

УДК 539.3

© 2002 г. Г.Н. ЧЕРНЫШЕВ

## **ВЗАИМНОЕ ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ УПРУГОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

При помощи обобщения на упругое пространство явления деформируемости времени из теории гравитационного поля построены уточненные уравнения динамической теории упругости, учитывающие деформацию временной координаты. Получен механический смысл последней, который заключается в динамической деформации расширения – сжатия вещества, аналогичной температурной деформации. Данное обобщение позволило учесть в инерционных членах уравнений равновесия и в уравнении неразрывности силовое взаимодействие частиц, которое не учитывается в классической теории упругости. Правильность новой модели упругого тела подтверждена методом сравнения полученных результатов теоретических решений в рамках полученных уравнений ряда динамических задач с результатами экспериментальных исследований этих задач. Путем обратного обобщения модели упругого пространства на гравитационное пространство известные уравнения гравитационного поля в линейном приближении дополнены обобщенным законом Гука и уравнениями равновесия.

Изложение материала дается в следующем порядке. Методом обобщения в линеаризованной постановке математической модели гравитационного пространства на упругое тело построены динамические уравнения теории упругости в случае, когда временная координата деформируется подобно тому, как это имеет место в теории гравитационного поля. Отличие в данном случае состоит в том, что при выводе уравнений в форме гипотезы в теории упругости не вводится заранее заданная скорость распространения возмущений, равная скорости света или скорости звука или какой-либо другой скорости, которая определяет четырехмерную метрику упругого пространства, потому что, как показано в работе, в этом нет необходимости. Вместо такой скорости вводится произвольная константа, размерность которой равна размерности скорости. Такое действие необходимо для формирования четырехмерной метрики, используемой при определении деформаций упругого пространства. Скорости распространения возмущений, волн в упругом теле определяются модулями упругости и плотностью.

Далее проведено обоснование правильности полученных уравнений при помощи сравнения построенных теоретических решений с результатами экспериментальных исследований. Уверенность в этой правильности логически привела к выполнению обратного обобщения построенной модели упругого тела на гравитационное пространство. Явление деформируемости этого пространства аналогичное явлению деформируемости упругого тела практически признано в теории гравитационного поля введением меняющегося в зависимости от напряженного состояния метрического тензора. Поэтому по аналогии с теорией упругости полуразность возмущенного и невозмущенного метрических тензоров гравитационного пространства названа тензором деформаций.

Признание среды гравитационного пространства деформируемой позволяет обобщить на нее модель упругой среды. В результате известные уравнения гравитационного поля в приближении малых деформаций дополнены новыми уравнениями.

Знаменитые уравнения гравитационного поля, полученные Эйнштейном, имеют вид [1]:

$$R_{jk} = 8\pi kc^{-4}(T_{jk} - \frac{1}{2}g_{jk}T) \quad (1)$$

где  $R_{jk}$  – так называемый тензор Ричи ( $j, k, l, m = 1, 2, 3, 4$ ),  $T_{jk}$  – тензор энергии – импульса,  $T = T_{kk}$ ,  $g_{jk}$  – метрический тензор пространства,  $c$  – скорость света,  $k$  – гравитационная постоянная [1]. В данной работе будем рассматривать слабые гравитационные поля в пространстве и примем, что в нем отсутствует тензор энергии – импульса, определяемый массами, зарядами, и сосредоточим внимание на однородных линейных уравнениях гравитационного поля.

Метрический тензор невозмущенного гравитационного пространства будем обозначать нулевым верхним индексом,  $g_{44}^{\circ} = -1$ ,  $g_{\alpha\alpha}^{\circ} = 1$ ,  $g_{\alpha\beta}^{\circ} = 0$ ,  $\alpha \neq \beta$ ,  $g_{\alpha 4}^{\circ} = 0$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ . Слабо возмущенный тензор  $g_{jk}^*$  можно представить в виде [1]  $g_{jk}^* = g_{jk}^{\circ} + h_{jk}$ . Выражения для  $R_{jk}$  имеют вид:

$$R_{jk} = g_{lm}R_{ljmk} \quad (2)$$

$$R_{jklm} = \frac{1}{2}(h_{jm,kl} + h_{kl,jm} - h_{km,jl} - h_{jl,km})$$

Отметим, что в теории упругости тензор деформаций  $\epsilon_{\alpha\beta}$  определяется как разность метрических тензоров деформированного  $g_{\alpha\beta}^*$  и недеформированного  $g_{\alpha\beta}$  тел. При деформировании тела без разрывов и сдвигов тензор деформаций выражается через перемещения  $u_{\alpha}$  и далее он будет выписан. Уравнения (1) в линейном приближении и при отсутствии тензора энергии – импульса являются в терминологии теории упругости уравнениями совместности деформаций для четырехмерного пространства. Это говорит об определенной схожести теорий упругого и гравитационного полей и инициирует проведение взаимного обобщения математических моделей.

Прежде чем продолжать анализ уравнений гравитационного поля, выполним обобщение классических линейных динамических уравнений теории упругости на случай, как было сказано выше, когда временная координата деформируется аналогично тому, как это имеет место в теории поля.

С целью приведения размерности временного члена в четырехмерной метрике, используемой для определения деформаций четырехмерного упругого пространства, к размерности длины, которую имеют другие члены метрики, временная координата преобразуется путем умножения ее на коэффициент с размерностью скорости, который может быть произвольным аналогично тому, как, например, масштабный коэффициент при пространственных координатах. Введение такого коэффициента не влияет на конечный результат, а сказывается на конкретном значении модулей упругости в законе Гука.

Отметим сразу же здесь, что далее будет получен не фантастический, а вполне реальный физический смысл деформации координаты времени – это динамическая деформация расширения – сжатия вещества, дополнительная к деформации вещества, обусловленной объемной деформацией упругой среды. Замечание сделано с той целью, чтобы можно было воспринимать результаты работы не только как экзотические, но и как имеющие реальное практическое значение.

Правомерность признания явления деформируемости времени в упругой среде основана с одной стороны на том, что оно здесь не придумано, а обобщено на упругое пространство из теории гравитационного поля, где это явление признано. Правильность же новых уравнений обосновывается методом сравнения теории с экспериментом, как главным критерием оценки правильности любой теории. В работе представлен ряд экспериментальных динамических явлений, неточно описываемых классической теорией и даже находящихся в противоречии с ней. В рамках предла-

гаемой теории проведены соответствующие исследования, при помощи которых выявленные несоответствия и противоречия теории и эксперимента устранены, что и служит основой для подтверждения правильности построенных уравнений.

