

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. С.В. НОВОТНЫЙ

## ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОХГАММЕРА-КРИ НА СЛУЧАЙ ИНЕРЦИОННО ПОДАТЛИВОЙ ГРАНИЦЫ

Рассматривается решение внутренней регулярной задачи для цилиндра о распространении плоских стационарных осесимметричных волн в безграничном упругом изотропном круговом цилиндре (задача Похгаммера-Кри [1, 2]) при граничных условиях инерционного типа: напряжения на границе пропорциональны ускорениям.

Получено соответствующее частотное соотношение, определяющее закон дисперсии при наличии несвободной границы; проведен его анализ для действительных и мнимых параметров распространения и сделано сравнение с решениями случая классических граничных условий.

Обнаружены качественные изменения в структуре частотного спектра по сравнению со случаем свободной границы и установлен характер влияния и степень зависимости основных спектральных характеристик гармонического волнового процесса от различных значений параметра подкрепления и коэффициента Пуассона.

**1. Постановка задачи.** Пусть ось  $z$  цилиндрической системы координат  $(r, \theta, z)$  совпадает с осью бесконечно длинного изотропного цилиндра радиуса  $a$  с плотностью  $\rho$  и упругими константами  $\lambda, \mu$ .

Рассмотрим распространение вдоль оси  $z$  упругих стационарных осесимметричных волн продольно-радиального движения [1–7], определяемых перемещениями

$$u_r = U(r)e^{i(\gamma z - \omega t)}, \quad u_\theta \equiv 0, \quad u_z = W(r)e^{i(\gamma z - \omega t)} \quad (1.1)$$

с фазовой скоростью  $p = \omega/\gamma$ , где  $\omega$  – круговая частота,  $\gamma$  – параметр распространения (волновое число).

Амплитудные функции радиуса  $U(r)$  и  $W(r)$  в выражениях для перемещений нетрудно получить из решения волнового уравнения Ламе в терминах скалярного  $\Phi$  и векторного  $\Psi$  потенциалов с использованием метода разделения переменных и представления вектора смещения через упругие потенциалы [3, 5, 6, 7]. В безразмерной форме (черта сверху над соответствующими величинами) они имеют следующий вид:

$$\bar{U}(\bar{r}) = -\alpha A J_1(\alpha \bar{r}) - \beta B J_1(\beta \bar{r}) - \alpha G Y_1(\alpha \bar{r}) - \beta H Y_1(\beta \bar{r})$$

$$\bar{W}(\bar{r}) = i \left[ \bar{\gamma} A J_0(\alpha \bar{r}) - \frac{\beta^2}{\bar{\gamma}} B J_0(\beta \bar{r}) + \bar{\gamma} G Y_0(\alpha \bar{r}) - \frac{\beta^2}{\bar{\gamma}} H Y_0(\beta \bar{r}) \right]$$

$$\alpha^2 = \Omega^2 / l^2 - \bar{\gamma}^2, \quad \beta^2 = \Omega^2 - \bar{\gamma}^2, \quad \Omega = \omega a / c_2, \quad \bar{\gamma} = \gamma a$$

$$l^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2} = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{u} = \frac{u}{a}$$

где  $J_j, Y_j$  – функции Бесселя первого и второго рода, соответственно.

Неизвестные коэффициенты  $A, B, G, H$  определяются из граничных условий на цилиндрической поверхности  $\bar{r} = 1$  ( $r = a$ ) и из дополнительных условий о характере регулярности решения на оси цилиндра  $r = 0$ . В рассматриваемой задаче нет учета каких-либо потерь или диссипации энергии, т.е. величины  $\omega$  и  $\nu$  (коэффициент Пуассона) положительно определенные или равные нулю величины.

На границе  $r = a$  предполагается наличие инерционного подкрепления в виде равномерно распределенной на единицу площади поверхности массы  $m$ , так что граничные условия в безразмерной форме имеют вид

$$\bar{\sigma}_{rr} = -\bar{m} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial t^2} = \bar{m} \Omega^2 \bar{u}_r \equiv -\bar{R} \bar{u}_r, \quad \bar{r} = 1 \quad (1.2)$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = -\bar{m} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial t^2} = \bar{m} \Omega^2 \bar{u}_z \equiv -\bar{Z} \bar{u}_z$$

$$\bar{m} = \frac{m}{\rho a}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{\mu} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{u_r}{r} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \bar{\sigma}_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{\mu} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

где  $\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rz}$  – безразмерные отличные от нуля компоненты тензора напряжений.

Задача состоит в нахождении связей между частотами колебаний  $\omega$  и скоростями их распространения  $p$ , или что то же самое, – в определении соотношений между допустимыми частотами  $\omega$  и параметрами распространения  $\gamma = \omega/p$ , при указанном граничном условии.

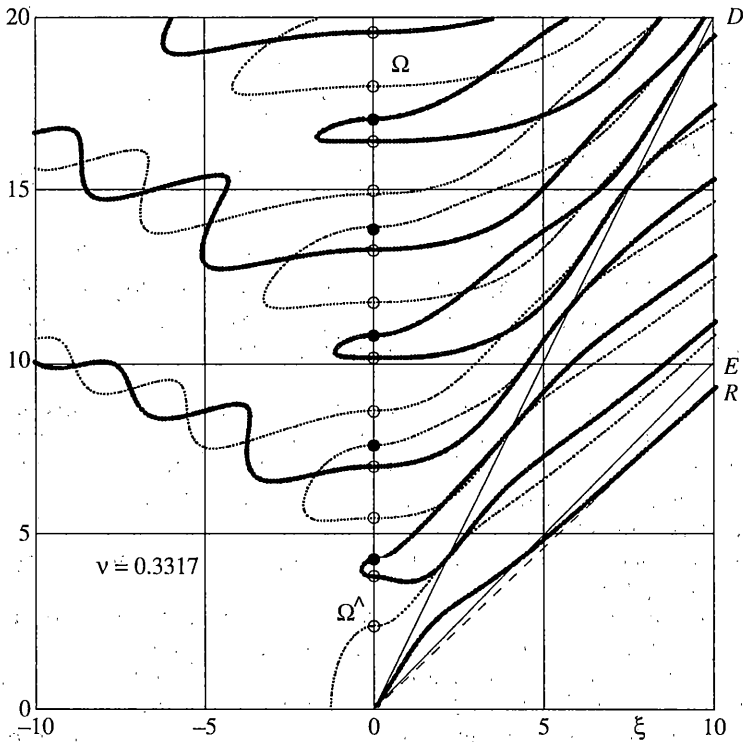
**2. Уравнение частот.** Граничные условия (1.2) совместно с требованием регулярности решения на оси цилиндра  $r = 0$  приводят к однородной линейной системе уравнений для неизвестных постоянных  $A$  и  $B$ . Условие существования ее нетривиального решения определяет дисперсионное соотношение, связывающее допустимые значения  $\bar{\gamma}$  и  $\Omega$ :

$$[(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2)^2 - \bar{Z}(\bar{R} - 2)\bar{\gamma}^2] J_0(\alpha) J_1(\beta) + [4\alpha\beta\bar{\gamma}^2 - \alpha\beta\bar{Z}(\bar{R} - 2)] J_1(\alpha) J_0(\beta) + \alpha\Omega^2(\bar{R} - 2) J_1(\alpha) J_1(\beta) - \bar{Z}\beta\Omega^2 J_0(\alpha) J_0(\beta) = 0 \quad (2.1)$$

