МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2002

УДК 539.3

© 2002 г. С.А. БАРСУКОВ, Е.В. ГЛУШКОВ, Н.В. ГЛУШКОВА

СИНГУЛЯРНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ ФРОНТА ТРЕЩИНЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Разработанный ранее для клиновидных штампов [1] и трещин [2] и обобщенный для произвольных многогранных углов [3] метод выделения сингулярных составляющих линейно-упругого решения в окрестности угловых точек тела применяется для исследования особенностей поля напряжений в окрестности угловых точек фронта трещин, расположенных в плоскости соединения двух разнородных материалов. Метод основан на сведении с помощью преобразования Меллина эталонных трехмерных краевых задач к спектральным задачам для одномерного интегрального оператора. В рамках данного подхода выведен вид интегрального оператора для рассматриваемой задачи, осуществлена компьютерная реализация метода и проведен численный анализ зависимости характеристик сингулярного разложения как от раствора угла трещины, так и от соотношения упругих свойств материалов.

В соответствии с общими представлениями поведения обобщенного (вариационного) решения краевых эллиптических задач в окрестности угловых точек границы тела [4, 5], асимптотика пространственного поля упругих напряжений $\boldsymbol{\tau}$ может быть записана в следующем виде:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \sim \sum_n K_n \mathbf{f}_n(\varphi, \vartheta) r^{-\gamma_n}, \qquad r \to 0 \tag{1}$$

$$c > \operatorname{Re}\gamma_1 > \operatorname{Re}\gamma_2 > \ldots > \operatorname{Re}\gamma_n > \ldots$$

Здесь r – расстояние до рассматриваемой угловой точки, γ_n – показатели, определяющие поведение решения в зависимости от r (показатели сингулярности напряжений при $\operatorname{Re}\gamma_n > 0$), $\mathbf{f}_n$ – функции углового распределения напряжений вокруг вершины, зависящие от углов φ, ϑ в некоторой локальной сферической системе координат (r, φ, ϑ), K_n – коэффициенты интенсивности напряжений. Значение константы c, являющейся верхней границей допустимых значений γ_n, вытекает из дополнительных ограничений, накладываемых на решение задачи. Из используемого обычно в теории упругости принципа конечности энергии упругих деформаций в двумерном случае (ребро упругого клина) следует $c = 1$, а в пространственном (M-гранная вершина, $M \geqslant 3$) $c = 3/2$.

Показатели γ_n и угловые функции $\mathbf{f}_n$ являются однократными точками спектра и соответствующими собственными решениями некоторой эталонной краевой задачи, формулируемой для окрестности угловой точки. Для m-кратных точек спектра в (1) появляются дополнительные слагаемые с сомножителями $\ln^p r$ ($p = 1,\ldots, m-1$). В плоском случае показатели γ_n совпадают с корнями характеристического трансцендентного уравнения, а угловые функции $\mathbf{f}_n(\varphi)$ могут быть выписаны в явном виде. В пространственном же ($M \geqslant 3$) их определение представляет собой самостоятельную сложную математическую проблему.

Обзор методов, используемых для ее решения дан, в частности, в работах [2, 3]. Это как прямые численные методы, требующие мощной вычислительной техники (метод конечных или граничных элементов (МКЭ/МГЭ), конечные разности и др.), так и впервые предложенный для клиновидного штампа [1, 6] полуаналитический подход, основанный на сведении с помощью преобразования Меллина двумерных граничных интегральных уравнений (ГИУ) к спектральной задаче для одномерных интегральных операторов. Хотя данный подход и связан с использованием довольно сложного математического аппарата, итоговые расчеты не требуют ощутимых вычислительных затрат, а полученные в результате компьютерные программы нахождения параметров разложения (1) могут быть встроены в МКЭ/МГЭ пакеты в качестве специальных угловых сингулярных элементов, избавляющих от необходимости измельчать сетку в окрестности угловых точек, снижающих общие вычислительные затраты и повышающих точность определения коэффициентов интенсивности напряжений.