Рассмотрим изотропное упругое тело, задавая положение его точек в декартовых прямоугольных координатах  $x_1, x_2, x_3$ . Выпишем систему динамических уравнений равновесия этого тела в компонентах тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) при отсутствии внешних сил, дополнив ее уравнением неразрывности [2]:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} - \rho_{\alpha,t} = 0, \quad \rho_{\alpha,\alpha} + \rho_{,t} = 0, \quad \rho_{\alpha} = \rho u_{\alpha,t}$$

Здесь  $u_{\alpha}$  – компоненты вектора перемещений,  $\rho_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha}$  – плотности вещества и импульса,  $(\ )_{,\alpha}, (\ )_{,t}$  соответственно производные по  $x_{\alpha}$  и времени  $t$ . Перепишем уравнения, представив временную координату в виде  $x_4 = ivt$ ,  $v$  – произвольный коэффициент с размерностью скорости,  $i = (-1)^{1/2}$ , аналогично, как это имеет место в теории поля [1], где вместо  $v$  стоит скорость света  $c$ . Для получения уравнений нет необходимости использовать только скорость света и это будет далее видно. Обозначая  $v\rho_{\alpha} = i\sigma_{\alpha 4}$ ,  $v^2\rho = \sigma_{44}$ , представим систему уравнений в виде

$$\sigma_{jk,k} = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

Будем рассматривать  $\sigma_{jk}$  как компоненты некоторого тензора напряжений в четырехмерном пространстве  $x_j$ . Соответствующие им компоненты тензора деформаций  $\epsilon_{jk}$  определим через разность метрик деформированного и недеформированного пространств  $2\epsilon_{jk} = g_{jk}^* - g_{jk}^0$ .

Метрика недеформированного пространства задается равенством  $g_{jk}^0 dx_j dx_k = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - v^2 dt^2$ . Введем также компоненты вектора перемещений  $u_j = x_j^* - x_j$  как разности между координатами некоторой точки тела в деформированном ( $x_j^*$ ) и недеформированном ( $x_j$ ) состояниях. При этом особо следует отметить компоненту  $u_4 = ivt^* - ivt = ivt$ , отражающую малое приращение временной координаты за счет разницы между временем какой-либо частицы в деформируемом теле и временем той же частицы в недеформируемом теле.

Элемент  $dx_1^*$  следующим образом формируется при деформировании элемента  $dx_1 = \{dx_1, 0, 0, 0\}$ :

$$dx_1^* = \{(1 + u_{1,1})dx_1, u_{2,1}dx_1, u_{3,1}dx_1, u_{4,1}dx_1\}$$

Аналогичные превращения претерпевают элементы  $dx_i, i > 1$ . Произвольный элемент получается суммированием элементов  $dx_i^*$ . Для квадрата длины этого элемента получаем выражение

$$g_{jk}^* dx_j dx_k = g_{jk} dx_j dx_k + 2u_{\alpha,\beta} dx_{\alpha} dx_{\beta} + 2u_{\alpha,t} dx_{\alpha} dt - 2v^2 \tau_{,\alpha} dx_{\alpha} dt - v^2 \tau_{,t} dt^2$$

Соотношения между компонентами деформаций и перемещениями в четырехмерном пространстве получаются следующими:

$$2\epsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}, \quad 2i\epsilon_{\alpha 4} = v^{-1}u_{\alpha,t} - v\tau_{,\alpha}, \quad \epsilon_{44} = -\tau_{,t} \quad (4)$$

Соотношения между деформациями и напряжениями получим при помощи функции плотности энергий деформации  $W$  четырехмерного пространства. Для линейно-упругого тела в рамках классической теории полная энергия  $W$ , равная сумме энергии упругой деформации и кинетической энергии, определяется по формуле

$$2W = \lambda \vartheta^2 + 2\mu \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + \rho u_{\alpha,t}^2 \quad (5)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  – упругие постоянные Ламе,  $\vartheta = \varepsilon_{\alpha\alpha}$  – объемная деформация. Выписанная энергия содержит компоненты, затраченные на деформацию тела и кинетическую энергию, но не содержит компонент, связанных, как далее будет видно, с динамической деформацией собственно вещества, дополнительной к объемной деформации. Данную часть энергии учтем, вводя в потенциал  $W$  компоненты  $\varepsilon_{j4}, \sigma_{j4}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). Тогда потенциал  $W$  запишется в виде

$$2W = \sigma_{jk}\varepsilon_{jk} = \lambda\vartheta^2 + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \kappa_1\vartheta\varepsilon_{44} + \kappa_2\varepsilon_{44}^2 + \kappa_3\varepsilon_{\alpha 4}\varepsilon_{\alpha 4} \quad (6)$$

В этом виде функция  $W$  является самой общей квадратичной зависимостью от деформаций для пространственно изотропного тела и содержит три произвольные постоянные  $k_j$ .

Постоянная  $\kappa_3$  находится из равенства выражений (5) и (6) с учетом (4) при  $\tau = 0$ :  $\kappa_3 = 2\rho v^2$ . Продифференцируем далее плотность энергии (6) по  $\varepsilon_{ix}$  и выпишем в результате выражения для напряжений

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda\vartheta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\kappa_1\varepsilon_{44}\delta_{\alpha\beta} \quad (7)$$

$$\sigma_{\alpha 4} = \kappa_3\varepsilon_{\alpha 4}, \quad \sigma_{44} = \kappa_1\vartheta/2 + \kappa_2\varepsilon_{44}$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера. Подставляя (7) в уравнения (3), приходим (при  $\tau = 0$ ) к следующим равенствам:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} - \rho u_{\alpha,tt} = 0, \quad \kappa_1\vartheta_{,t} - \kappa_3 u_{\alpha,\alpha t} = 0 \quad (8)$$

Так как по определению  $u_{\alpha,\alpha} = \vartheta$ , то из последнего уравнения (8) следует, что  $\kappa_1 = \kappa_3$ , так как уравнение неразрывности при  $\tau = 0$  должно обращаться в тождество.

Распишем теперь систему (3) в перемещениях с учетом  $\tau$  и найденных значений постоянных  $\kappa_1$  и  $\kappa_3$ :

$$\mu\Delta u_{\alpha} + (\lambda + \mu)\vartheta_{,\alpha} - \rho u_{\alpha,tt} = 0, \quad \kappa_3 v^2 \Delta \tau - 2\kappa_2 \tau_{,tt} = 0 \quad (9)$$

( $\Delta$  – оператор Лапласа). Первые три уравнения (9) известные – это классические динамические уравнения теории упругости. Для временной составляющей  $\tau$  получилось отдельное уравнение, из вида которого заключаем, что для упругого тела  $\kappa_2 = \rho v^4 c_1^{-2}$ ,  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}$  и тогда скорость распространения волн, в которых, как далее будет показано, имеет место динамическая деформация расширения вещества, равна скорости продольных волн  $c_1$ , в которых имеет место деформация объема, а с ней также деформация расширения вещества. Следует однако отметить, что скорость распространения волн, определяемых функцией  $\tau$ , может быть и иной, она должна определяться экспериментально.