Непосредственной проверкой устанавливается независимость вида частотного уравнения  $F(\bar{\gamma}, \Omega) = 0$  от различного выбора ветвей однозначности многозначных функций  $\alpha = \pm\sqrt{\Omega^2/l^2 - \bar{\gamma}^2}$  и  $\beta = \pm\sqrt{\Omega^2 - \bar{\gamma}^2}$ . При вычислении следует учитывать, что  $J_n(\pm ix) = (\pm i)^n I_n(x)$ , где  $I_n(x)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода.

**2.1. Графическое представление решения.** Набор действительных ( $\bar{\gamma} = \xi$ ), мнимых ( $\bar{\gamma} = i\eta$ ) и комплексных ( $\bar{\gamma} = \xi + i\eta$ ) корней решений частотного уравнения (2.1), составляющий частотный спектр задачи, образует в частотном пространстве ( $\bar{\gamma}, \Omega$ ) сложную систему непрерывных кривых [4, 6, 7], называемых ветвями спектра.

В публикуемой работе дан анализ частотного спектра только при действительных и чисто мнимых  $\bar{\gamma}$ . В этом случае кривые  $\Omega \sim \bar{\gamma}$  удобно представить на одной плоскости (см., например, фиг. 1). Область действительных  $\bar{\gamma} = \xi$  соответствует области распространяющихся мод  $\bar{u}_i = f_i(\bar{r}) e^{i(\xi\bar{z} - \Omega\bar{t})}$  и  $\xi$  является величиной обратно пропорциональной длине волны  $L$ :  $\xi = 2\pi/L$ , а область мнимых  $\bar{\gamma} = i\eta$  представляет неоднородные свободные колебания, амплитуды которых зависят от  $\bar{r}$  и  $\bar{z}$ :  $\bar{u}_i = f_i(\bar{r}, \eta\bar{z}) e^{i\Omega\bar{t}}$ . Таким образом, каждой точке спектральной ветви ставится в соответствие мода волновых движений, определяемая своей частотой и формой колебаний, причем в случае распространяющихся мод тангенс угла наклона секущей, проведенной в данную точку из начала координат, будет определять фазовую скорость  $p$ ,



Фиг. 1

а касательная – групповую  $c_g$  (жирные кривые соответствуют свободной границе, а тонкие – закрепленной).

Поэтому для двухмерного случая осесимметричных волн продольно-радиального движения первый квадрант плоскости  $(\bar{\gamma}, \Omega)$  целесообразно разбить прямыми  $\Omega = l\xi$  (прямая  $OD$  на фиг. 1, которая соответствует значению  $\alpha = 0$  или  $p = c_1$ ) и  $\Omega = \xi$  (прямая  $OE$  соответствует значению  $\beta = 0$  или  $p = c_2$ ) на три сектора: сектор сверхзвуковых скоростей распространения ( $p > c_1$ ), где  $\alpha$  и  $\beta$  – вещественные величины; интерзвуковой сектор ( $c_2 < p < c_1$ ), в котором  $\alpha$  – мнимое, а  $\beta$  – вещественное и сектор дозвукового движения ( $p < c_2$ ), где  $\alpha$  и  $\beta$  – мнимые величины. В последнем секторе полезно выделить еще одну прямую  $OR$  (фиг. 1), соответствующую скорости поверхностной волны Рэлея  $p = c_R$ .

2.2 Кинематика распространяющихся мод. Используя первое или второе из граничных условий (1.2), характеризующее подкрепление границы в радиальном или осевом направлении, получим кинематические формулы для компонент вектора смещений  $\bar{u}_r$  и  $\bar{u}_z$  в регулярном случае

$$\bar{u}_r = \bar{A}(\mathcal{R}^\alpha J_1(\alpha\bar{r}) + \mathcal{R}^\beta J_1(\beta\bar{r}))e^{i(\bar{\gamma}z - \Omega\bar{t})}$$

$$\bar{u}_z = i\bar{A}(\mathcal{S}^\alpha J_0(\alpha\bar{r}) + \mathcal{S}^\beta J_0(\beta\bar{r}))e^{i(\bar{\gamma}z - \Omega\bar{t})}$$

$$\mathcal{R}^\alpha = -\alpha, \quad \mathcal{R}^\beta = -\frac{(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2)J_0(\alpha) - (2 - \bar{R})\alpha J_1(\alpha)}{-2\beta J_0(\beta) + (2 - \bar{R})J_1(\beta)} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{S}^\alpha = \bar{\gamma}, \quad \mathcal{S}^\beta = -\frac{\beta(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2)J_0(\alpha) - (2 - \bar{R})\alpha J_1(\alpha)}{\bar{\gamma}[-2\beta J_0(\beta) + (2 - \bar{R})J_1(\beta)]}$$

или

$$\mathfrak{R}^\alpha = \frac{\alpha (\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2) J_1(\beta) - \beta \bar{Z} J_0(\beta)}{\bar{\gamma} \bar{Z} J_0(\alpha) - 2\alpha J_1(\alpha)}, \quad \mathfrak{R}^\beta = -\bar{\gamma} \quad (2.3)$$

$$\mathfrak{S}^\alpha = \frac{(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2) J_1(\beta) - \beta \bar{Z} J_0(\beta)}{2\alpha J_1(\alpha) - \bar{Z} J_0(\alpha)}, \quad \mathfrak{S}^\beta = -\beta.$$

Выражения (2.2) и (2.3) эквивалентны с точностью до неопределяемой в случае стационарного движения амплитудной постоянной  $\tilde{A}$ , поскольку  $\Omega$  и  $\bar{\gamma}$ , входящие в выражения (2.2), (2.3), завязаны дисперсионным соотношением, которое связывает первое и второе граничные условия (1.2) относительно радиальной и осевой реакции подкрепления.

