при выполнении условий [3, 4], приводимых ниже, ортогональными на сетке $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Здесь $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < \vartheta < 1/2$, $\omega_N = (h_1 + h_2)/2$, $0 \leqslant h_1 \leqslant h_2 \leqslant h$, $h_1 + h_2 = h = x_i - x_{i-1}$, $\alpha = \beta - 1$.

Приближенное решение задачи математической физики разыскивается в виде

$$u^*(x,y) = \sum_{(j,k)\in\Omega} u_{jk}\psi_{jk}(x,y), \quad u_n^*(x,y) = \sum_{(j,k)\in\Omega} u_{jk}^{(n)}\psi_{jk}(x,y) \quad (n = 1,2) \tag{2.3}$$

где $\psi_{jk}(x, y)$ – тензорные произведения функций $\psi_j(x)$ и $\psi_k(y)$, имеющих вид $\psi_j(x) = \Phi_j^{(1)}(\alpha,\beta,x)$ или $\psi_j(x) = \Phi_j^{(2)}(\alpha,\vartheta,x)$. Неизвестные постоянные коэффициенты $u_{jk}$, $u_{jk}^{(n)}$ находятся из систем алгебраических уравнений, порождаемых условиями стационарности (1.3), (1.4), которые используются в полуслабой форме, содержащей производные только первого порядка. Приближенные решения $u$, $v$, $w$, $\sigma_{ij}$ задач теории упругости разыскиваются в виде аналогичных линейных комбинаций функций $\psi_{jkp}(x, y, z)$ – тензорных произведений функций $\psi_j(x)$, $\psi_k(y)$, $\psi_p(z)$, неизвестные коэффициенты которых $u_{jkp}$, $v_{jkp}$, $w_{jkp}$, $\sigma_{jkp}^{nm}$ определяются из условий стационарности функционалов (1.5), (1.6).

**3. Применение метода в краевых задачах.** *3.1. Задача математической физики.* Эта задача рассматривается для иллюстрации метода. В том случае, когда в условие стационарности функционала Лагранжа (1.3) подставляются линейные комбинации, содержащие тензорные произведения кусочно-линейных финитных функций Куранта (*B*-сплайнов первой степени), обобщением которых являются функции (2.1), (2.2), сеточные уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned}&\delta(u_{j,k-1}+4u_{j,k}+u_{j,k+1}-u_{j-1,k-1}-2u_{j-1,k}-u_{j-1,jk+1}-u_{j+1,k-1}-2u_{j+1,k}-u_{j+1,k+1})/(3h)+\\&+h(u_{j-1,k}+4u_{j,k}+u_{j+1,k}-u_{j-1,k-1}-2u_{j,k-1}-u_{j+1,k-1}-u_{j-1,k+1}-2u_{j,k+1}-u_{j+1,k+1})/(3\delta)=\\&=\omega_{h,\delta}h\delta(u_{j-1,k-1}+4u_{j-1,k}+u_{j-1,k+1}+4u_{j,k-1}+16u_{j,k}+4u_{j,k+1}+u_{j+1,k-1}+4u_{j+1,k}+\\&+u_{j+1,k+1})/36\quad (j,k\in\Omega)\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $h$, $\delta$ – шаги равномерной сетки соответственно по $x$ и $y$. Теплицева структура матрицы системы (3.1) позволяет, разыскивая собственные функции в виде $u_{j,k} = u_0\exp[\mathbf{i}(j\theta + k\varphi)]$ ($\mathbf{i}$ – мнимая единица; $\theta$, $\varphi$ – параметры; $u_0$ – амплитудное значение), получить в случае квадратной сетки, для которой $h = \delta$, выражение для собственных значений

$$\begin{aligned}&\omega_{h,\delta}=12[4-\cos(\theta+\varphi)-\cos(\theta-\varphi)-\cos\theta-\cos\varphi]/\{h^2[8+\cos(\theta+\varphi)+\\&+\cos(\theta-\varphi)+4\cos\theta+4\cos\varphi]\}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Параметры в силу краевого условия (1.1) на границе области $\partial\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$ принимают значения $\theta = nh$, $\varphi = m\delta = mh$ ($n, m = 1, 2, \ldots$) и поэтому из (3.2) следуют оценки

