

УДК 539.3.01

© 2002 г. П.В. ГАЛПЧЯН

**ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ  
В ВИДЕ КРУГОВОГО СЕКТОРА**

Обобщением метода Фурье для уравнения Лапласа решена граничная задача в двумерной области в виде кругового сектора. Рассматриваемая область состоит из двух круговых секторов, соответствующих однородным изотропным материалам с различными модулями сдвига.

Задача о кручении составных цилиндров рассмотрена в [1, 2]. В этих работах исследуется решение задачи около угловой точки контура поперечного сечения цилиндра, когда линия раздела областей, соответствующих различным материалам, проходит через эту угловую точку. Однако в [1] полностью не решена граничная задача. В частности не получены формулы для коэффициентов особенности напряжений, дающие полную картину о характере напряженного состояния в окрестности особой точки. В работе [2] рассмотрен только случай, когда уравнение, определяющее собственные значения задачи, имеет простые корни.

В работе [3] рассматривается задача о плоском стационарном температурном поле в составном круговом секторе. Распределение температуры представляется в виде ряда по собственным функциям соответствующей трехточечной краевой задачи.

В [4] исследован весь спектр собственных значений рассмотренной граничной задачи и показано, что различаются три вида задач, представляющих, каждый в отдельности, особый интерес по отношению подхода к построению соответствующих им решений.

В настоящей работе рассматривается случай, когда отношение  $\alpha/\beta$  является рациональным числом.

1. В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  составные части цилиндра ограничены координатными поверхностями  $\varphi = -\beta, \varphi = 0, r = a$  и  $\varphi = 0, \varphi = \alpha, r = a$  соответственно, причем  $0 < (\alpha, \beta) < 2\pi, 0 < \alpha + \beta \leq 2\pi, a > 0$ , ось  $z$  — образующая цилиндра. Материалы составных частей изотропны и обладают различными линейно упругими свойствами.

Антиплоская деформация цилиндра вызывается продольным сдвигом по направлению оси  $z$ . При этом модуль вектора смещения  $u = u_z(r, \varphi)$  ( $u_z$  — проекция вектора смещения на ось  $z$ ) не зависит от координаты  $z$ .

Функция напряжений  $F_i(r, \varphi)$  ( $i = 1, 2$ ) удовлетворяет уравнению Лапласа [4]:

$$\Delta F_i(r, \varphi) = 0 \tag{1.1}$$

граничным условиям

$$F_1(r, \alpha) = 0, \quad F_2(r, -\beta) = 0 \tag{1.2}$$

и условиям на линии раздела смежных областей  $\varphi = 0$ :

$$\partial F(r, 0)/\partial \varphi = \mu \partial F_2(r, 0)/\partial \varphi, \quad \mu = G_1/G_2, \quad F_1(r, 0) = F_2(r, 0) \quad (1.3)$$

где  $G_i$  – модули сдвига. Причем индекс 1 соответствует области  $\varphi \in [0; \alpha]$ , а индекс 2 – области  $\varphi \in [-\beta; 0]$ .

Методом разделения переменных для уравнения (1.1) находим решение

$$F_i(r, \varphi) = r^\lambda (A_i \cos \lambda \varphi + B_i \sin \lambda \varphi) \quad (i=1, 2) \quad (1.4)$$

где  $\lambda$  – некоторый параметр,  $A_i, B_i$  – постоянные, подлежащие определению.

Удовлетворяя условиям (1.2), (1.3), для определения постоянных  $A_i$  и  $B_i$  получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$A_1 \cos \lambda \alpha + B_1 \sin \lambda \alpha = 0, \quad A_2 \cos \lambda \beta - B_2 \sin \lambda \beta = 0, \quad A_2 = A_1, \quad B_1 = \mu B_2 \quad (1.5)$$

Условия существования ненулевого решения системы (1.5) выведены и подробно изучены в [1, 4].

2. Рассмотрим случай  $\beta = \alpha$ . Согласно условию (7) из [4], при помощи системы (1.5) установим, что  $B_2 = 0, B_1 = 0$ , а собственные значения  $\lambda_l$  определяются формулой  $\lambda_l = \pi(2l-1)/2\alpha$  ( $l = 1, 2, \dots$ ).

Собственная функция, соответствующая  $\lambda_l$ , будет  $\theta_l(\lambda_l; \varphi) = A^{(l)} \cos \lambda_l \varphi$ ,  $\varphi \in [-\alpha, \alpha]$ ,  $A_1^{(l)} = A_2^{(l)} = A^{(l)}$ .