Кинематические соотношения показывают, что независимо от того свободна или подкреплена граница амплитудные функции радиуса в компонентах вектора смещений  $\bar{u}_r$  и  $\bar{u}_z$  являются функцией  $\Omega$ . Поэтому все нормальные волны, принадлежащие одной и той же ветви не имеют единой формы волновых движений, в отличие от одномерных волн кручения случая классических граничных условий [6, 7, 8], у которых даже при наличии дисперсии всякая спектральная кривая обладает единой формой волновых движений.

**3. Анализ корней дисперсионного уравнения.** Непосредственный анализ двухпараметрического уравнения частот, включающего трансцендентные функции, весьма затруднителен, поэтому на основе аналитических методов исследуем качественную структуру решения в длинноволновом низкочастотном и в коротковолновом высокочастотном пределе; проанализируем влияние параметра подкрепления на семейства критических частот или собственных однородных колебаний, а также с помощью численного анализа проведем оценку поведения решения при некоторых значениях входящих в него параметров: коэффициента Пуассона  $\nu$  и параметра подкрепления границы  $\bar{m}$ .

*3.1. Критические частоты.* Точки пересечения дисперсионных кривых с осью ординат  $\bar{\gamma} = 0$  определяют значения критических частот  $(0, \Omega_*)$ , при которых распространяющиеся моды при  $\bar{\gamma} \rightarrow 0$  переходят в однородные собственные колебания  $\bar{u}_i = f_i(\bar{r}) e^{i\Omega_* \bar{t}}$ . В таких точках фазовая скорость равна бесконечности и движения определенного вида совершаются синхронно и синфазно. Значения критических частот получаются как решения частотного уравнения (2.1), если  $\bar{\gamma}$  устремить к нулю, оставляя  $\Omega$  конечным, т.е.  $F(0, \Omega_*) = 0$ . Как и в случае свободной границы критические частоты в случае инерционного подкрепления границы  $\Omega_*^m$  распадаются на два независимых семейства

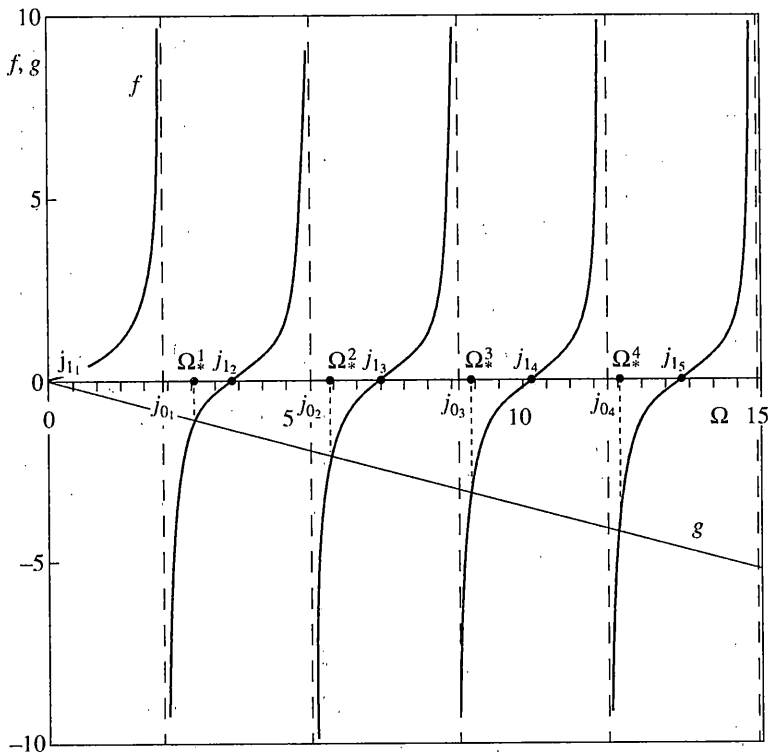
$$(\Omega J_1(\Omega) - \bar{Z} J_0(\Omega)) \left[ \Omega J_0\left(\frac{\Omega}{l}\right) - \frac{(2 - \bar{R})}{l} J_1\left(\frac{\Omega}{l}\right) \right] = 0$$

*а) Первое семейство*

$$\Omega J_1(\Omega) - \bar{Z} J_0(\Omega) = 0 \quad (3.1)$$

также оказывается независимым от коэффициента Пуассона и связано только с осевой реакцией<sup>1</sup> подкрепления  $\bar{Z} = -\bar{m}\Omega^2$ . Его решения  $\Omega_*^m = \beta_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) представляют продольные формы колебаний  $\bar{u}_r = 0$ ,  $\bar{u}_z = \tilde{A} J_0(\beta_s \bar{r})$ . В этом легко убедиться

<sup>1</sup> Вообще говоря, допустима анизотропия свойств реакции плотности распределенной массы в разных направлениях  $m_r \neq m_z$ , что не ограничивает общности полученных результатов.



Фиг. 2

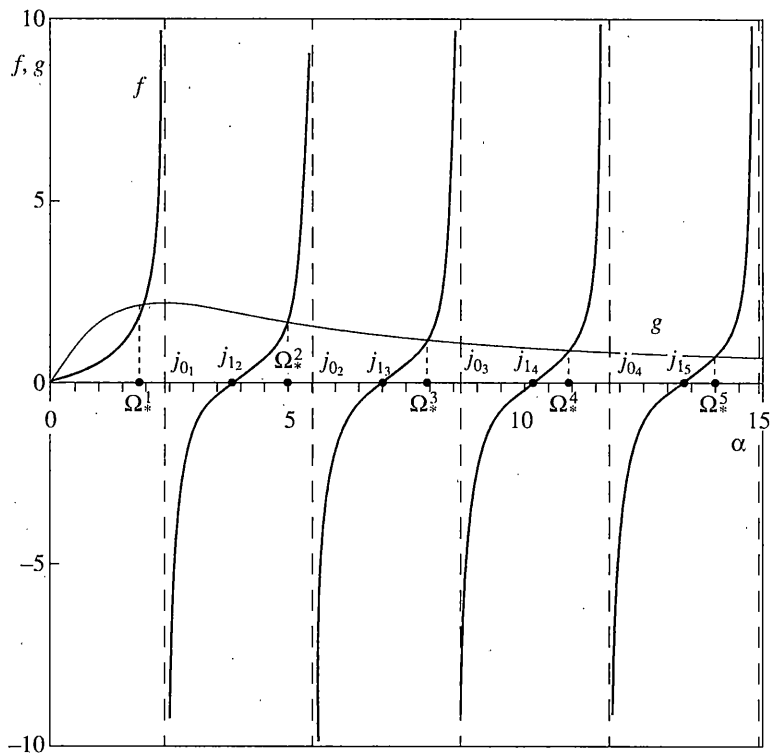
с помощью выражений (2.3), содержащих при  $\bar{\gamma} = 0$  в числителе дроби равную нулю левую часть (3.1). Так как отличная от нуля осевая компонента перемещения зависит от радиуса  $\bar{r}$ , поэтому колебания, связанные с этим семейством называют продольно-сдвиговыми колебаниями или плоскими волнами продольно-сдвигового движения подобного SV волнам в слое. Единственной отличной от нуля компонентой деформации в этом случае есть сдвиговая деформация  $\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} du_z / dr$ .