$$\omega_{h,\delta}^{n,m}=n^2+m^2+(n^4+m^4)h^2/12+O((n^6+m^6)h^4)\tag{3.3}$$

позволяющие заключить, что $\omega_{1,1}^{h,\delta} > 2$. Выражение (3.2) показывает, что $\omega_{\max}^{h,\delta} \leqslant 24/h^2$, и поэтому спектр собственных частот системы сеточных уравнений (3.1) оценивается неравенством $\chi = \omega_{\max}/\omega_{\min} \leqslant 12/h^2$.

Применим линейные комбинации (2.3) с тензорными произведениями ортогональных финитных функций вида (2.1) со значениями параметров: $\alpha = (\sqrt{2} - 1)/2$, $\beta = (\sqrt{2} + 1)/2$, $h_1 = 0$, $h_2 = h$, взятыми для определенности. Для этих значений выполняются условия $\alpha = \beta - 1$, $h_1 + h_2 = h$, обеспечивающие то, что последовательность наборов сеточных функций (2.1) образует базис в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$, а также выполняется условие $4\alpha\beta + \alpha - \beta = 0$ ортогональности функций. Подстановка (2.3) в условие стационарности функционала Рейсснера (1.4), взятое в полуслабой форме, порождает систему сеточных уравнений

$$(u_{j+1,k}^{(1)}-u_{j-1,k}^{(1)})/(2h)+(u_{j,k+1}^{(2)}-u_{j,k-1}^{(2)})/(2\delta)+\omega_{h,\delta}u_{j,k}=0$$

$$u_{j,k}^{(1)}=(u_{j+1,k}-u_{j-1,k})/(2h),\quad u_{j,k}^{(2)}=(u_{j,k+1}-u_{j,k-1})/(2\delta)$$

принимающую после исключения неизвестных узловых значений частных производных вид

$$(u_{j+2,k} - 2u_{j,k} + u_{j-2,k})/(2h)^2 + (u_{j,k+2} - 2u_{j,k} + u_{j,k-2})/(2\delta)^2 + \omega_{h,\delta} u_{j,k} = 0 \tag{3.4}$$

и дает формулу

$$\omega_{h,\delta} = [2 - \cos(2\theta) - \cos(2\varphi)]/(2h^2) \tag{3.5}$$

для собственных значений, приводящую с учетом краевых условий к выражениям для приближенных собственных значений

$$\omega_{h,\delta}^{n,m} = n^2 + m^2 - (n^4 + m^4)h^2/3 + O((n^6 + m^6)h^4) \tag{3.6}$$

Собственные функции задачи (3.4) совпадают в узлах со значениями [7] собственных функций задачи (1.1), (1.2). Формулы (3.3) и (3.6) дают оценки точных собственных значений [7] $\omega_{n,m} = n^2 + m^2$ соответственно с избытком и с недостатком. Из выражения (3.5) следует верхняя оценка $\omega_{\max}^{h,\delta} \leqslant 2/h^2$ приближенных собственных значений системы сеточных уравнений этого смешанного метода вне зависимости от вида краевых условий. Формула (3.6) в случае $n = m = 1$ и при условии, что число шагов сетки по каждой координате превосходит десять, позволяет заключить, что $\omega_{\min}^{h,\delta} > 1.93$. Следовательно, число обусловленности системы сеточных уравнений (3.4) оценивается неравенством $\chi = \omega_{\max}/\omega_{\min} \leqslant 2/(1.93h^2)$, характеризующим ее вычислительные свойства. Таким образом, применение ортогональных финитных функций (2.1) порождает хорошо обусловленные системы сеточных уравнений, распадающиеся на четыре подсистемы, что приводит к уменьшению числа арифметических операций, необходимых для решения системы (3.4), по сравнению с числом операций, затрачиваемых на решение системы сеточных уравнений (3.1), почти в четыре раза, поскольку ширина ленты каждой из подсистем примерно в два раза меньше ширины лент систем уравнений (3.1), (3.4). Объем требуемой оперативной памяти уменьшается в два раза. Возможность исключения более чем половины узловых неизвестных за счет ортогональности базисных функций до начала решения системы уравнений уравнивает данный метод по трудоемкости численного решения с вариационно-сеточными методами, связанными с условием стационарности функционала Лагранжа, а отмеченная выше особенность структуры системы сеточных уравнений дополнительно и значительно снижает эту трудоемкость. При этом, в отличие от методов, основанных на вариационном принципе Лагранжа, предлагаемый метод позволяет находить приближенные решения для производных основной неизвестной функции непосредственно и без использования операции численного дифференцирования, поскольку эти производные аппроксимируются независимо. Аналогичные выводы справедливы и для метода, использующего функции вида (2.2).