Определение концентрации напряжений в окрестности интерфейсной трещины играет важную роль при анализе прочности соединений (отслоения в композитах, металлокерамике, клеевых соединениях и др.), а также при разработке эффективных математических моделей процесса ультразвукового неразрушающего контроля соединений.

В декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$ рассматриваются два упругих изотропных полупространства $-\infty \leqslant x, y \leqslant \infty, z > 0$ и $-\infty \leqslant x, y \leqslant \infty, z < 0$, сцепленных вдоль поверхности $z = 0$ всюду кроме тонкого разреза (трещины), занимающей в этой плоскости клиновидную область Ω с раствором угла 2θ. В полярных координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ область Ω задается соотношениями $0 \leqslant r \leqslant \infty$, $-\theta \leqslant \varphi \leqslant \theta$.

Предполагается, что в зоне соединения $((x, y) \notin \Omega, r = 0)$ поле перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и напряжений $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}$ – непрерывно, а в области Ω берега трещины свободны от напряжений ($\boldsymbol{\tau} = 0$ при $(x, y) \in \Omega, z = 0$). Упругие свойства материалов задаются коэффициентами Пуассона ν_i и модулями сдвига μ_i для верхнего ($i = 1$) и нижнего ($i = 2$) полупространств.

В результате некоторого внешнего воздействия (объемные силы, градиент температур, растягивающие усилия на бесконечности и т.п.) в соединении без трещины возникает непрерывное поле перемещений $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ и напряжений $\boldsymbol{\tau}_0(\mathbf{x})$. Наличие трещины приводит к появлению дополнительного разрывного в области Ω поля перемещений $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ и соответствующих ему напряжений $\boldsymbol{\tau}_1(\mathbf{x})$, которые обеспечивают выполнение граничных условий на берегах трещины: $\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_1 = 0$ при $(x, y) \in \Omega, z = 0$. В силу граничных условий поле $\boldsymbol{\tau}_1(\mathbf{x})$ непрерывно всюду, кроме угловой точки $r = 0$, в окрестности которой для него справедливо представление (1). Изолированные особенности, удовлетворяющие условию конечности потенциальной энергии деформации, являются допустимыми, если под $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ понимается обобщенное решение соответствующей краевой задачи [7]. Цель настоящей работы – создание эффективного метода определения характеристик разложения (1) для рассматриваемого случая интерфейсных трещин и анализ основных отличий их поведения от случая трещины в однородном материале, рассмотренного в [2].

Как известно, показатели γ_n и угловые функции $\mathbf{f}_n$ зависят только от локальных свойств материала и геометрии в окрестности вершины угловой точки [4, 5]. Поэтому рассматриваемая задача является эталонной (канонической) для произвольной интерфейсной трещины, имеющей на фронте угловую точку, с раствором угла 2θ между касательными к фронту. Параметры же материалов и форма тела и трещины вне малой окрестности вершин угла, как и величина внешней нагрузки $\boldsymbol{\tau}_0(\mathbf{x})$ влияют только на коэффициенты интенсивности K_n. Они могут быть определены путем сшивания разложений (1) с глобальным численным решением задачи. При этом оптимальным представляется такой способ дискретизации и проведения расчетов, при котором данные разложения с неизвестными коэффициентами K_n играют роль специальных угловых элементов. В этом смысле решение рассматриваемой эталонной задачи представляет интерес для существенно более широкого круга проблем. Так, например, наряду с анализом прочности и разрушения оно может быть полезно и для построения эталонных полей упругих волн, рассеиваемых угловыми точками, необходимых для создания корректных в смысле общей теории дифракции математических моделей процесса ультразвуковой дефектоскопии конструкций.

Исходным для сведения рассматриваемой краевой задачи в системе интегральных уравнений является хорошо известное представление решения для упругого полупространства, находящегося под действием поверхностной нагрузки $\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \mathbf{q}(x, y)$, через матрицу Грина $k(\mathbf{x})$ [8]:

$$\mathbf{u}^{\pm} = \mathcal{K}^{\pm}\mathbf{q} \equiv \int\int_{-\infty}^{\infty} k^{\pm}(x-\xi, y-\eta, z)\mathbf{q}(\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{2}$$

Здесь и далее знаком плюс отмечены величины, относящиеся к верхнему полупространству $z \geqslant 0$, а минус – к нижнему $z \leqslant 0$.