Для исследования влияния параметра подкрепления на значения критических частот первого семейства представим (3.1) в виде

$$J_1(\Omega) / J_0(\Omega) = -\bar{m}\Omega \quad (3.2)$$

и с помощью параметрического метода проведем анализ корней этого уравнения, как точек пересечения в плоскости  $(f, \Omega)$  графиков функций  $f$  и  $g$ , стоящих в левой и правой частях уравнения (3.2), соответственно. График функции  $f$  есть кривая наподобие тангенциальной кривой (см. фиг. 2), а функция  $g$  представляет собой обычную прямую с тангенсом угла наклона  $-\bar{m}$ . Из фиг. 2 видно, что при фиксированном значении  $-\bar{m}$  в высокочастотной области значение критических частот  $\beta_s$  стремится к нулям функции  $J_0 - j_{0_s}$ , которые являются собственными частотами случая закрепленной границы.

Увеличение значений параметра подкрепления символизируется поворотом прямой  $g$  по часовой стрелке (см. фиг. 2), так что в случае инерционного опирания границы происходит понижение значений критических частот по сравнению со случаем свободной границы [7, 9] – набором  $j_{1_s}$ . Таким образом, все критические частоты  $\Omega_*^m = \beta_{s+1}$  попадают только в отрезки  $[j_{0_s}, j_{1_{s+1}}]$ , причем с ростом  $\bar{m}$  (прямая  $g$



Фиг. 3

прижимается к оси ординат) значения  $\beta_s$  стремятся к собственным частотам случая закрепленной границы  $j_{0_s}$  сверху.

Запирание частот или отсутствие волнового распространения в определенном диапазоне частот при наличии равномерно распределенной массы  $\bar{m}$  не имеет места, как в случае жесткозакрепленной границы от 0 до  $\Omega^{\wedge}$  (см. фиг. 1), так как нулевая частота является решением (3.1).

*b) Второе семейство критических частот*

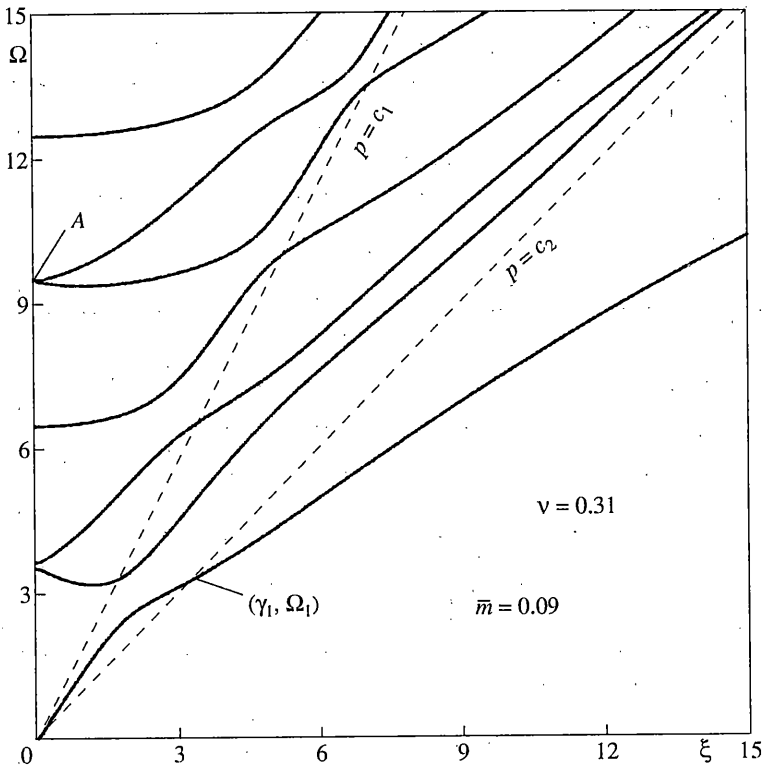
$$\left[ \Omega J_0\left(\frac{\Omega}{l}\right) - \frac{(2-\bar{R})}{l} J_1\left(\frac{\Omega}{l}\right) \right] = 0 \quad (3.3)$$

определяется совместным влиянием радиальной реакции подкрепления  $\bar{R} = -\bar{m}\Omega^2$  и коэффициента Пуассона на значения критических частот  $\Omega_*^m = l\alpha_q$  ( $q = 1, 2, 3, \dots$ ) этого семейства. Второе семейство представляет уже радиальные формы колебаний  $\bar{u}_r = \bar{A}J_1(\alpha_q \bar{r})$ ,  $\bar{u}_z = 0$ , что следует непосредственно из выражений (2.2) на основании (3.3) при  $\bar{\gamma} \rightarrow 0$ . В этой форме колебаний ненулевыми оказываются две компоненты деформации  $\epsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r$  и  $\epsilon_{\theta\theta} = u_r / r$ , поэтому такое движение определяет плоские волны чисто радиального движения аналогичные плоским SH волнам в слое.

Аналогично первому семейству представим (3.3) в виде

$$\frac{J_1(\alpha)}{J_0(\alpha)} = l^2 \frac{\alpha}{2-\bar{R}} = l^2 \frac{\alpha}{2+\bar{m}l^2\alpha^2}$$

Решая его параметрически (см. фиг. 3), находим, что инерционная податливость обеспечивает и в этом случае понижение значений критических частот и все  $\alpha_q$  при из-