*3.2. Задача о свободных колебаниях трехмерного упругого тела.* Из условия стационарности функционала (1.5) после подстановки в него линейных комбинаций вида (2.3) следует система уравнений

$$[(\sigma_{j+1,k,p}^{11} - \sigma_{j-1,k,p}^{11})/h + (\sigma_{j,k+1,p}^{12} - \sigma_{j,k-1,p}^{12})/\delta + (\sigma_{j,k,p+1}^{13} - \sigma_{j,k,p-1}^{13})/\Delta] +$$

$$+ 2\rho\omega_{h,\delta,\Delta}^2 u_{j,k,p} = 0,$$

$$[(\sigma_{j+1,k,p}^{12} - \sigma_{j-1,k,p}^{12})/h + (\sigma_{j,k+1,p}^{22} - \sigma_{j,k-1,p}^{22})/\delta + (\sigma_{j,k,p+1}^{23} - \sigma_{j,k,p-1}^{23})/\Delta] +$$

$$+ 2\rho\omega_{h,\delta,\Delta}^2 \upsilon_{j,k,p} = 0$$

$$[(\sigma_{j+1,k,p}^{13} - \sigma_{j-1,k,p}^{13})/h + (\sigma_{j,k+1,p}^{23} - \sigma_{j,k-1,p}^{23})/\delta + (\sigma_{j,k,p+1}^{33} - \sigma_{j,k,p-1}^{33})/\Delta] +$$

$$+ 2\rho\omega_{h,\delta,\Delta}^2 w_{j,k,p} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&(u_{j+1,k,p} - u_{j-1,k,p})/(2h) = [\sigma^{11}_{j,k,p} - \nu(\sigma^{22}_{j,k,p} + \sigma^{33}_{j,k,p})]\\
&(\upsilon_{j,k+1,p} - \upsilon_{j,k-1,p})/(2\delta) = [\sigma^{22}_{j,k,p} - \nu(\sigma^{11}_{j,k,p} + \sigma^{33}_{j,k,p})]\\
&(w_{j,k,p+1} - w_{j,k,p-1})/(2\Delta) = [\sigma^{33}_{j,k,p} - \nu(\sigma^{11}_{j,k,p} + \sigma^{22}_{j,k,p})]\\
&(u_{j,k+1,p} - u_{j,k-1,p})/\delta + (\upsilon_{j+1,k,p} - \upsilon_{j-1,k,p})/h = \sigma^{12}_{j,k,p}/G\\
&(u_{j,k,p+1} - u_{j,k,p-1})/\Delta + (w_{j+1,k,p} - w_{j-1,k,p})/h = \sigma^{13}_{j,k,p}/G\\
&(\upsilon_{j,k,p+1} - \upsilon_{j,k,p-1})/\Delta + (w_{j,k+1,p} - w_{j,k-1,p})/\delta = \sigma^{23}_{j,k,p}/G
\end{aligned}
$$

для узловых значений неизвестных функций, которая после исключения $\sigma^{mn}_{j,k,p}$, возможного благодаря ортогональности базисных функций, принимает вид