Матрицы Грина $k^{\pm}$ выражаются через Фурье-символы $K^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2, z)$:

$$k^{\pm}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} K^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2,z)e^{-i(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{3}$$

которые для рассматриваемых изотропных полупространств имеют вид:

$$K^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2,z) = \frac{e^{\mp\alpha z}}{\mu\alpha}\begin{Vmatrix} \frac{\alpha_1^2 z}{2\alpha} \mp 1 \pm \frac{\nu\alpha_1}{\alpha^2} & \left(\frac{z}{2\alpha} \pm \frac{\nu}{\alpha^2}\right)\alpha_1\alpha_2 & \frac{\alpha_1 i}{2}\left(\mp z + \frac{1-2\nu}{\alpha}\right) \\ \left(\frac{z}{2\alpha} \pm \frac{\nu}{\alpha^2}\right)\alpha_1\alpha_2 & \frac{\alpha_2^2 z}{2\alpha} \mp 1 \pm \frac{\nu\alpha_2}{\alpha^2} & \frac{\alpha_2 i}{2}\left(\mp z + \frac{1-2\nu}{\alpha}\right) \\ \frac{\alpha_1 i}{2}\left(\mp z - \frac{1-2\nu}{\alpha}\right) & \frac{\alpha_2 i}{2}\left(\mp z - \frac{1-2\nu}{\alpha}\right) & -\frac{\alpha}{2}\left(z \pm \frac{2(1-\nu)}{\alpha}\right) \end{Vmatrix} \tag{4}$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

Отметим, что предлагаемый подход применим и для случая анизотропных материалов. Для этого достаточно в дальнейших выкладках заменить матрицы (4) на аналогичные, полученные для требуемого типа анизотропии.

В силу разрывности рассеянного поля $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ на разрезе Ω и непрерывности $\boldsymbol{\tau}_1$, из соотношения (2) следует

$$\mathbf{v}(x,y) = [\mathbf{u}_1^-(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_1^+(\mathbf{x})]\,|_{z=0} = (\mathcal{K}^- - \mathcal{K}^+)\mathbf{q}_1\,|_{z=0} \tag{5}$$

где $\mathbf{q}_1(x, y) = \boldsymbol{\tau}_1|_{z=0}$, $\mathbf{v}$ – скачок поля $\mathbf{u}_1$ на разрезе Ω.

Преобразование Фурье по горизонтальным координатам x, y:

$$\mathcal{F}[\mathbf{u}] \equiv \int\int_{\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}dxdy = \mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2,z)$$

переводит интегральные операторы $\mathcal{K}^{\pm}\mathbf{q}_1$, являющиеся сверткой матриц-функций $k^{\pm}$ и векторов $\mathbf{q}_1$, в произведение их Фурье-символов:

$$\mathbf{U}^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2,z) = K^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2,z)\mathbf{Q}_1(\alpha_1,\alpha_2), \qquad \mathbf{Q}_1 = \mathcal{F}[\mathbf{q}_1] \tag{6}$$

Аналогично, соотношение (5) дает связь между символами $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{Q}_1(\alpha_1,\alpha_2)=L(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{V}(\alpha_1,\alpha_2) \tag{7}$$

$$L=[(K^- - K^+)_{z=0}]^{-1}, \qquad \mathbf{V}=\mathscr{F}[\mathbf{v}]$$

Из граничных условий на поверхности трещины следует, что в области Ω вектор-функция $\mathbf{q}_1$ известна

$$\mathbf{q}_1(x,y)=\boldsymbol{\tau}_1|_{z=0}=-\boldsymbol{\tau}_0|_{z=0} \qquad (x,y)\in\Omega$$