Постоянную  $v$ , участвующую в преобразовании временной координаты, как видим, можно задавать произвольной и это не влияет на вид полученных уравнений. Скорости распространения волн в упругом пространстве не задаются, а определяются полученными уравнениями. Как видим, эти скорости сохраняются такими же, как в классической теории упругости.

Зададим для конкретности постоянную  $v$  равной максимальной скорости распространения волн  $c_1$ . Определив тогда постоянные  $k_j$ , можно выписать обобщенную линейную систему уравнений теории упругости:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} - c_1^{-1}\sigma_{\alpha,t,t} = 0, \quad \sigma_{\alpha t,\alpha} + c_1^{-1}\sigma_{tt,t} = 0, \quad \sigma_{tt} = \sigma_{44} \quad (10)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda\vartheta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{tt}\delta_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha t} = 2(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\alpha t}$$

$$\sigma_{tt} = (\lambda + 2\mu)(\vartheta + \varepsilon_{tt}), \quad \sigma_{\alpha 4} = i\sigma_{\alpha t}, \quad \varepsilon_{\alpha 4} = i\varepsilon_{\alpha t}, \quad \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{44}$$

К этим уравнениям следует также добавить геометрические соотношения (4). В перемещениях система уравнений (10) примет вид

$$\mu \Delta u_{\alpha} + (\lambda + \mu) \vartheta_{,\alpha} - (\lambda + 2\mu) c_1^{-2} u_{\alpha, \alpha} = 0 \quad (11)$$

$$\Delta \tau - c_1^{-2} \tau_{, \alpha \alpha} = 0$$

Получившиеся уравнения отличаются от классических уравнений теории упругости дополнительным уравнением относительно  $\tau$ ; однако следует отметить, что существенно изменился закон Гука и выражение для энергии.

Возникает вопрос о физическом, реальном содержании новой компоненты "перемещения" времени  $\tau$ . Если проследить, как входит эта величина в уравнения равновесия, в закон Гука, то выясняется, что временная деформация  $\tau$ , описывает часть динамической "деформации" вещества тела, т.е. динамическую деформацию расширения (под этим словом будем понимать и сжатие) самого вещества. Эта часть деформации вещества является дополнительной к деформации вещества, определяемой объемной деформацией  $\theta$  и она похожа в некотором отношении на температурную деформацию, аналогично входит в соотношения закона Гука, но на этом сходство заканчивается. В отличие от той вхождение временной деформации в уравнения определяется не коэффициентом линейного расширения, а параметрами закона Гука. Таким образом, проявился вполне нормальный и реальный физический смысл компоненты  $\epsilon_{\alpha\alpha}$ .

Если проследить, как входит временная компонента в инерционные члены уравнений равновесия, то увидим, что там появились слагаемые с  $\tau_{,\alpha}$ . Учитывая выше полученный физический смысл временной деформации  $\tau$ , приходим к заключению, что дополнительные слагаемые в силах инерции вызваны перетоком плотности вещества по пространственным координатам в процессе динамического расширения вещества. Таким образом, дополнительные слагаемые находятся в соответствии с классическими силами инерции, представляющими собой произведение плотности вещества недеформированного тела на ускорения. Силовое взаимодействие частиц тела при динамическом деформировании приводит к появлению в силах инерции слагаемых, определяемых потоком плотности вещества, каковых нет в классической теории.

Аналогичный процесс имеет место в уравнении неразрывности, которое переходит в четвертое уравнение равновесия, появляются дополнительные члены, связанные с динамической деформацией вещества и каковых нет в классической теории. В результате уравнение неразрывности стало действующим в линейном приближении, чего не было в классической теории упругости, где оно тождественно обращалось в нуль.

В качестве примера рассмотрим задачу о плоских ( $\epsilon_{33} = 0$ ) поверхностных волнах Рэлея в полупространстве  $x_2 > 0$ . В этом случае начальные условия не ставятся, а в качестве граничных условий принимается отсутствие напряжений и отсутствие потока энергии [1] через границу на плоскости  $x_2 = 0$ . Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{\alpha 4}$  по аналогии с определением тензора энергии – импульса являются компонентами плотности потока энергии и в результате граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{24} = 0 \quad (12)$$

Как и в случае аналогичной задачи классической теории упругости, решение динамических уравнений (11) удобнее получать вначале относительно скалярного ( $\phi$ ) и векторного ( $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ ) потенциалов, связанных с вектором перемещений  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  формулой [3]:

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi + \text{rot} \Psi \quad (13)$$

В результате система (11) перепишется в виде трех волновых уравнений:

$$\Delta\varphi - c_1^{-2}\varphi_{,tt} = 0, \quad \Delta\Psi - c_2^{-2}\Psi_{,tt} = 0, \quad \Delta\tau - c_1^{-2}\tau_{,tt} = 0 \quad (14)$$

Решение системы (14) ищем в виде

$$\varphi = A \exp[-\alpha x_2 + iq(x_1 - c_3 t)], \quad \alpha > 0 \quad (15)$$

$$\Psi_3 = B \exp[-\beta x_2 + iq(x_1 - c_3 t)], \quad \Psi_1 = \Psi_2 = 0, \quad \beta > 0$$

$$\tau = D \exp[-\gamma x_2 + iq(x_1 - c_3 t)], \quad \gamma > 0$$

Постоянные  $A, B, D, \alpha, \beta, \gamma, q, c_3$  должны быть подобраны так, чтобы выражения (15) удовлетворяли как уравнениям (14), так и граничным условиям (12). Подстановка (15) в (14) приводит к соотношениям

$$\alpha = q(1 - \chi k)^{1/2}, \quad \beta = q(1 - k)^{1/2} \quad (16)$$

$$\gamma = \alpha, \quad k = c_3^2 / c_2^2, \quad \chi = c_2^2 / c_1^2$$

Пользуясь формулой (13) связи перемещений с потенциалами, кинематическими уравнениями (4) и законом Гука (10), удовлетворяем выражениями (15) граничные условия (12). В результате приходим к однородной системе трех алгебраических уравнений:

$$(2 - k)X_1 + 2i(1 - k)^{1/2} X_2 + iX_3 = 0, \quad X_1 = q\chi A$$

$$2i(1 - \chi k)^{1/2} X_1 - (2 - k)X_2 = 0, \quad X_2 = q\chi B \quad (17)$$

$$ik(1 - \chi k)^{1/2} X_1 - kX_2 + (1 - \chi k)^{1/2} X_3 = 0, \quad X_3 = c_3 D$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получим уравнение относительно фазовой скорости поверхностной волны  $(2 - k)^2 - 4(1 - \chi k)^{1/2}(1 - k)^{1/2} = k^2$ .