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)(u_{j+2,k,p} - 2u_{j,k,p} + u_{j-2,k,p})/h^2 + \mu[(u_{j,k+2,p} - 2u_{j,k,p} + u_{j,k-2,p})/\delta^2 + (u_{j,k,p+2} -\\
&-2u_{j,k,p} + u_{j,k,p-2})/\Delta^2] + (\lambda+\mu)[(\upsilon_{j+1,k+1,p} + \upsilon_{j-1,k-1,p} - \upsilon_{j+1,k-1,p} - \upsilon_{j-1,k+1,p})/(h\delta) +\\
&+(w_{j+1,k,p+1} + w_{j-1,k,p-1} - w_{j+1,k,p-1} - w_{j-1,k,p+1})/(h\Delta)] + 4\omega^2\rho u_{j,k,p} = 0\\
&(\lambda+2\mu)(\upsilon_{j,k+2,p} - 2\upsilon_{j,k,p} + \upsilon_{j,k-2,p})/h^2 + \mu[(\upsilon_{j+2,k,p} - 2\upsilon_{j,k,p} + \upsilon_{j-2,k,p})/h^2 + (\upsilon_{j,k,p+2} -\\
&-2\upsilon_{j,k,p} + \upsilon_{j,k,p-2})/\Delta^2] + (\lambda+\mu)[(u_{j+1,k+1,p} + u_{j-1,k-1,p} - u_{j+1,k-1,p} - u_{j-1,k+1,p})/(h\delta) +\\
&+(w_{j,k+1,p+1} + w_{j,k-1,p-1} - w_{j,k+1,p-1} - w_{j,k-1,p+1})/(\delta\Delta)] + 4\omega^2\rho\upsilon_{j,k,p} = 0\\
&(\lambda+2\mu)(w_{j,k,p+2} - 2w_{j,k,p} + w_{j,k,p-2})/\Delta^2 + \mu[(w_{j+2,k,p} - 2w_{j,k,p} + w_{j-2,k,p})/h^2 +\\
&+(w_{j,k+2,p} - 2w_{j,k,p} + w_{j,k-2,p})/\delta^2] + (\lambda+\mu)[(u_{j+1,k,p+1} + u_{j-1,k,p-1} - u_{j+1,k,p-1} -\\
&-u_{j-1,k,p+1})/(h\Delta) + (\upsilon_{j,k+1,p+1} + \upsilon_{j,k-1,p-1} - \upsilon_{j,k+1,p-1} - \upsilon_{j,k-1,p+1})/(\delta\Delta)] + 4\omega^2\rho w_{j,k,p} = 0
\end{aligned}
$$

Система состоит из двух подсистем, которые могут быть связаны только за счет силовых граничных условий. Эта особенность снижает число арифметических операций, необходимых для решения системы сеточных уравнений, и объем требуемой оперативной памяти компьютера. Здесь $h$, $\delta$, $\Delta$ – шаги равномерной сетки соответственно по $x$, $y$, $z$. Учитывая теплицеву структуру матрицы этой системы и разыскивая собственные формы в виде

$$
\begin{aligned}
&u_{jkp} = u_0 \exp\{\mathbf{i}(j\theta + k\varphi + p\psi)\}, \quad \upsilon_{jkp} = \upsilon_0 \exp\{\mathbf{i}(j\theta + k\varphi + p\psi)\}\\
&w_{jkp} = w_0 \exp\{\mathbf{i}(j\theta + k\varphi + p\psi)\}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

после их подстановки в нее получаем однородную систему уравнений для неизвестного вектора ($w_0$, $u_0$, $\upsilon_0$):

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)u_0(\cos 2\theta - 1)/h^2 + \mu[(\cos 2\varphi - 1)/\delta^2 + (\cos 2\psi - 1)/\Delta^2]u_0 +\\
&+(\lambda+\mu)[\upsilon_0(\cos(\theta+\varphi) - \cos(\theta-\varphi))/(h\delta) + w_0(\cos(\theta+\psi) - \cos(\theta-\psi))/(h\Delta)] +\\
&+2\omega^2\rho u_0 = 0\\
&(\lambda+2\mu)\upsilon_0(\cos 2\varphi - 1)/\delta^2 + \mu[(\cos 2\theta - 1)/h^2 + (\cos 2\psi - 1)/\Delta^2]\upsilon_0 +\\
&+(\lambda+\mu)[u_0(\cos(\theta+\varphi) - \cos(\theta-\varphi))/(h\delta) + w_0(\cos(\varphi+\psi) - \cos(\varphi-\psi))/\delta\Delta)] +\\
&+2\omega^2\rho\upsilon_0 = 0
\end{aligned}
$$