поэтому с помощью обратного преобразования Фурье $\mathscr{F}^{-1}$ функционально-матричное соотношение (7) сводится к интегральному уравнению типа Винера – Хопфа относительно неизвестного скачка смещений $\mathbf{v}$:

$$\int\limits_{\Omega} l(x-\xi,y-\eta)\mathbf{v}(\xi,\eta)d\xi d\eta=\mathbf{f}(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega \tag{8}$$

$$l=\mathscr{F}^{-1}[L], \qquad \mathbf{f}=-\boldsymbol{\tau}_0|_{z=0}$$

Предложенный в [1, 2] метод определения характеристик сингулярного решения основан на сведении с помощью преобразования Меллина по $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$M_s[f]=\int\limits_0^\infty f(r)r^{s-1}dr=F(s), \qquad M_s^{-1}[F]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)r^{-s}ds=f(r) \tag{9}$$

интегрального уравнения (8) с однородным символом ядра $L(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha\Phi(\beta)$ ($\alpha=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$, $\alpha_1=\alpha\cos\beta$, $\alpha_2=\alpha\sin\beta$) к одномерному интегральному уравнению

$$\mathscr{L}_s\mathbf{V}\equiv\int\limits_{-\theta}^{\theta}L((s,\varphi-\psi)\mathbf{V}(s-1,\psi)d\psi=\mathbf{F}(s,\varphi), \qquad -\theta\leqslant\varphi\leqslant\theta \tag{10}$$

относительно $\mathbf{V}(s-1,\psi)=M_{s-1}[\mathbf{v}]$.

Известно [1–3, 9], что показатели особенности напряжений γ_n совпадают с полюсами s_n преобразования Меллина $\mathbf{T}_1(s,\varphi,\vartheta)=M_s[\boldsymbol{\tau}_1]$ рассматриваемой функции, лежащими в комплексной плоскости s левее контура интегрирования обратного преобразования M_s^{-1}, а угловые функции определяются вычетами в этих полюсах: $K_n\mathbf{f}_n=res\mathbf{T}_1|_{s=s_n}$. Проще всего получить вид $\mathbf{T}_1$ для зоны соединения материалов (в плоскости трещины $z=0$ или $\vartheta=\pi/2$), так как по построению он определяется левой частью (интегральным оператором) уравнения (10) при $\varphi\notin[-\theta,\theta]$. Полюса элементов $L(s,\varphi-\psi)$, вносимые гамма-функциями рядов (14), являются устранимыми (иначе они были бы полюсами и правой части $\mathbf{F}(s,\varphi)$), поэтому искомые $\gamma_n=s_n$, где s_n – полюса неизвестной функции $\mathbf{V}(s-1,\psi)$, совпадающие с точками спектра интегрального оператора $\mathscr{L}_s$. В результате в представлении (1) для $\boldsymbol{\tau}_1$:

$$K_n\mathbf{f}_n(\varphi,\pi/2)=\int\limits_{-\theta}^{\theta}L(s_n,\varphi-\psi)\,\mathrm{res}\,\mathbf{V}(s-1,\psi)|_{s=s_n}d\psi, \qquad \varphi\notin[-\theta,\theta]$$

Исходя из соотношений (2) аналогично могут быть получены и более общие представления $\mathbf{T}_1$ через $\mathbf{V}(s-1,\psi)$, дающие $\mathbf{f}_n$ для всех φ, ϑ. При этом возникают более сложные интегралы I_n с дополнительным сомножителем $e^{-\alpha|z|}$ в подынтегральной функции (12). Их представление в виде рядов дано в [3].