Видно, что оно отличается не нулевой правой частью от классического уравнения для скорости поверхностных волн. Это уравнение преобразуется к виду

$$4(1 - k)^{1/2}[(1 - k)^{1/2} - (1 - \chi k)^{1/2}] = 0 \quad (18)$$

Корнями этого уравнения (18) являются значения  $k = 1$  и  $k = 0$ . Первый корень приводит к значению  $c_3 = c_2$  и это означает, что скорость поверхностных волн равна скорости поперечных волн и она больше, чем это имеет место в классической теории, которая определяет скорость поверхностной волны в пределах 0.874–0.955 от скорости поперечной волны в зависимости от материала среды.

Для компонент вектора перемещений получим следующие выражения

$$u_1 = iqA \exp[-\alpha_2 x_2 + iq(x_1 - c_2 t)], \quad \alpha_2 = q(1 - \chi)^{1/2}$$

$$u_2 = q(1 - \chi)^{1/2} A [2 - \exp(-\alpha_2 x_2)] \exp[iq(x_1 - c_2 t)]$$

$$\tau = -iq\chi c_2^{-1} A \exp[-\alpha_2 x_2 + iq(x_1 - c_2 t)]$$

Отсюда видно, что в рамках предложенной модели не существует чисто поверхностной волны. В приповерхностном слое вдоль границы полупространства со скоростью сдвиговой волны бежит составная волна, включающая в себя как затухающую, так и незатухающую по глубине компоненты. Начиная с некоторой глубины, она переходит в плоскую поперечную волну с единственной отличной от нуля компонентой перемещения  $u_2$ . Второй корень означает статический случай.

В научной литературе имеется много работ по экспериментальному исследованию волновых процессов в пластинах из фоточувствительных материалов, выполненных

методами фотоупругости. Одним из достоинств этого метода является то, что результаты измерения представлены в виде фотографий, а это в сущности фотодокументы, которые при чтении данной работы можно изучать самостоятельно и делать свои выводы и заключения. Для проведения сравнений теоретических результатов с этими исследованиями надо получить соответствующие решения, а для этого надо построить четырехмерные динамические уравнения обобщенного напряженного состояния для пластины.

Пусть срединная поверхность полосы толщиной  $2h$  совпадает с плоскостью  $x_3 = 0$ , а ее грани  $x_3 = \pm h$  свободны от напряжений, на них  $\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$ . На этих гранях отсутствует отток и приток энергии и тогда  $\sigma_{3i} = 0$ . Толщина полосы считается малой и поэтому все указанные напряжения можно считать малыми внутри области по сравнению с другими напряжениями и ими можно пренебречь.

Закон Гука после соответствующих преобразований примет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\theta' + 2\mu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{rr}), & \sigma_{22} &= 2\mu\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\theta' + 2\mu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{rr} &= 2\mu\theta', & \theta' &= u_{1,1} + u_{2,2}, & \varepsilon_{33} &= -\lambda(\lambda + 2\mu)\theta' - \varepsilon_{rr}.\end{aligned}$$

Остальные компоненты напряжений  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{1r}$ ,  $\sigma_{2r}$  определяются прежними формулами. В перемещениях уравнения равновесия имеют вид:  $\Delta\theta' - c_1^{-2}\theta'_{,rr} = 0$ ,  $\Delta\omega - c_2^{-2}\omega_{,rr}$ ,  $\Delta\tau = \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}c_1^{-2}\theta'_{,r}$ ,  $\omega = u_{1,2} - u_{2,1}$ ,  $\theta' = u_{1,1} + u_{2,2}$ .

Рассмотрим теперь задачу о распространении поверхностных, вернее пограничных волн в полубесконечной полосе  $x_2 \geq 0$ . Граница  $x_2 = 0$  свободна от напряжений и на ней должны выполняться условия  $\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{2r} = 0$ . Опуская выкладки, приводим решение задачи, которое может существовать только при  $c_3 = c_1$ , при других значениях  $c_3$  решение отсутствует:

$$\varphi = A \exp iq(x_1 - c_1 t), \quad \sigma_{11} = 2\mu\varphi_{,11}, \quad \sigma_{1r} = 2\mu c_1^{-1}\varphi_{,1r}$$

Остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Это решение означает, что в полуполосе существуют плоские продольные волны с плоским фронтом, перпендикулярным к границе, каковых нет по классической теории. Нет в полуполосе, согласно полученного решения, чисто поверхностных волн.

Учитывая, что ширина полосы может быть произвольной, получается, что решение справедливо и для стержня прямоугольного сечения. Отсюда следует, что продольная волна в рамках предлагаемой модели упругого тела распространяется в стержне также со скоростью  $c_1$ .

В настоящее время имеется обширный экспериментальный материал по исследованию продольных, поперечных и поверхностных волн в упругих телах, причем точность измерения высокая, порядка долей процента.

В радиоэлектронике и электротехнике много работ посвящено экспериментальному изучению поверхностных волн (см. обзоры [4-6]), выполнены точные измерения скоростей этих волн [7], дано сравнение с теоретическими данными классической теории и отмечено казалось бы совпадение.

Совпадение с результатами классической теории в данном случае на первый взгляд опровергает предлагаемую модель. Однако при изучении работ с экспериментальными данными пришлось убедиться, что в работах, когда в экспериментах обеспечивалась высокая точность измерений, изучались, как правило, одни волны, например, измерялись скорости поверхностных волн и при этом ничего не говорилось об измерении скоростей поперечных волн (по-видимому, они не измерялись, а брались из других работ).

Сравнением данных, взятых из разных источников, можно подтвердить правильность изложенных в предлагаемой работе результатов. В качестве примера укажем на работы [7-9]. В работе [7] приведена скорость поверхностных волн в плавленом квар-

це (3.42 км/с), но не приведена скорость поперечных волн. По-видимому, считалось, что она равна 3.76 км/с согласно [8]. В работе [9] приведена скорость поперечных волн в плавленом кварце – 3.4 км/с, а скорость поверхностных волн не приведена. Если сравнить с выше указанной скоростью поверхностных волн, то можно сказать, что скорости поперечных и поверхностных волн совпадают и тогда это подтверждает правильность выводов предлагаемой работы.

Много экспериментов по изучению распространения волн в твердых телах ставилось и ставится в связи с моделированием сейсмических волн. Например, в работе [10] приведены экспериментальные данные по распространению волн по ребру латунного листа с размерами  $1.5 \times 605 \times 1447$  мм от сосредоточенного импульсного воздействия на середину длинного ребра. Отмечено, и это демонстрируют приведенные сейсмограммы, что поперечных волн обнаружить в эксперименте не удалось, хотя продольные и поверхностные волны видны отчетливо. В работе предположено, что они не проявились. В свете изложенного можно сделать другое заключение, а именно: скорость поперечных волн совпала со скоростью поверхностных волн.