$$(\lambda+2\mu)w_0(\cos 2\psi-1)/\Delta^2+\mu[(\cos 2\theta-1)/h^2+(\cos 2\varphi-1)/\delta^2]w_0+$$
$$+(\lambda+\mu)[u_0(\cos(\theta+\psi)-\cos(\theta-\psi))/(h\Delta)+v_0(\cos(\varphi+\psi)-\cos(\varphi-\psi))/(\delta\Delta)]+$$
$$+2\omega^2\rho w_0=0$$

Условие равенства нулю определителя ее матрицы определяет нетривиальные решения и две серии приближенных собственных частот

$$\omega_1^*=[\mu(\sin^2\theta/h^2+\sin^2\varphi/\delta^2+\sin^2\psi/\Delta^2)/\rho]^{1/2}$$
$$\omega_2^*=[(\lambda+2\mu)(\sin^2\theta/h^2+\sin^2\varphi/\delta^2+\sin^2\psi/\Delta^2)/\rho]^{1/2}$$

Точная верхняя граница частот исследуемого здесь метода легко определяется из выражения для $\omega_2^*$ и равна $[3(\lambda+2\mu)/(\rho h^2)]^{1/2}$. Простота определения этой границы связана с применением ортогональных финитных функций. Полагая здесь $\theta=nh$, $\varphi=m\delta$, $\psi=l\Delta$ ($n$, $m$, $l$ – натуральные числа) в соответствии с краевыми условиями: на шести координатных плоскостях $x$, $y$, $z=0$, $\pi$, составляющих границу $\partial\Omega$, равны нулю тангенциальные составляющие вектора перемещения и нормальные составляющие вектора силы, и используя затем разложения по формуле Маклорена, имеем

$$\omega_1^*=[\mu(n^2+m^2+l^2)/\rho]^{1/2}-(n^4h^2+m^4\delta^2+l^4\Delta^2)/\{3![\rho(n^2+m^2+l^2)/\mu]^{1/2}\}+$$
$$+O(h^4,\delta^4,\Delta^4),\quad \omega_2^*=[(\lambda+2\mu)(n^2+m^2+l^2)/\rho]^{1/2}-$$
$$-(n^4h^2+m^4\delta^2+l^4\Delta^2)/\{3![\rho(n^2+m^2+l^2)/(\lambda+2\mu)]^{1/2}\}+O(h^4,\delta^4,\Delta^4) \qquad (3.8)$$

оценки точных частот, выражения которых представляют первые члены формул, с недостатком.

Для того, чтобы сравнить спектры частот систем сеточных уравнений предлагаемого здесь метода, с одной стороны, и метода Ритца, связанного с условием экстремума функционала Лагранжа и с применением классических функций Куранта, с другой стороны, проводится подстановка линейных комбинаций названных функций в условие стационарности функционала (1.6), которая приводит к сеточным уравнениям, содержащим узловые значения неизвестных компонент вектора перемещений. Эти уравнения после подстановки в них (3.7) принимают вид

$$2[(\lambda+2\mu)\delta\Delta(4-\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+\cos\varphi\cos\psi-2\cos\theta\cos\psi-2\cos\theta\cos\varphi+$$
$$+2\cos\varphi+2\cos\psi-4\cos\theta)/h+\mu h\Delta(4-\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+\cos\theta\cos\psi-2\cos\varphi\cos\psi-$$
$$-2\cos\theta\cos\varphi+2\cos\theta+2\cos\psi-4\cos\varphi)/\delta+\mu h\delta(4-\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+\cos\theta\cos\varphi-$$
$$-2\cos\theta\cos\psi-2\cos\varphi\cos\psi+2\cos\theta+2\cos\varphi-4\cos\psi)/\Delta]u_0/9+$$
$$+(\lambda+\mu)[\Delta\sin\theta\sin\varphi(2+\cos\psi)v_0+\delta\sin\theta\sin\psi(2+\cos\varphi)w_0]/3-$$
$$-(\omega^*)^2\rho h\delta\Delta(8+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+2\cos\varphi\cos\psi+2\cos\theta\cos\psi+2\cos\theta\cos\varphi+$$
$$+4\cos\theta+4\cos\varphi+4\cos\psi)u_0/27=0$$