Фиг. 4

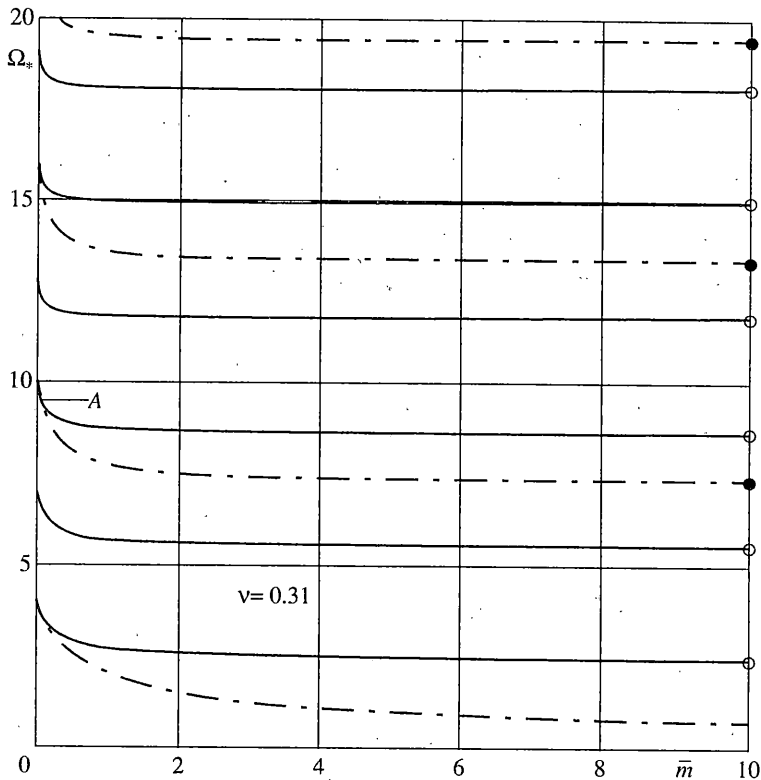
менении  $\bar{m}$  от нуля до бесконечности попадают только в отрезки  $[j_{1q}, j_{0q}]$ , границы которых определяются соответствующими решениями для случаев закрепленной и свободной границы. Отметим, что множество отрезков, в которые попадают  $\alpha_q$  не пересекается с аналогичным множеством отрезков для  $\beta_s$ , за исключением предельных случаев классических граничных условий, но сами критические частоты при определенных значениях коэффициента Пуассона могут совпадать, когда выполняется равенство  $|\alpha_q| = \beta_s$ . В последнем случае в этих особых точках происходит наложение радиально- и продольно-сдвигового движения, поскольку в одну точку на оси частот приходят две спектральные кривые (см. точка  $A$  на фиг. 4).

С ростом  $\bar{m}$  значения частот также стремятся к соответствующим решениям случая закрепленной границы. В высокочастотной области при  $\bar{m} = \text{const}$  значения  $\Omega_*^m = |\alpha_q|$  стремятся сверху к собственным частотам второго семейства для случая закрепленной границы  $J_1(\Omega/l) = 0$ .

Наклоны ветвей  $d\Omega/d\bar{\gamma}$  в точках критических частот  $\Omega_*$ , равные значениям групповой скорости [4, 7] и определяемые из условий

$$\frac{d\Omega}{d\bar{\gamma}} = \frac{-F'_{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma}, \Omega_*)}{F'_{\Omega}(\bar{\gamma}, \Omega_*)} \text{ при } \bar{\gamma} = 0 \text{ и } F'_{\Omega}(0, \Omega_*) \neq 0$$

всегда нулевые, так как  $F'_{\bar{\gamma}}(0, \Omega_*) = 0$ . Исключение составляет случай совпадения критических частот разного семейства при определенных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$  и параметра  $\bar{m}$ , когда в одну точку ординат приходят две различные кривые и следовательно в ее окрестности уравнение  $F(\bar{\gamma}, \Omega) = 0$  не определяет частоты



Фиг. 5

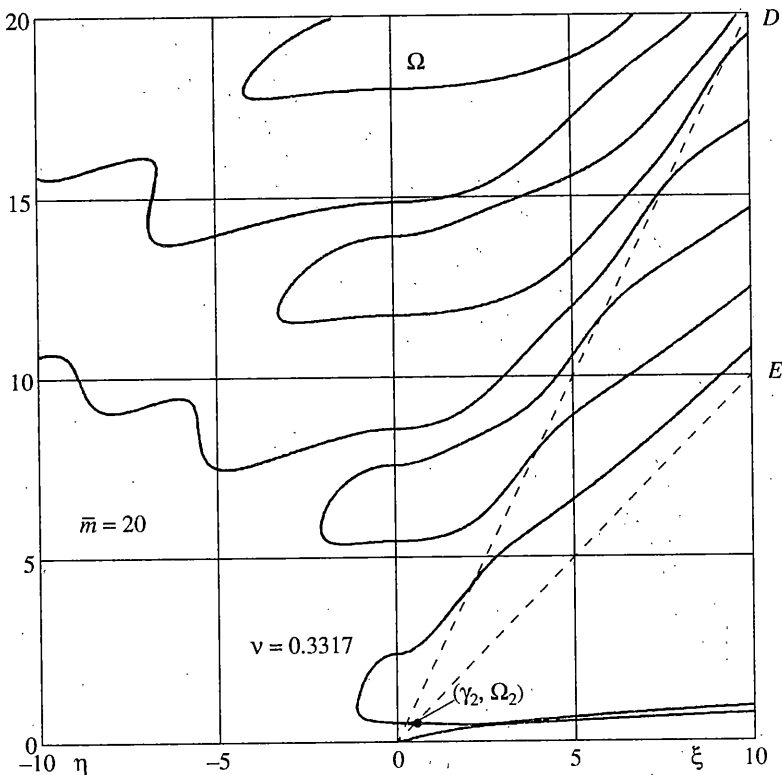
ту  $\Omega$  как однозначную функцию от  $\bar{\gamma}$  [4,7]. Такие точки на самом деле являются в трехмерном пространстве  $(\xi, \eta, \Omega)$  седловыми точками по отношению к изменению коэффициента Пуассона, т.к. в них по отношению к изменению  $\nu$  выполняются условия на седловую точку – равенства нулю значений  $F = 0$ ,  $F'_\gamma = 0$ ,  $F'_\Omega = 0$  [4].