Для рассматриваемого соединения изотропных материалов матрица $\Phi(\beta)$ в представлении $L(\alpha_1, \alpha_2)$ имеет вид

$$\Phi(\beta) = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} 4(a-b)(bs^2-a)+d^2s^2 & -[4b(a-b)+d^2]cs & 2iadc \\ -[4b(a-b)+d^2]cs & 4(a-b)(bc^2-a)+d^2c^2 & 2iads \\ -2iadc & -2iads & -4a(a-b) \end{Vmatrix}$$

$$\Delta = a(4(a-b)^2 - d^2)$$

$$a = 1/\mu_1 + 1/\mu_2, \quad b = \nu_1/\mu_1 + \nu_2/\mu_2, \quad d = (1-2\nu_1)/\mu_1 - (1-2\nu_2)/\mu_2$$

$$c = \cos\beta, \quad s = \sin\beta$$

В отличие от трещины в однородном пространстве, для которой $d = 0$, матрица L заполнена, т.е. система интегральных уравнений (8) не распадается на две независимые, как в [2]. Другим отличием настоящей работы является новая форма записи ядра интегрального уравнения в рядах, более удобная для реализации метода.

С использованием полярных координат (r, φ), (α, β) и $\xi = \rho\cos\psi$, $\eta = \rho\sin\psi$ ядро интегрального уравнения (8) принимает вид

$$l(x-\xi, y-\eta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \alpha^2 \int_0^{2\pi} \Phi(\beta) e^{-i\alpha r\cos(\varphi-\beta)} e^{i\alpha\rho\cos(\psi-\beta)} d\beta d\alpha \tag{11}$$

Элементы матрицы Φ зависят только от сомножителей $\cos\beta$ и $\sin\beta$, поэтому ядро l может быть представлено в виде линейной комбинации интегралов

$$I_n = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \alpha^2 \int_0^{2\pi} e^{in\beta} e^{-i\alpha r\cos(\varphi-\beta)} e^{i\alpha\rho\cos(\psi-\beta)} d\beta d\alpha \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2) \tag{12}$$

Для этого достаточно в Φ заменить $\cos\beta = (e^{i\beta} + e^{-i\beta})/2$ на $(I_1 + I_{-1})/2$, $\sin\beta$ на $(I_1 - I_{-1})/2i$, $\cos\beta\sin\beta$ на $(I_2 - I_{-2})/4i$ и т.д.

Преобразование Меллина $M_s[I_n]$ действует на экспоненты $\exp[-i\alpha r\cos(\varphi-\beta)]$. Далее в силу свойства $M_s[f(\alpha r)] = \alpha^{-s}F(s)$ интегралы по α в (12) и по ρ в (8) также представляют собой преобразование Меллина с параметрами $3-s$ и $s-1$ от $e^{i\alpha\rho\cos(\psi-\beta)}$ и $v(\rho, \psi)$ соответственно, что приводит уравнение (8) к форме (10). Однако компоненты $L(s, \varphi-\psi)$ выражаются при этом через трехкратные интегралы, без упрощения которых преимущества метода сводятся на нет. Быстрой высокоэффективной численной реализации метода удается достичь, воспользовавшись представлением I_n в виде рядов с разделенными угловыми и радиальными переменными. Ключевую роль при этом играет разложение экспонент в ряд по функциям Бесселя [10]:

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha r\cos(\varphi-\beta)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\alpha r) e^{-im(\pi/2+\varphi-\beta)} \\ e^{i(\alpha\rho\cos(\varphi-\beta))} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\alpha\rho) e^{il(\pi/2+\varphi-\beta)} \end{aligned} \tag{13}$$

Интегралы по β от произведения рядов (13) в силу ортогональности экспонент обращаются в нуль для всех слагаемых, кроме тех, у которых $n + m - l = 0$. В результате будем иметь

$$I_n = \frac{i^n}{2\pi} e^{in\varphi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty J_m(\alpha r) J_{m+n}(\alpha\rho) \alpha^{p+1} d\alpha\, e^{-im(\varphi-\psi)}$$

При использовании данной формы записи преобразование Меллина по r и далее по α действует только на функции Бесселя в соответствии с правилом

$$M_s[J_m(r)] = 2^{s-1}\Gamma\left(\frac{m+s}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{m-s+2}{2}\right) = G(m, s)$$

что приводит к представлению

$$M_s[I_n] = \rho^{s+1} I_n(s,\varphi,\psi), \qquad I_n(s,\varphi,\psi) = \frac{i^n}{2\pi} e^{in\psi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(s,n) e^{-im(\varphi-\psi)} \tag{14}$$

$$g_m(s,n) = G(s,m)G(2+p-s,m+n)$$

Таким образом, вид ядра $L(s, \varphi-\psi)$ интегрального уравнения (10) легко получить, заменив в $\Phi(\beta)$ интегралы I_n вида (12) рядами I_n вида (14).