$$2[(\lambda+2\mu)\delta\Delta(4-\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+\cos\theta\cos\psi-2\cos\varphi\cos\psi-2\cos\theta\cos\varphi+$$
$$+2\cos\theta+2\cos\psi-4\cos\varphi)/\delta+\mu\delta\Delta(4-\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+\cos\varphi\cos\psi-$$
$$-2\cos\theta\cos\psi-2\cos\theta\cos\varphi+2\cos\varphi+2\cos\psi-4\cos\theta)/h+\mu h\delta(4-\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+$$
$$+\cos\theta\cos\varphi-2\cos\theta\cos\psi-2\cos\varphi\cos\psi+2\cos\theta+2\cos\varphi-4\cos\psi)/\Delta]v_0/9+$$
$$+(\lambda+\mu)[\Delta\sin\theta\sin\varphi(2+\cos\psi)u_0+\delta\sin\varphi\sin\psi(2+\cos\theta)w_0]/3-$$

$$-(\omega^*)^2\rho h\delta\Delta(8+\cos\theta\cos\varphi\cos\varphi+2\cos\varphi\cos\psi+2\cos\theta\cos\psi+2\cos\theta\cos\varphi+$$

$$+4\cos\theta+4\cos\varphi+4\cos\psi)v_0\,/\,27=0$$

$$2[(\lambda+2\mu)h\delta(4-\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+\cos\theta\cos\varphi-2\cos\theta\cos\psi-2\cos\varphi\cos\psi+$$

$$+2\cos\theta+2\cos\varphi-4\cos\psi)/\Delta+\mu\delta\Delta(4-\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+\cos\varphi\cos\psi-$$

$$-2\cos\theta\cos\psi-2\cos\theta\cos\varphi+2\cos\varphi+2\cos\psi-4\cos\theta)/h+\mu h\Delta(4-\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+$$

$$+\cos\theta\cos\psi-2\cos\varphi\cos\psi-2\cos\theta\cos\varphi+2\cos\theta+2\cos\psi-4\cos\varphi)/\delta]w_0\,/\,9+$$

$$+(\lambda+\mu)[\delta\sin\theta\sin\psi(2+\cos\varphi)u_0+h\sin\varphi\sin\psi(2+\cos\theta)v_0]/3-$$

$$-(\omega^*)^2\rho h\delta\Delta(8+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+2\cos\varphi\cos\psi+2\cos\theta\cos\psi+2\cos\theta\cos\varphi+$$

$$+4\cos\theta+4\cos\varphi+4\cos\psi)w_0\,/\,27=0 \qquad (3.9)$$

Будем далее считать, что сетка – кубическая, то есть $h = \delta = \Delta$. С ростом числа узлов сеток приближенные значения низших частот двух серий, получаемые с помощью обоих методов, как будет показано далее, приближаются к одному и тому же пределу – точному значению низшей частоты. Поэтому для того, чтобы показать, что число обусловленности системы сеточных уравнений смешанного метода после исключения силовых функций меньше числа обусловленности системы уравнений метода Ритца, необходимо найти точную верхнюю границу собственных частот смешанного метода, а для метода Ритца достаточно провести исследование верхней границы части спектра собственных частот и показать, что она выше, чем у первого метода. Достаточно рассмотреть, например, только ту часть спектра частот метода Ритца, для которой $n = m = l$ ($\theta = \varphi = \psi$). Решения частотного уравнения системы (3.9) с учетом такого замечания и обозначения $A = \cos\theta = \cos\varphi = \cos\psi$ записываются в виде

$$(\omega_1^*)^2 = 3[\lambda+13\mu-2A(\lambda+4\mu)+A^2(\lambda-5\mu)]/[\rho h^2(2+A)^2]$$

$$(\omega_2^*)^2 = 6[5\lambda+11\mu-A(\lambda+4\mu)-A^2(4\lambda+7\mu)]/[\rho h^2(2+A)^2] \qquad (3.10)$$