Рассмотрим более подробно работу [11]. В этой работе приведены результаты исследований методом фотоупругости задачи о распространении волн в полубесконечной пластине из калумбийской смолы CR-39 размером  $(3/8) \times 20 \times 36$  дюйм<sup>3</sup> (1 дюйм = 0.0254 м) от сосредоточенного взрыва на границе. Приведены фотографии изоклин – линий постоянных разностей главных напряжений в различные моменты времени после взрыва. Три из этих фотографий, соответствующие временам 107 мкс, 190 мкс, 290 мкс, воспроизведены без каких-либо изменений в данной работе на фиг. 1. На них хорошо видны все типы волн: продольная, обозначенная символом  $P$ , сдвиговая отраженная ( $PS$ ), чисто сдвиговая ( $S$ ) и поверхностная ( $R$ ). Видно также, что поверхностная волна состоит из пограничной "шапки" и компоненты, не затухающей по нормали к границе – это прослеживается на фотографиях и об этом говорится в работе в качестве выводов. В ней также отмечается, что процесс динамического деформирования достаточно быстро по времени от момента взрыва становится упругим. В этой работе отмечено достаточно много несоответствий и противоречий теоретических в рамках классической теории упругости и экспериментальных результатов, о чем далее и пойдет речь.

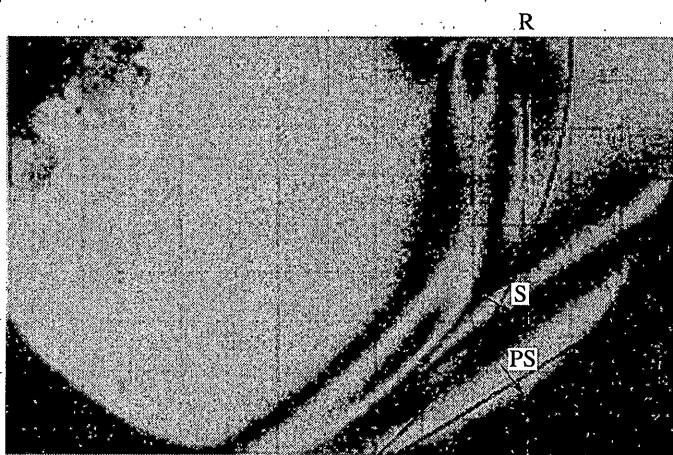
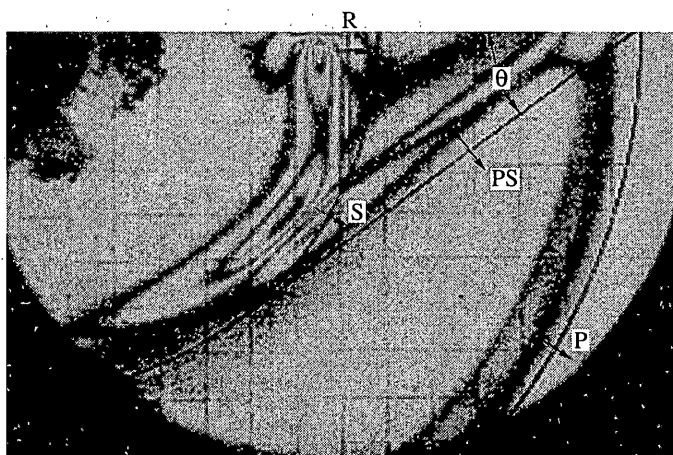
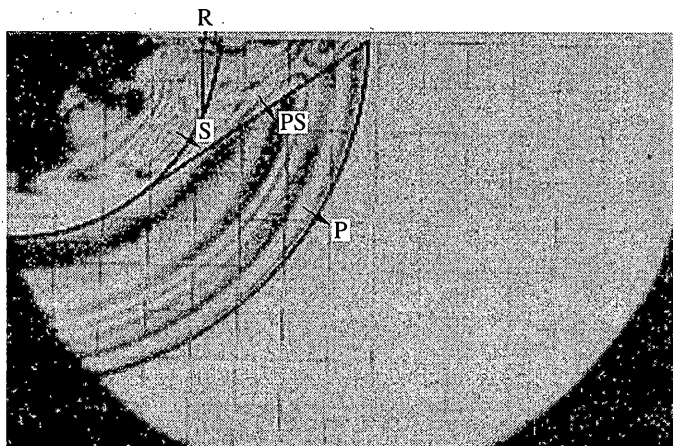
Одним из выводов, сделанных авторами работы [11] является следующий. Перед поверхностной волной, согласно теоретическому решению классической теории упругости, должна наблюдаться опережающая поперечная волна. В эксперименте такая волна не обнаружена и это особо подчеркнуто, хотя точность эксперимента позволяла с запасом ее обнаружить и это отмечено в цитируемой работе.

Здесь приведены графики нормального напряжения на границе, фиг. 2, также заимствованные из работы [11], один из них теоретический – представлен штриховой линией, другой экспериментальный – представлен сплошной линией, передние волны описывают продольную волну, задние – поперечную. По оси  $x$  отложены расстояния от точки взрыва в дюймах, по другой оси – напряжения в фунтах на квадратный дюйм.

Представленные графики демонстрируют факт отсутствия сдвиговой волны перед поверхностной волной в экспериментальном решении и наличие ее в теоретическом решении. Это подтверждает результат предлагаемой работы о том, что опережающей поперечной волны не должно быть, потому что так называемая поверхностная волн является поперечной волной. Этот результат также подтверждается и выводом о форме поверхностной волны: в ней присутствует компонента, не убывающая по нормали к границе, а это может иметь место только тогда, когда скорость рассматриваемой волны совпадает со скоростью поперечных волн. Чисто поверхностной волны не наблюдается в эксперименте и этот факт отмечен в цитируемой работе, но объяснение ему не дано.

Отметим здесь, что анализ по фотографиям картин волновых фронтов с целью получения конкретных значений скоростей различных волн с целью их сравнения является достаточно сложным делом, а точность при этом недостаточная. Однако