*Влияние коэффициента Пуассона  $\nu$ .* График зависимости значений критических частот первого и второго семейства от величины инерционной податливости  $\bar{m}$  для  $\nu = 0.31$  приведен на фиг. 5, где сплошные линии соответствуют первому семейству критических частот, а штрих-пунктирные – второму. С изменением коэффициента Пуассона происходит смещение семейства штрих-пунктирных линий так, что с ростом  $\nu$  происходит повышение общего частотного фона с уходом его в бесконечность при  $\nu = 1/2$ . В последнем случае остается лишь одно семейство критических частот, которое не зависит от коэффициента Пуассона. Исключение составляет предельный случай жесткозакрепленной границы  $\bar{m} = \infty$ , когда при  $\nu = 1/2$ , помимо первого семейства  $J_0(\Omega) = 0$ , получаемого предельным переходом при  $\bar{Z} = \infty$ , присутствует дополнительное семейство критических частот  $J_1(\Omega) - \frac{1}{2}\Omega J_0(\Omega) = 0$ , которое нетрудно получить как корни второй кратности из соответствующего дисперсионного уравнения предельным переходом при  $\bar{\gamma} \rightarrow 0$  и  $\nu = 1/2$ . Смещения в точках такого семейства, как и в случае первого семейства, представляют продольные формы колебаний

$$u_r = 0, \quad u_z = \tilde{F} \left( 1 - \frac{\Omega J_0(\Omega \bar{r})}{2 J_1(\Omega)} \right) e^{i\Omega \bar{r}}$$

Светлыми и темными точками на фиг. 5 отмечены, соответственно, значения критических частот первого и второго семейства предельного случая жесткозакрепленной





Фиг. 6

границы, что наглядно иллюстрирует стремление значений к решению для предельного случая при  $\bar{m} \rightarrow \infty$ . Точке  $A$  (точке пересечения сплошных и штриховых линий  $\bar{m} \approx 0.09$ ) соответствует особая ситуация, когда в одну точку на оси ординат приходят две спектральные кривые разного наклона (см. также фиг. 4).

В случае инерционного сопротивления записание частот не имеет места и с ростом массы  $\bar{m}$  общий фон критических частот понижается, стремясь к соответствующим решениям случая закрепленной границы. Групповая скорость в точках критических частот нулевая за исключением особых случаев наложения движений радиально и продольно-сдвигового характера, определяющих наличие седловой точки.

**3.2. Низкочастотное длинноволновое приближение.** Асимптотическое поведение решения (наклон первой ветви частотного спектра) вблизи нулевой точки (низкочастотное длинноволновое приближение) можно получить непосредственно из уравнения частот, считая  $\Omega$  и  $\bar{\gamma}$  малыми величинами.

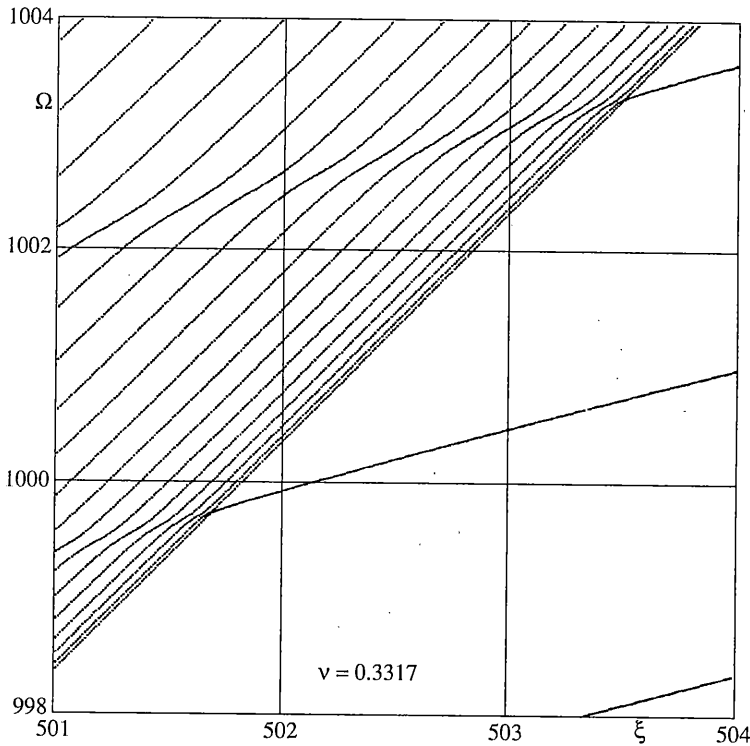
Наклон первой спектральной ветви в окрестности нуля будет определять скорость распространения продольных волн, получаемой по элементарной стержневой теории при условии наличия подкрепления.

Для получения требуемого соотношения разделим частотное уравнение (2.1) на  $\beta \Omega^2 J_0(\alpha) J_0(\beta)$  и перейдем к пределу при  $\alpha, \beta$ , стремящимся к нулю ( $\Omega, \bar{\gamma}$  – малы):

$$\Omega^2 - 2(1 + \nu)\bar{\gamma}^2 - (1 - 2\nu)\bar{Z}(\bar{R} - 2) - 4(1 - \nu)\bar{Z} + (1 - \nu)\alpha^2 \bar{R} = 0 \quad (3.4)$$

$$\alpha^2 = \Omega^2 / l^2 - \bar{\gamma}^2, \quad l^2 = 2(1 - \nu) / (1 - 2\nu).$$

При классических граничных условиях [7, 9, 10] свободной границы ( $\bar{R} \equiv 0, \bar{Z} \equiv 0$ )



Фиг. 7

имеем соотношение элементарной теории длинноволновых продольных колебаний низкой частоты  $\Omega = 2(1 + \nu)\bar{\gamma}$  или в размерных величинах  $\omega = \sqrt{E/\rho\gamma}$ .

В случае инерционного опирания границы имеем особую ситуацию, когда уравнение (3.4) представляет собой биквадратное уравнение

$$[(1 - 2\nu)\bar{m}(1 + 2\bar{m})]\Omega^4 - 2[1 + 2\bar{m} - (1 - \nu)\bar{m}\bar{\gamma}^2]\Omega^2 + 4(1 + \nu)\bar{\gamma}^2 = 0$$

имеющее два, стремящихся к нулю с ростом значения параметра  $\bar{m}$ , положительных корни. Значение последнего факта заключается в наличии в окрестности нулевой точки при достаточно больших  $\bar{m}$  двух ветвей разного наклона (см., например, фиг. 6), причем наклон одной из них в точке отличной от нуля критической частоты будет всегда нулевым (см. п. 3.1).

Отбрасывая в (3.4) члены четвертого порядка малости, получим искомый наклон для первой спектральной ветви

$$\Omega^2 = \frac{2(1 + \nu)}{1 + 2\bar{m}}\bar{\gamma}^2$$

Видно, что наклон первой спектральной кривой в начале координат уменьшается с ростом  $\bar{m}$  вплоть до нулевого при  $\bar{m} \rightarrow \infty$  (см. также фиг. 6). Т.е. начиная с некоторого значения  $\bar{m} = m^* = 1/2 + \nu$  первая ветвь оказывается полностью в области дозвукового движения  $\Omega < \bar{\gamma}$  ( $p < c_2$ ) и, следовательно, в этом случае, в отличие от случаев классических граничных условий, движения с дозвуковыми скоростями возможны для любой частоты, так что барьерная дозвуковая частота  $\Omega_1$  равна нулю.