Для нахождения приближенных значений полюсов s_n проводится дискретизация интегрального уравнения (10) по схеме Бубнова – Галеркина. Неизвестная вектор-функция $\mathbf{V}$ раскладывается по ортогональным полиномам Якоби с весом, учитывающим корневое поведение $\mathbf{v}(\rho, \psi)$ на границах области Ω (при $\psi \to \pm\theta$):

$$\mathbf{V}(s-1,\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k(s) v_k(\overline{\psi}), \qquad v_k = \sqrt{1-\overline{\psi}^2}\, P_k^{(1/2,1/2)}(\overline{\psi}), \qquad \overline{\psi} = \psi/\theta \tag{15}$$

т.е. фактически по полиномам Чебышева второго рода [10]. Так как правая часть уравнения непрерывна по φ, его невязка проектируется на систему полиномов Лежандра $w_l(\overline{\varphi}) = P_l(\overline{\varphi})$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$), $\overline{\varphi} = \varphi/\theta$. В результате относительно неизвестных коэффициентов разложения $\mathbf{c}_k$ возникает бесконечная линейная алгебраическая система

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{lk}(s)\mathbf{c}_k(s) = \mathbf{f}_l(s) \tag{16}$$

где $a_{lk} = (\mathscr{L}_s v_k, w_l)_{L_2}$ – матрица 3×3, $\mathbf{f}_l = (\mathbf{F}, w_l)_{L_2}$ – векторы длины 3.

Очевидно, для получения блоков a_{lk} достаточно в матрице $L(\alpha_1, \alpha_2)$ заменить ряды I_n вида (14) на ряды

$$\hat{I}_n(k,l) = \frac{i^n}{2\pi}\left[\frac{1}{2} i_0(s,n) + \sum_{m=1}^{\infty} i_m(s,n)\right] \tag{17}$$

$$i_m(s,n) = g_m(s,n)d_m(n) + (-1)^n g_m(s,-n)d_m^*(-n)$$

$$d_m(n) = d_1(m+n,k)d_2(m,l)$$

$$d_1(m,k) = \int_{-1}^{1} v_k(\overline{\psi})e^{im\psi}d\overline{\psi}, \qquad d_2(m,l) = \int_{-1}^{1} w_l(\overline{\varphi})e^{-im\varphi}d\overline{\varphi} \tag{18}$$

Искомые точки спектра s_n аппроксимируются нулями определителя урезанной матрицы $A_N(s) = \left\|a_{lk}\right\|_{l,k=0}^{N}$. Благодаря выбору координатных функций v_k, w_l, обеспечивающих требуемое поведение на границах интервала $[-\theta, \theta]$, сходимость метода по N достаточно быстрая. Значения показателей γ_n с двумя верными значащими цифрами для большинства θ достигается уже при $N = 6$.

Основную сложность при проведении расчетов как обычно представляет медленная сходимость рядов $\hat{I}_n(k,l)$, особенно при малых θ. Для ее преодоления используются асимптотические разложения интегралов (18) при $m\theta \to \infty$ (вклад граничных точек), которые вместе с асимптотикой $g_m \sim m/2 + O(m^{-1})$, $m \to \infty$ позволяют выделить и просуммировать медленно сходящиеся составляющие рядов в явном виде.