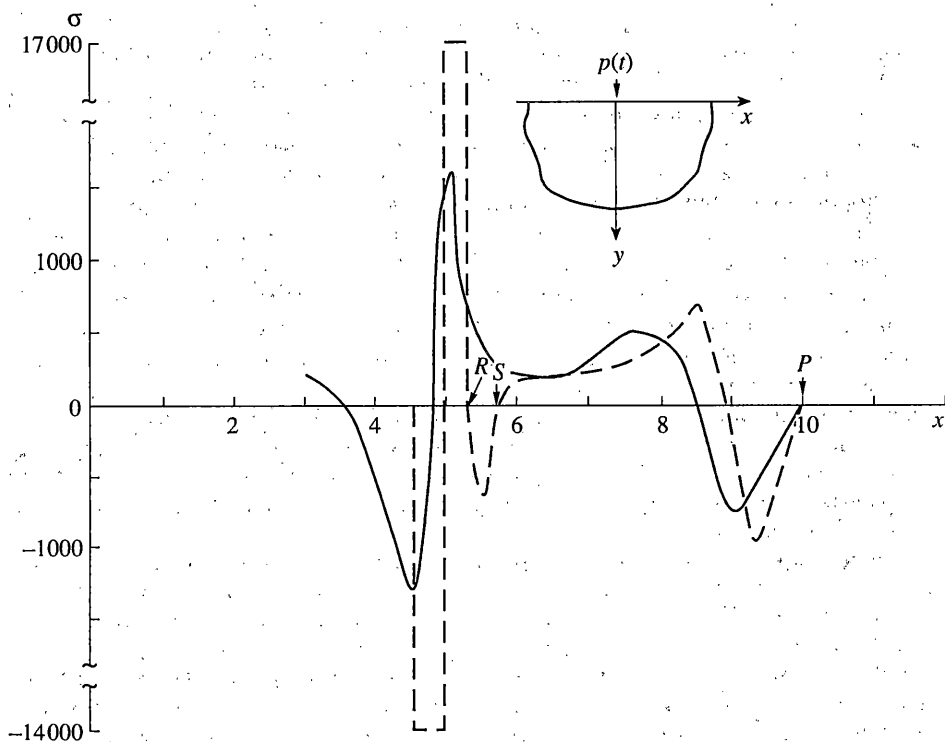


Фиг. 1

проведение сравнения этих скоростей без знания их величин – задача более простая, а результаты сравнения легко контролируются. Решением этой задачи и займемся.

Проведенные авторами работы [11] прямые  $R$  – огибающие фронта поверхностной волны рассчитаны по теоретическому решению классической теории упругости. Как видно из фотографий, эти огибающие явно расположены позади передового поверхностного деформационного вала, т.е. нарисованные  $R$  – фронты расположены позади реального фронта поверхностной динамической волны. Приведенные там же круговые-огибающие  $S$  – фронта поперечной волны хорошо представляют фронт поверхностной волны. Этот фронт располагается вплотную к передовому динамическому гребню поверхностной волны точно так же, как на фотографиях располагаются фронты продольной и поперечной волн. С течением времени  $S$  – фронт не удаляется от передового гребня поверхностной волны, как должно было бы быть, если бы скорости волн различались. За 290 мсек наблюдения отставание поверхностной волны от поперечной проявилось бы весьма наглядно, чего не наблюдается на фотографиях. Это еще раз подтверждает вывод о том, что поверхностной волны нет, а есть поперечная волна.

Следующий факт, указывающий на противоречие эксперимента и классической теории упругости, заключается в том, что величина максимальных теоретических значений напряжений в поверхностной волне на порядок превышает экспериментальную и это видно из фиг. 2. Такое расхождение в работе [11] отмечено, но серьезно не объяснено. Оно основано на том, что значение скорости рэлеевской волны в рамках классической теории обращает в нуль уравнение для этой скорости как  $x$  в первой степени, это соответствующим образом сказывается на теоретическом решении [11, 12] и обуславливает большой пик напряжений в рэлеевской волне. Этого не будет, если ре-



Фиг. 2

шение строить в рамках полученных уравнений, потому что значение скорости поверхностных волн совсем не обращает в нуль соответствующее уравнение, а это и приводит к тому, что напряжения в поверхностной волне ведут себя нормальным образом, существенно не превышая максимальные напряжения в продольной волне. Выполненный анализ подтверждает правильность предлагаемой модели упругого тела. Предложенная аналогия уравнений гравитационного и упругого полей позволяет выявить возможности моделирования некоторых гравитационных явлений на упругих средах. Например, выше продемонстрировано экспериментальное подтверждение явления деформируемости времени на модельных задачах. Эффективное экспериментальное подтверждение этого явления в гравитационном пространстве пока что остается мечтой исследователей.

Вернемся к рассмотрению гравитационных уравнений. Аналогия метрических тензоров в теории упругости и теории гравитационного поля вполне естественна и из нее вытекает, что в гравитационном пространстве можно ввести тензор деформаций так же, как в теории упругости и выражения для компонент деформаций точно такие же, как они выписаны выше. Для точек гравитационного пространства по аналогии с упругим телом можно ввести понятие перемещений и это не является фантастическим действием. Имеются экспериментальные исследования свидетельствующие о том, что оно – пространство практически покоится или движется со скоростью не более 1.6 м/сек, как показали измерения [13] (большую точность измерения, как отмечено в этой работе, пока достичь просто не удалось). Такую скорость по сравнению со скоростями движения планет, звезд, тел можно считать нулевой. Возмущения пространства, вызванные прохождением световых, гравитационных волн приводят к малым перемещениям точек пространства так же, как это имеет место в упругих телах. Поэтому для изучения волновых процессов, когда тензор энергии – импульса полагается равным нулю и, следовательно, равна нулю кривизна пространства, понятие перемещений точек пространства можно вводить.

В случае, когда тензор энергии – импульса равен нулю, выражения деформации – перемещения удовлетворяют уравнениям гравитации (1) при произвольных функциях  $u_j$ . Это известный факт в теории поля, только эти функции названы не перемещениями, а произвольными функциями. Если эти функции не подчинить определенным условиям, то можно, решая эти уравнения, получить странный результат, а именно: в пространстве могут существовать волны, распространяющиеся с произвольной скоростью. Действительно, если взять  $u_j = \sin(x_k - bt)$ , то эти функции после подстановки их в выражения для деформаций и последних в уравнения (1) удовлетворяют их при произвольных значениях  $b$ , в том числе близких к бесконечности. Чтобы этого не было, функции  $u_j$  подчиняют следующим условиям, сопровождая это действие словами "без ограничения общности" [14]:  $\Delta u_j - c^{-2}u_{j,tt} = 0$ , где  $c$  – скорость света. Как видим, эти условия резко ограничивают класс решений. Поэтому введение таких ограничений нужно серьезно обосновывать.

Существование произвола при решении уравнений (1) объясняется тем, что эта система является математически неполной. Проведение аналогии преследует цель обосновать введение дополнительных уравнений, которые делают систему уравнений теории гравитационного поля полной и устраняют произвол в решении, потому что в теории упругости произвола нет.

В гравитационном пространстве передаются силовые воздействия масс друг на друга, электромагнитные и механические воздействия и т.д., что свидетельствует о наличии в нем напряженных состояний. В этом пространстве существует и тензор энергии – импульса, входящий в правую часть уравнения (1) и формирующий напряженно-деформированное состояние. Сказанное позволяет заключить, что для описания напряженных состояний в гравитационном пространстве можно ввести тензор напряжений, как это имеет место в упругом теле. Этот тензор должен удовлетворять уравнениям равновесия (3), что нетрудно показать при помощи вариационного принципа. Отметим, что этот тензор напряжений не является тензором энергии – импульса.

са  $T_{jk}$ . Последний определяет отличный от нуля тензор кривизны пространства, а введенный тензор  $\sigma_{jk}$  имеет место в пространстве, в котором тензор кривизны может быть равен нулю.