*3.3. Высокочастотное коротковолновое приближение.* Как и в классическом случае свободной границы, все ветви в высокочастотной области в сверхзвуковом секторе  $p > c_1$  ( $\Omega > l\xi$ ) имеют террасоподобное поведение (см. фиг. 7). Для детального

обоснования этого факта возможно применение техники барьеров и границ, развитой Пао и Миндлиным [11].

В коротковолновой области высокой частоты все ветви после своего пересечения с прямой  $\Omega = l\bar{\gamma}$  ( $\alpha = 0$ ), соответствующей скорости волны делатации  $p = c_1$ , с дальнейшим ростом частоты выходят в интерзвуковой сектор  $\bar{\gamma} < \Omega < l\bar{\gamma}$  и стремятся к прямой  $\Omega = \bar{\gamma}$  (см. фиг. 4, 6).

Действительно будем искать асимптоту  $\Omega = s\bar{\gamma}$  для всех ветвей в высокочастотной коротковолновой области  $\Omega$ ,  $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$ . В интерзвуковом секторе  $\alpha = i\alpha_1 = i\bar{\gamma}\sqrt{1-s^2}/l^2$ ,  $\beta = \bar{\gamma}\sqrt{s^2-1}$ ,  $1 \leq s < l$  и уравнение частот (2.1) при  $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$  имеет вид

$$(s^2 - 2)^2 \frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)} - 4\sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}} \sqrt{s^2 - 1} \frac{I_1(\alpha_1)}{I_0(\alpha_1)} = 0$$

Функция отношения обычных Бесселевых функций знакопеременна (см. фиг. 3) и при сколь угодно больших  $\bar{\gamma}$  принимает любые значения, а отношение модифицированных функций Бесселя стремится к единице при  $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$ . Поэтому для всех  $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$  равенство нулю достигается только при  $s = 1$  ( $\Omega = \bar{\gamma}$ ).

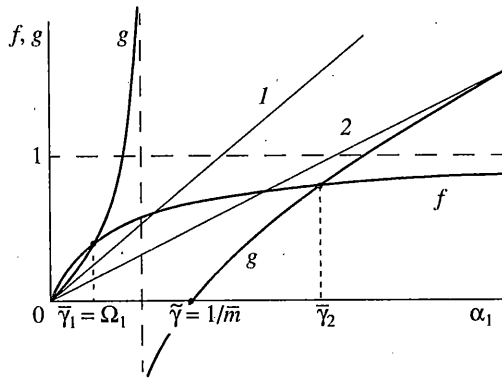
Совершенно особую ситуацию при наличии подкрепления границы имеем в дозвуковом секторе, когда, в отличие от случаев классических граничных условий, в дозвуковом секторе оказываются две спектральные кривые (см. фиг. 6), каждая из которых не имеет асимптотического поведения в коротковолновом пределе. Т.е. при наличии инерционной податливости, какой бы малой она ни была, распространение поверхностных волн Релея невозможно<sup>2</sup>.

Действительно, в этом секторе  $\alpha = i\alpha_1$ ,  $\beta = i$ ,  $\beta_1 = i\bar{\gamma}\sqrt{1-s^2}$ ,  $0 < s < 1$  и (2.1) при  $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$  переходит в равенство  $1 - \sqrt{1-s^2}/l^2 \sqrt{1-s^2} = 0$ , которое не имеет решения ни при каких  $0 < s < 1$ . Для доказательства наличия двух ветвей в области дозвуковых движений рассмотрим точки пересечения спектральных кривых с прямой  $\Omega = \bar{\gamma}$  ( $\beta = 0$ ). Формально  $\beta = 0$  является корнем уравнения частот, которое выводилось при условии  $\beta \neq 0$ . Фактически этот корень является корнем второй кратности для частотного уравнения (2.1), т.е. для определения точек пересечения ветвей с прямой  $\Omega = \bar{\gamma}$  следует найти корни уравнения (2.1), разделенного на  $\beta$ . В приведенном виде это уравнение имеет вид

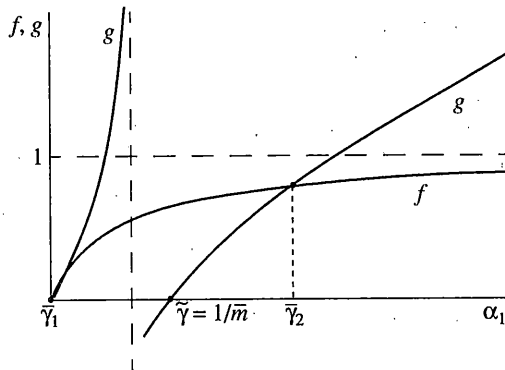
$$\frac{1}{(1-v)} \frac{I_1(\alpha_1)}{I_0(\alpha_1)} = \frac{\alpha_1 [1 - 2(1-v)\bar{m}^2 \alpha_1^2]}{3 - 2\bar{m} - (1-v)\bar{m}(1+2\bar{m})\alpha_1^2}, \quad \alpha_1 = \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{2(1-v)}} \quad (3.5)$$

Для определения количества корней этого уравнения используем параметрический подход на основе графического представления левой и правой частей (3.5), соответственно функций  $f(\alpha_1)$  и  $g(\alpha_1)$ . Графики этих функций в плоскости  $(\alpha_1, f)$  схематически представлены на фиг. 8–10 для различных значений  $\bar{m} < 1/2 + v$ ,  $1/2 + v \leq \bar{m} < 3/2$ ,  $\bar{m} \geq 3/2$ , соответственно (прямые 1, 2 на фиг. 8 соответствуют  $g'(0) = (1-v)/(3-2\bar{m})$  и  $g'(\infty) = 2(1-v)\bar{m}/(1+2\bar{m})$ ). Ясно, что только в первом случае имеются две отличные от нуля точки пересечения  $\bar{\gamma}_1$  и  $\bar{\gamma}_2$ . Эти точки соответствуют пересечению первой и второй спектральной ветви с прямой  $\Omega = \bar{\gamma}$ , после чего с ростом  $\bar{\gamma}$  они выходят в область дозвуковых скоростей (см. фиг. 4, 6). Таким образом, точка  $\bar{\gamma}_1 = \Omega_1$  определяет значение барьерной дозвуковой частоты  $\Omega_1$ , ниже которой

<sup>2</sup> На этот же факт, правда только для первой ветви, обратил внимание и автор работы [12], моделировавший шероховатую поверхность равномерно распределенной поверхностной массой.