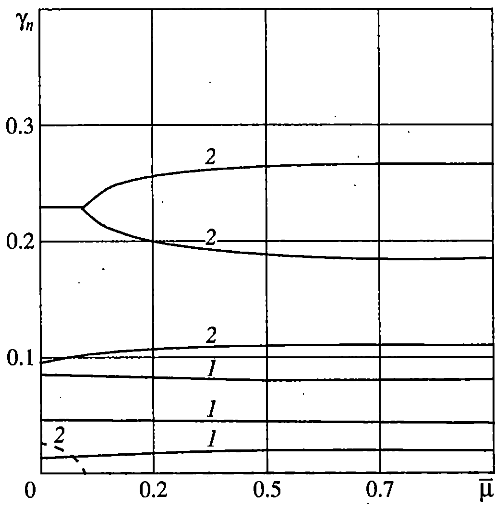
Разработанная программа позволяет быстро получать значения γ_n, $\mathbf{f}_n$ для любых растворов угла θ в диапазоне $\theta_0 \leqslant \theta < \pi$. Нижняя граница диапазона θ_0 зависит только от мощности компьютера, требуемой точности и допустимого времени счета (при

Таблица 1

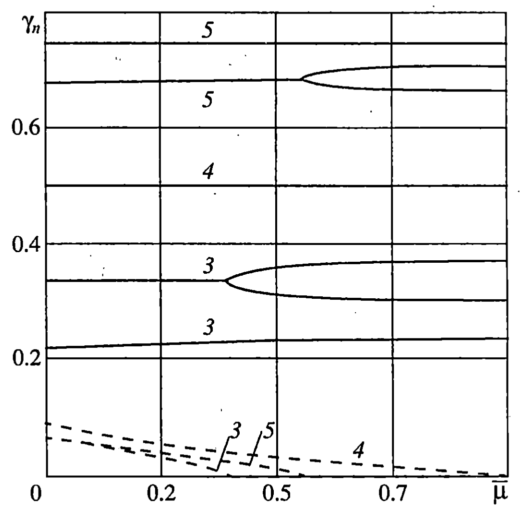
$\bar{\mu}$	$2\theta = 60$	90	120	180	240	270	300
0	0.030	0.097	0.222	0.500	0.682	0.743	0.793
	0.143	0.230	0.337	0.500	0.621	0.679	0.739
	0.089	±0.029	±0.070	±0.094	±0.081	±0.068	±0.056
0.1	0.033	0.101	0.226	0.500	0.681	0.742	0.793
	0.142	0.231	0.337	0.500	0.622	0.681	0.741
	0.086	0.226	±0.053	±0.076	±0.065	±0.054	±0.044
0.25	0.035	0.105	0.230	0.500	0.680	0.742	0.793
	0.141	0.255	0.336	0.500	0.624	0.682	0.742
	0.084	0.199	±0.032	±0.055	±0.045	±0.037	±0.030
0.5	0.037	0.108	0.232	0.500	0.679	0.742	0.793
	0.140	0.263	0.356	0.500	0.624	0.683	0.743
	0.082	0.189	0.315	±0.031	±0.019	±0.012	±0.010
1	0.037	0.110	0.234	0.500	0.679	0.741	0.793
	0.140	0.266	0.367	0.500	0.606	0.664	0.727
	0.081	0.185	0.303	0.500	0.644	0.703	0.760

Таблица 2

$\bar{\mu}$	$2\theta = 60$	90	120	180	240	270	300
0	0.030	0.097	0.222	0.500	0.682	0.743	0.793
	0.143	0.230	0.338	0.500	0.621	0.680	0.739
	0.090	±0.029	±0.070	±0.094	±0.081	±0.070	±0.056
0.1	0.028	0.093	0.218	0.500	0.684	0.746	0.796
	0.148	0.232	0.340	0.500	0.620	0.678	0.740
	0.088	±0.017	±0.063	±0.088	±0.074	±0.063	±0.051
0.25	0.027	0.090	0.214	0.500	0.686	0.749	0.799
	0.154	0.257	0.342	0.500	0.619	0.677	0.738
	0.086	0.214	±0.053	±0.079	±0.066	±0.055	±0.044
0.5	0.024	0.084	0.208	0.500	0.690	0.752	0.802
	0.162	0.276	0.345	0.500	0.618	0.676	0.737
	0.085	0.203	±0.038	±0.068	±0.055	±0.045	±0.036
1	0.021	0.076	0.199	0.500	0.694	0.758	0.807
	0.172	0.295	0.359	0.500	0.615	0.674	0.735
	0.083	0.194	0.338	±0.054	±0.038	±0.028	±0.022



Фиг. 1



Фиг. 2

уменьшении θ время счета увеличивается из-за удлинения рядов по m). В данном случае при точности в три знака $\theta_0 \approx 0.05\pi$.