Формула Маклорена позволяет преобразовать их и получить выражения

$$(\omega_1^*)^2 = 3n^2\mu/\rho+n^4(\lambda+4\mu)h^2/(12\rho)+n^6(5\lambda+8\mu)]h^4/(360\rho)+O(h^6)$$

$$(\omega_2^*)^2 = 3n^2(\lambda+2\mu)/\rho+n^4(\lambda+4\mu)h^2/(12\rho)-n^6(7\lambda+4\mu)]h^4/(360\rho)+O(h^6) \qquad (3.11)$$

которые дают оценки точных значений собственных частот с избытком, их первые члены совпадают с точными частотами (случай $n = m = l$). Таким образом, метод Ритца, использующий функции Куранта, и предлагаемый здесь метод приводят к двусторонним оценкам (3.8), (3.11) точных частот. Для получения оценки верхней границы частот (3.10), (3.11) метода Ритца производную функции $[\omega_1^*(A)]^2$ приравняем нулю и найдем стационарное значение: $A_1 = (\lambda + 7\mu)/(\lambda - 2\mu)$. Учитывая то, что $\lambda = \nu E/((1 + \nu)(1 - 2\nu))$, $\mu = E/(2(1 + \nu))$, выявим зависимость $A_1$ от коэффициента Пуассона $A_1(\nu) = 3/(6\nu - 2) - 2$. Рассмотрим эту функцию на области $[-1; 1/2]$ возможных значений $\nu$. Ее производная $dA_1(\nu)/d\nu = -18/(6\nu - 2)^2$ строго отрицательна, функция $A_1(\nu)$ имеет разрыв второго рода в точке $\nu = 1/3$: $\lim\limits_{\nu\to 1/3-0} A_1(\nu) = -\infty$, $\lim\limits_{\nu\to 1/3+0} A_1(\nu) = +\infty$, и принимает значения $A_1(-1) = -19/8$, $A_1(1/2) = 1$. Таким образом, область значений $A_1$, определяющих стационарную точку при различных значениях $\nu$, не содержит интервала (–1; 1) и поэтому непрерывная на [–1; 1] функция $[\omega_1^*(A)]^2$ имеет глобальные экстремумы на концах отрезка $[\omega_1^*(-1)]^2_{max} = 12(\lambda + 4\mu)/(\rho h^2)$, $[\omega_1^*(1)]^2_{min} = 0$. Приравняем нулю производную функции $[\omega_2^*(A)]^2$, определяющей вторую серию частот (3.10), и найдем стационарное значение: $A_2 = -2(2\lambda + 5\mu)/(5\lambda + 8\mu) = 3/(4 - 3\nu) - 2$. Имеем далее $dA_2/d\nu = 9/(4 - 3\nu)^2 > 0$, следовательно $A_2(\nu)$ – возрастающая на [–1; 1/2]. Она не имеет там разрывов, $A_2(-1) = -11/7$, $A_2(1/2) = -4/5$, поэтому есть значения $\nu$, для которых стационарное значение $A_2(\nu)$ попадает в интервал (–1; 1), это имеет место для $\nu \in (1/3;\ 1/2]$. Глобальные на [–1; 1] экстремумы функции $[\omega_2^*(A)]^2$ в общем случае определяются ее значениями в трех точках:

$$[\omega_2^*(-1)]^2 = 12(\lambda + 4\mu)/(\rho h^2), \quad \omega_2^*(1) = 0$$

$$\{\omega_2^*[-6(2\lambda + 5\mu)/(\rho h^2(5\lambda + 8\mu))]\}^2 = 27(\lambda + 2\mu)^2/(2\rho h^2(\lambda + \mu))$$