Тензор напряжений должен быть связан с тензором деформаций, так как напряжения возникают при возникновении деформаций. Гравитационное пространство считается изотропным [1], поэтому общая связь этих тензоров согласно исследованиям в теории упругости дается обобщенным законом Гука (10). Сразу же оговоримся, что хотя здесь последовательно проводится аналогия гравитационного пространства с упругим телом, модель пространства не является твердым телом и об этом далее будет сказано. Были попытки моделировать пространство упругим твердым телом [15], но от этого отказались.

Для дальнейшего анализа понадобятся константы, входящие в закон Гука для изотропного тела. Дополнительно с константами Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  вводятся модули Юнга  $E$  и сдвига  $G$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и модуль объемного сжатия  $K$ . Связь между этими параметрами имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2G\nu(1-2\nu)^{-1} = K - 2G/3 = E\nu(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}, \quad \mu = G \\ G &= \lambda(1-2\nu)(2\nu)^{-1} = \frac{1}{2}E(1+\nu)^{-1} = \frac{3}{2}K(1+\nu)^{-1}(1-2\nu) \\ E &= \lambda(1+\nu)(1-2\nu)\nu^{-1} = 3K(1-2\nu) \\ K &= \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{1}{3}\lambda(1+\nu)\nu^{-1}, \quad 1-2\nu = G(\lambda+G)^{-1} \\ \nu &= \frac{1}{2}\lambda(\lambda+G)^{-1} = \lambda(3K-\lambda)^{-1} \\ c_1^2 &= (\lambda+2\mu)/\rho, \quad c_2^2 = \mu/\rho \end{aligned} \tag{19}$$

Модуль объемного сжатия связывает величины  $\sigma$  и  $\theta$ ,  $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ ,  $\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ ,  $\sigma = K\theta$ . Признавая проводимую аналогию правомерной, приходим к тому, что полученные выше уравнения для упругого тела справедливы и для гравитационного пространства при условии правильного задания констант  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ . Для определения этих констант имеется пока один параметр – скорость света  $c$ . Учитывая, что волны в гравитационном пространстве носят поперечный характер, можно признать, что они аналогичны поперечным волнам упругого тела. В таком случае скорость света определяет отношение  $\mu/\rho = c^2$ .

В теории упругости установлено, что для твердого тела коэффициент Пуассона может изменяться в пределах  $1/2 > \nu > 0$ . При  $\nu = 1/2$  упругое тело становится жидкостью [12], модуль сдвига  $\mu$  обращается в нуль, а вместе с ним в нуль обращается скорость поперечных волн. Это значение коэффициента Пуассона трактуется и иначе: модуль сдвига в нуль не обращается, сохраняются поперечные волны, но тогда в бесконечность обращаются модуль объемного сжатия  $K$ , параметр  $\lambda$  и вместе с ними скорость продольных волн.

В случае, когда коэффициент Пуассона меняется в пределах  $0 > \nu > -1$ , упругая среда не является твердым телом в обычном понимании: при растяжении стержня, например, он не сжимается в поперечном направлении, а расширяется. Но в этом случае модуль объемного сжатия  $K$  сохраняет положительное значение (он становится равным нулю при  $\nu = -1$  и отрицательным при  $\nu < -1$ ) и при всестороннем сжатии материал сжимается.

Случай  $\nu = -1$  является особым и по следующей причине: модуль объемного сжатия обращается в нуль  $K = 0$  и это означает, что материал не сопротивляется всестороннему сжатию и растяжению. Диапазон изменения коэффициента Пуассона  $\infty > \nu > 1/2$  соответствует: 1 – средам, в которых модуль сдвига  $G$  отрицательный и в них отсутствуют поперечные волны, а при  $\nu > 1$  отсутствуют и продольные волны; 2 – средам, в которых модуль сдвига  $G$  положительный, а модуль  $\lambda$  отрицательный.

Проведенный анализ показывает, что закон Гука справедлив не только для твердых тел, но и для других сред, не являющихся твердыми телами. Спрашивается, с каким значением коэффициента Пуассона среда может моделировать гравитационное пространство? Если бы была измерена скорость гравитационных волн, ответ был бы известен. Однако эта скорость практически не измерена, хотя такие измерения проводились [15], но четкого результата получить не удалось.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как конкретно описывают полученные уравнения некоторые гравитационные и электромагнитные явления. Возьмем статический случай и рассмотрим вопрос о притяжении масс. Силовое поле, создаваемое точечной массой, описывается классическим уравнением для потенциала гравитационного поля, следующего из системы уравнений (11), когда отличной от нуля является только одна функция  $\tau$ :  $\Delta\tau = \chi\delta$ . Здесь  $\delta$  – функция Дирака,  $\chi$  – коэффициент, характеризующий величину массы. Остальные функции  $u_\alpha$  равны нулю. Решение выпписанного уравнения имеет вид  $\tau = \chi(4\pi r)^{-1}$ . Эта функция определяет только одну компоненту тензора напряжений  $\sigma_{rr}$ , остальные компоненты равны нулю  $\sigma_{rr} = \chi(\lambda + 2\mu)(2\pi r)^{-2}$ .

Для определения силы притяжения двух масс, определяемых константами  $\chi_1, \chi_2$ , надо записать плотность энергии, интегрированием по пространству найти общую энергию  $A$  и продифференцировать ее по расстоянию между массами. Часть энергии, зависящую от расстояния  $r_{12}$  между массами и определяющую силу притяжения масс, можно получить по формуле

$$A = \iint \sigma'_{rr} \tau'' ds_1 + \iint \sigma''_{rr} \tau' ds_2$$

Интегралы берутся по сферам  $S_1, S_2$  бесконечно малого радиуса около сосредоточенных масс, одним штрихом отмечены напряжение и время, определяемые массой  $\chi_1$ , двумя штрихами – массой  $\chi_2$ . После вычисления энергии  $A$  и взятия производной от нее по  $r_{12}$  для силы притяжения  $F$  получим выражение

$$F = \chi_1 \chi_2 (\lambda + 2\mu) (2\pi r_{12}^2)^{-1}$$

Это классический закон притяжения масс. Закон притяжения электрических зарядов аналогичен закону притяжения масс. Особый интерес в связи с моделированием электромагнитных явлений представляют значения модулей упругости, удовлетворяющих равенству  $\lambda + 2\mu = \epsilon$ , причем величина  $\epsilon$  столь мала, что в первом приближении ее можно положить равной нулю. Объяснение этому заключается в следующем.

Электрические заряды создают вокруг себя центрально-симметричное силовое поле, определяемое потенциалом, аналогичным потенциалу гравитационного поля. Поиск такого потенциала путем анализа центрально-симметричных решений построенных уравнений, которые давали бы искомый потенциал и закон взаимодействия электрических зарядов, аналогичный закону притяжения масс, привел к тому, что таких решений уравнения не имеют, кроме одного, построенного выше для сосредоточенной массы. И только в особом случае, когда  $\lambda + 2\mu = 0$  искомое решение существует.