В публикуемой работе приводятся только некоторые значения γ_n и графики, показывающие влияние соотношения упругих свойств материалов на характеристики сингулярности.

Во всем диапазоне изменения θ, как и для трещины в однородном материале, имеется три сингулярных (т.е. в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re}\gamma_n \leqslant 3/2$) значения γ_n, причем один из этих показателей (пусть это γ_1) всегда вещественный (при $\mu_1 = \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2$ он вырождается в показатель для нормальной компоненты), а два других, начиная с некоторой величины θ, сливаются в комплексно-сопряженную пару. В таблицах при этом во второй строке приводится $\operatorname{Re}\gamma_2 = \operatorname{Re}\gamma_3$, а в третьей $\pm|\operatorname{Im}\gamma_{2,3}|$.

В табл. 1 приводятся значения γ_n, $n = 1, 2, 3$ для фиксированного набора углов 2θ и соотношения модулей сдвига $\bar{\mu} = \mu_1 / \mu_2$ при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Предельный случай $\bar{\mu} = 0$ означает, что $\mu_2 = \infty$, т.е. нижнее полупространство является абсолютно жестким. Значения γ_n здесь те же, что и при действии жесткого клиновидного штампа, сцепленного с упругим полупространством со свойствами ν_1, μ_1. Другими контрольными точками, использовавшимися при тестировании программы, являются значения γ_n при $2\theta = 180°$, когда угловая точка сглаживается. Показатели γ_n становятся здесь такими же, как и для напряжений в окрестности гладкого участка фронта трещины, т.е. они легко определяются в рамках двумерной постановки для соответствующего составного клина. В частности, при $\theta = 180°$ имеем $\operatorname{Re}\gamma_n = 0.5$ при всех $\bar{\mu}$. Значения γ_n, приведенные в табл. 2 для тех же θ и $\bar{\mu}$, но при $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.5$, показывают, как влияют на показатели особенности коэффициенты Пуассона материалов.

Зависимость показателей γ_n от раствора угла θ качественно та же, что и для однородной среды: они монотонно возрастают от нулевого значения при $\theta = 0°$ до $\operatorname{Re}\gamma_n = 1$ при $\theta = 360°$. Характер зависимости γ_n от соотношения упругих модулей $\bar{\mu}$ иллюстрируют графики $\gamma_n(\bar{\mu})$ ($n = 1, 2, 3$), приведенные на фиг. 1, 2 для $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ и пяти фиксированных значений растворов угла $2\theta = 45°, 90°, 120°, 180°, 270°$ (1–5 соответственно; $\operatorname{Re}\gamma_n$ – сплошные линии, $\operatorname{Im}\gamma_n$ – штриховые). Графики показывают, что соотношение $\bar{\mu}$ влияет на γ_n не так значительно как θ. Основным изменением здесь является преобразование комплексно-сопряженных пар в два вещественных показателя при определенном значении $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0(\theta)$.

Работа поддержана грантами РФФИ № 97-01-00429, № 00-01-96018 и № 00-01-96020.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 2. С. 289–294.
2. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Об особенностях поля упругих напряжений в окрестности вершины клиновидной пространственной трещины // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 4. С. 82–86.
3. *Glushkov E., Glushkova N., Lapina O.* 3D elastic stress singularity at polyhedral corner points // Intern. J. Solids and Structures. 1999. V. 36. № 8. P. 1105–1128.
4. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Вып. 16. С. 209–292.
5. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
6. *Александров В.М., Бабешко В.А.* О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной формы в плане // ПММ. 1972. Т. 36. С. 88–93.
7. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
8. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
9. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 471 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
11. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
17.12.1999