Проведем сравнение спектров частот двух методов, учитывая то, что, как следует из (3.8), (3.11), с ростом числа узлов сеток приближенные значения низших частот двух серий, полученные с помощью обоих методов, приближаются к одному и тому же пределу – точному значению низшей частоты. Рассмотрим случай $\nu \in (-1;\ 1/3)$, в котором верхняя граница спектра приближенных частот метода Ритца характеризуется положительным числом $12(\lambda + 4\mu)/(\rho h^2)$, причем в действительности граница может находиться выше, поскольку проводился анализ только части спектра. Рассмотрим разность $\Theta$ квадратов чисел, определяющих верхние границы спектров частот двух методов:

$$\Theta(\nu) = 12(\lambda + 4\mu)/(\rho h^2) - 3(\lambda + 2\mu)/(\rho h^2) = 3E(11\nu - 7)/[\rho h^2(2\nu^2 + \nu - 1)]$$

Уравнение $d\Theta(\nu)/d\nu = 6E[1/(1 - 2\nu)^2 - 3/(1 + \nu)^2]/(\rho h^2) = 0$ дает две стационарные точки: $\nu_{1,2} = (7 \pm 3\sqrt{3})/11$. Значение разности $\Theta(\nu_2) = E(13 + 4\sqrt{3})/(\rho h^2)$ в точке $\nu_2 = (7 - 3\sqrt{3})/11$, лежащей в интервале (–1; 1/2), и величины пределов $\lim\limits_{\nu \to -1+0} \Theta(\nu) = +\infty$, $\lim\limits_{\nu \to 1/2-0} \Theta(\nu) = +\infty$ позволяют сделать заключение о том, что верхняя граница спектра частот предлагаемого здесь метода ниже соответствующей границы спектра частот метода Ритца, причем разница между ними минимальна для $\nu_2 = (7 - 3\sqrt{3})/11$, возрастает по мере удаления от этой точки к точке $\nu = 1/3$ до $45E/(2\rho h^2)$ и до сколь угодно больших значений в окрестности точки $\nu = -1$.

**4. Заключение.** Показано, что ортогональные финитные функции [2, 3, 4, 6] являются средством построения эффективных смешанных вариационно-сеточных методов решения краевых задач механики деформируемых твердых тел, обладающих более высокими вычислительными характеристиками по сравнению с известными подобными методами и дающих оценки точных собственных частот с недостатком. Предлагаемый метод после соответствующей модификации смешанного функционала Рейсснера может быть использован для решения задач о собственных колебаниях не только изотропных, но и анизотропных упругих тел. Ограничением области его применимости является требование независимости коэффициентов упругости (в общем случае – компонент тензора упругости) от координат во всей области упругого тела или в его частях, обеспечивающее реализацию свойства ортогональности базисных функций в сеточных соотношениях упругости. В последнем случае алгоритм численного метода должен сохранять совпадение границ этих частей с границами конечных носителей финитных функций на всех шагах сгущения сетки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Communs Pure and Appl. Math. 1988. V. 41. № 7. P. 909–996.
2. *Леонтьев В.Л.* Об одном обобщении функций Куранта // Теория функций и приближений. Тр. 7-й Сарат. зимней школы. 1994. (Памяти проф. А.А. Привалова). Саратов: Изд-во Сарат, ун-та, 1995. Ч. 3. С. 36–40.
3. *Leontjew V.L., Ziplow M.P.* Uber eine projektionen netzlichen Methode, die mit der Anwendung der miteinander orthogonalen ununterbrochen en Basisfunktionen mit dem endlichen Trager verknupfen ist // Des. 1 Russisch-Deutschen Symp. "Intelligente informationstechnologien in der entscheidungsfindung". Moskau, 1995. S. 169–173.
4. *Леонтьев В.Л., Лукашанец Н.Ч.* О сеточных базисах ортогональных финитных функций // ЖВМиМФ. 1999. Т. 39. № 7. С. 1161–1171.
5. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
6. *Леонтьев В.Л.* Метод конечных элементов теории упругости (смешанные вариационные формулировки). Ульяновск: Изд-во Средневолж. науч. центра, 1998. 168 с.
7. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.

Ульяновск

Поступила в редакцию
14.04.2000