Рассматриваем опять статический случай. Уравнение для центрально-симметричного поля в напряжениях имеет вид:

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\phi) = 0, \quad \epsilon_r = u_{r,r}, \quad \epsilon_\theta = \epsilon_\phi = r^{-1}u_r$$

Уравнение записано в сферической системе координат:  $r$  – радиус,  $\theta$  – угол, отсчитываемый от северного полюса,  $\phi$  – долгота. Только в случае  $\lambda + 2\mu = 0$  выпписанное уравнение имеет решение  $u_r = C(4\pi r)^{-1}$ . При указанных значениях параметров Ламэ  $\sigma_r = -\pi^{-1}\mu C r^{-2}$ ,  $\sigma_\theta = \sigma_\phi = 0$  и остальные компоненты напряжений равны нулю. Сила взаимодействия зарядов  $F$  в данном случае определяется по той же схеме, что и

притяжение масс, только при проведении выкладок надо заменить  $\tau$  на  $u_i$ ,  $\sigma_{ij}$  на  $\sigma_j$ :  
$$F = C_1 C_2 \mu (2\pi \kappa_1^2)^{-1}.$$

Отметим, что при  $\lambda = -2\mu$  нельзя брать постоянную  $\nu$  равной  $c_1$ , потому что она обращается в нуль. Ее можно взять равной скорости поперечных волн и тогда выше приведенная сила притяжения масс станет нормальной, а не равной нулю.

Значения моделей упругости, удовлетворяющих равенству  $\lambda + 2\mu = 0$ ; интересны также тем, что уравнения равновесия (3) в перемещениях в этом случае имеют тот же вид, что и уравнения электромагнитного поля [1]:

$$F_{jk,k} = 0, \quad F_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} - u_{\beta,\alpha}, \quad F_{\alpha,t} = -c^{-1} u_{\alpha,t} + c \tau_{,\alpha}, \quad x_4 = ct.$$

В отличие от классических уравнений электромагнитного поля здесь компонента  $F_{44}$  не равна нулю, она определяется гравитационным потенциалом  $\tau$ . Если рассматривать только электромагнитное поле, то этот потенциал  $\tau$  равен нулю и тогда  $F_{44}$  равна нулю и выписанные выше уравнения совпадают с классическими. Следует отметить, что уравнения электродинамики следуют из уравнений упругой среды и при других значениях модулей упругости, но тогда не существует решения, моделирующего взаимодействие электрических зарядов и описанного выше.

Рассматриваемые значения модулей  $\lambda$ ,  $\mu$  определяют значение скорости продольных волн в пространстве равной нулю или, точнее, очень малой. Если, как в теории упругости, считать скорость волн, определяемых потенциалом  $\tau$ , равной скорости продольных волн в пространстве, то получится, что скорость гравитационных волн очень мала. Это противоречит общепризнанному представлению о значении этой скорости, как равной скорости света. С другой стороны в рассматриваемой модели пространства эту скорость можно задавать не равной скорости продольных волн в пространстве, а брать ее другой, а какой конкретно, то это зависит от экспериментального значения ее. К сожалению, как было сказано, пока не удалось экспериментально определить скорость гравитационных волн.

Таким образом, последняя из рассмотренных упругая модель гравитационного пространства одновременно описывает и электромагнитные, и гравитационные поля. Можно изучать некоторые механические свойства этого пространства, ставить и решать определенные прикладные задачи. Среда, модули упругости которой связаны равенством  $\lambda = -2\mu$ , не является ни твердым телом, ни жидкостью, ни газом – это особая среда.

Когда тензор энергии-импульса отличен от нуля, понятие перемещений отсутствует. Уравнения гравитационного поля в этом случае состоят из уравнений (1) с отличным от нуля тензором энергии – импульса и выше построенных уравнений равновесия и закона Гука, с параметрами, которые пока не все известны. Нет в этом случае соотношений деформации – перемещения.

В заключение имеет смысл ответить на вопрос, который, по-видимому, будет постоянно возникать при чтении данной статьи: зачем нужна эта аналогия. Ответ можно дать следующий. Для упругого тела обобщенные уравнения уже дают интересные результаты о скорости поверхностных волн, о волнах в пластинах и др., которые имеют практическое значение. На упругих телах можно достаточно просто исследовать явление деформирования времени. Обобщенные уравнения гравитационного поля в случае, если правомерность их будет подтверждена, также будут полезны, например, для изучения свойств среды пространства.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1994. 528 с.

3. *Амен-заде Ю.А.* Теория упругости. М.: Высш. шк., 1976. 272 с.
4. *Уайт Р.М.* Поверхностные упругие волны // ТИИЭР. 1970. Вып. 58. № 8. С. 68–110.
5. *Викторов И.А.* Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах. Обзор // Акуст. ж. 1979. Т. 25. Вып. 1. С. 1–17.
6. *Фарнелл Дж.* Свойства упругих поверхностных волн // Физическая акустика. М.: Мир, 1973. Вып. 6. С. 139–202.
7. *Вольтмер Ф.В., Инпен Е.Р., Уайт Р.М., Лим Т.К., Фарнелл Г.В.* Измерения и расчет скорости поверхностных волн // ТИИЭР. 1968. Вып. 56. № 9. С. 247–248.
8. *Кэй Дж., Лэби Т.* Таблицы физических и химических постоянных. М.: Физматгиз, 1962. 247 с.
9. *Андерсан О., Либерман В.* Скорость звука в горных породах и минералах // Физическая акустика. М.: Мир, 1970. С. 382–433.
10. *Ивакин Б.Н.* Методы моделирования сейсмических волновых явлений. М.: Наука, 1969. 287 с.
11. *Delly J.W., Thau S.A.* Observations of stress wave propagation in a halfplane with boundary loading // Intern. J. Solid and Struct. 1967. V. 3. № 3. P. 293–308.
12. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
13. *Moller C.* Trionfi e limiti della teoria di Einstein della relativita e gravitazione // Astrofisica e Cosmologia, Gravitazione, Quanti e Relativita. Sentenario di Einstein. Firenze: Giunti Barbera, 1979. P. 25–56.
14. *Amaldi E., Pizella G.* La ricerca delle onde gravitazionali // Astrofisica e Cosmologia, Gravitazione, Quanti e Relativita. Sentenario di Einstein. Firenze: Giunti Barbera, 1979. P. 281–458.
15. *Wheeler J.A.* I quanti e l'universo. Astrofisica e Cosmologia, Gravitazione, Quanti e Relativita. Sentenario di Einstein. Firenze: Giunti Barbera, 1979. P. 1137–1164.
16. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Москва

Поступила в редакцию  
23.12.1999