Фиг. 8

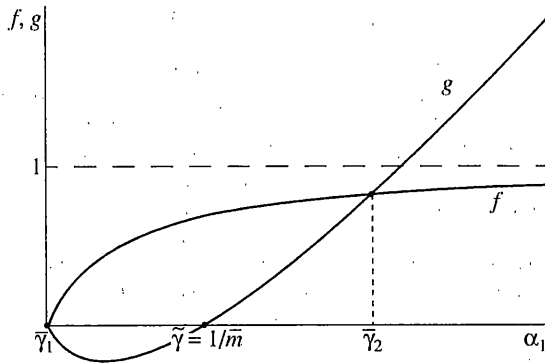


Фиг. 9

дозвуковые движения невозможны. Фиг. 9–10 отражают факт, уже отмеченный ранее в случае длинноволнового приближения, когда при  $\bar{m} > 1/2 + \nu$  наклон первой ветви в начале координат становится меньше единицы и первая ветвь не пересекает уже более прямую  $\Omega = \bar{\gamma}$  (см. фиг. 6) и целиком лежит в секторе  $p < c_2$  (это символизирует приход точки  $\bar{\gamma}_1$  с ростом  $\bar{m}$  в начало координат на фиг. 9). Нетрудно убедиться с помощью фигур 8–10, что увеличение  $\bar{m}$  приводит к сжатию кривых  $g(\alpha_1)$  влево (см., например, точку пересечения с осью абсцисс  $\bar{\gamma} = 1/\bar{m}$ ) и, следовательно, абсциссы точек пересечения  $\bar{\gamma}_1$  и  $\bar{\gamma}_2$  уменьшаются в своих значениях с ростом  $\bar{m}$ .

*Влияние коэффициента Пуассона  $\nu$ .* Используя (3.5), нетрудно показать возрастание значений барьерных скоростей (если их две отличные от нуля и одной из них, когда вторая ноль) с ростом  $\nu$  для данного фиксированного  $\bar{m}$ . Действительно, заменим величину  $\alpha$  в правой части (3.5) ее значением через  $\bar{\gamma}$ :  $\alpha = \bar{\gamma}[2(1-\nu)]^{-1/2}$ . При этом получим справа функцию  $g$ , независящую от  $\nu$ . Методами элементарного анализа показывается возрастание этой функции для всех областей  $\bar{m}$ , в которых функция  $g$  имеет разный вид, при любом положительном  $\bar{\gamma}$ . Поскольку функция  $f$ , стоящая слева в (3.5), есть возрастающая функция  $\nu$  (величина  $f'_\nu > 0$ ), а функция  $g$  не зависит от коэффициента Пуассона и не имеет локальных экстремумов ( $g$  – возрастающая), то становится очевидным повышение значений барьерных скоростей с ростом  $\nu$ .

Наличие инерционного подкрепления границы обуславливает качественно иную картину поведения частотного спектра в области дозвуковых движений: как наличие



Фиг. 10

двух спектральных ветвей в дозвуковом секторе, каждая из которых не имеет рэлееской асимптоты в высокочастотном пределе. Причем рост плотности равномерно распределенной массы  $\bar{m}$  на границе приводит к понижению значений элементарной стержневой скорости и значений минимально возможных барьерных дозвуковых скоростей, ниже которых дозвуковое движение не реализуется, равно как и наоборот рост коэффициента Пуассона  $\nu$  способствует росту значения последних.

Специально случай комплексных корней не исследовался, но на основе всех полученных качественных и количественных результатов можно сказать определенно, что частотный спектр также оказывается чрезвычайно чувствительным к изменению коэффициента Пуассона в окрестности седловых точек, как это отмечалось Миндлиным [4] в классическом случае свободной границы, и с уменьшением значений  $\nu$  наблюдается прогрессирующее увеличение количества локальных экстремумов у спектральных ветвей в области неоднородных колебаний  $\bar{\gamma} = i\eta$  (подобно фиг. 1). Такие точки локальных экстремумов, согласно теореме Оное или свойствам функции одной комплексной ( $\bar{\gamma}$ ) и одной действительной переменной ( $\Omega$ ), служат точками выхода комплексных ветвей на плоскости мнимого или действительного  $\bar{\gamma}$ .

Характерно также, что начинаться в плоскости  $\Omega = 0$  комплексные ветви будут в тех же точках, что и в классическом случае свободной границы.

Учитывая гипотезу Миндлина, об однозначной продолжимости всех ветвей от нулевой до бесконечного значения частоты, можно предположить о наличии особого поведения комплексных ветвей в окрестности точек дополнительного семейства критических частот специфического случая жесткозакрепленной границы при  $\nu = 1/2$ .

**4. Заключение.** Таким образом, на примере влияния равномерно распределенной на границе массы было предложено некоторое обобщение идеализированных классических случаев граничных условий, которое позволяет осуществить в пределе непрерывный переход одного классического решения в другое с изменением значений параметра подкрепления  $\bar{m}$  и понять наличие определенных качественных различий в их решениях (явление запирания частот в случае жесткой границы, например, и наличие рэлееских волн в случае свободной границы). Для промежуточных значений  $\bar{m}$  показано существование специфических ситуаций в характере и структуре решения не присущих предельным случаям классических граничных условий свободной и жесткозакрепленной границы. Это подчеркивает важность учета различных влияний на границе, какими бы малыми они не были, и необходимость модификации идеализированных случаев граничных условий с целью более адекватного описания поведения реально существующих механических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-00779, проект № 01-01-00155).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pochhammer L.* Uber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder // *J. Reine und Angewandte.* 1876. Bd. 81. S. 324–336.
2. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // *Trans. Cambridge Phil. Soc.* V. 14. 1889. P. 250–369.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
4. *Оное, Макнивен, Миндлиг.* Дисперсия осесимметричных волн в упругих стержнях // *Тр. Амер. о-ва инженеров механиков. Прикл. механика.* 1962. № 4. С. 139–145.
5. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волновое распространение в протяженных цилиндрах и пластинках // *Физическая акустика: Принципы и методы.* 1966. Ч. 1. А.С. 140–203.
6. *Miklowitz J.* The Theory of Elastic Waves and Waweguides. Amsterdam: North-Holland, 1978. 618 p.
7. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
8. *Новотный С.В.* Стационарные волны кручения в цилиндре с ограниченно податливой границей // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, Механика.* 1996. № 4. С. 77–85.
9. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation an elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. V. 51. № 1. Pt 2. P. 265–283.
10. *Bancroft D.* The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars // *Phys. Rev.* 1941. V. 59. P. 588–593.
11. *Pao Y.H., Mindlin R.D.* Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder // *Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech.* 1960. V. 27. № 3. P. 513–520.
12. *Sinclair R.* Velocity dissiion of Rayleigh waves propagating along rough surfaces // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1971. V. 50. No. 3. P. 841–845.

Москва

Поступила в редакцию  
22.09.2000