При  $\alpha = \beta$  из (6) в [4] получаем второй набор собственных значений  $\lambda_k = \pi k/\alpha$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Из (1.5) определим, что  $A_1 = 0, A_2 = 0, B_1^{(k)} = \mu B_2^{(k)}$ . Собственная функция, соответствующая  $\lambda_k$ , будет

$$\theta_k^{(1)}(\lambda_k; \varphi) = \mu B_2^{(k)} \sin \lambda_k \varphi, \quad \varphi \in [0; \alpha]; \quad \theta_k^{(2)}(\lambda_k; \varphi) = B_2^{(k)} \sin \lambda_k \varphi, \quad \varphi \in [-\alpha; 0]$$

Просуммировав все частные решения, соответствующие  $\lambda_l$  и  $\lambda_k$ , согласно (1.4) получим общее решение задачи (1.1)–(1.3):

$$F_1(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A^{(k)} r^{\nu_k} \cos \nu_k \varphi + \mu B_2^{(k)} r^{\rho_k} \sin \rho_k \varphi) \quad (2.1)$$

$$F_2(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A^{(k)} r^{\nu_k} \cos \nu_k \varphi + B_2^{(k)} r^{\rho_k} \sin \rho_k \varphi), \quad \nu_k = \pi(2k-1)/2\alpha, \quad \rho_k = \pi k/\alpha$$

При  $\alpha = \pi/2$  отсюда получается результат приведенный в [3].

Примем на границе  $r = a$  следующие условия:

$$\tau_{xr}^{(1)}(a, \varphi) = \tau f_1(\varphi), \quad \varphi \in [0; \alpha]; \quad \tau_{xr}^{(2)}(a, \varphi) = \tau f_2(\varphi), \quad \varphi \in [-\alpha; 0] \quad (2.2)$$

Здесь  $\tau$  – постоянная, имеющая размерность напряжения,  $f_i(\varphi)$  – произвольные, но такие функции, что внешние касательные усилия на цилиндрической поверхности бруса  $r = a$ , выражающиеся через них, составляют уравновешенную систему сил [4].

Условия равновесия системы внешних сил приведены в [4].

Согласно (2.1) и (2.2) будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin \nu_k \varphi + \mu B_k \cos \rho_k \varphi) = \tau f_1(\varphi), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin \nu_k \varphi + B_k \cos \rho_k \varphi) = \tau f_2(\varphi) \quad (2.3)$$

$$A_k = -\nu_k A^{(k)} a^{\nu_k-1}, \quad B_k = \rho_k B_2^{(k)} a^{\rho_k-1}$$

Умножим обе части равенств (2.3) на  $\sin \nu_n \varphi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и проинтегрируем первое из них почленно в промежутке  $[0; \alpha]$ , а второе –  $[-\alpha; 0]$ .

Складывая эти равенства получим

$$A_n = \frac{g_n}{\alpha} - \sum_{k=1}^{\infty} B_k b_{kn}, \quad g_n = \tau \int_{-\alpha}^0 f_2(\varphi) \sin v_n \varphi d\varphi + \tau \int_0^{\alpha} f_1(\varphi) \sin v_n \varphi d\varphi.$$

$$b_{kn} = 2(\mu - 1)(2n - 1)/\pi[(2n - 1)^2 - 4k^2]$$

Умножив теперь обе части равенств (2.3) на  $\cos \rho_n \varphi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и повторив ту же процедуру, определим коэффициенты  $B_k$ :

$$B_k = \frac{2q_k}{\alpha(1 + \mu)}, \quad q_k = \tau \int_{-\alpha}^0 f_2(\varphi) \cos \rho_k \varphi d\varphi + \tau \int_0^{\alpha} f_1(\varphi) \cos \rho_k \varphi d\varphi$$

В частности, для компонента напряжения  $\tau_{\varphi z}^{(i)}$  будем иметь следующее выражение:

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r, \varphi) = a \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \left( \frac{r}{a} \right)^{v_k - 1} \cos v_k \varphi - \mu B_k \left( \frac{r}{a} \right)^{\rho_k - 1} \sin \rho_k \varphi \right]$$

$$\tau_{\varphi z}^{(2)}(r, \varphi) = a \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \left( \frac{r}{a} \right)^{v_k - 1} \cos v_k \varphi - B_k \left( \frac{r}{a} \right)^{\rho_k - 1} \sin \rho_k \varphi \right] \quad (2.4)$$

Из (2.1) и (2.4) при  $\mu = 1$  получаются решения, соответствующие однородному цилиндру. Причем  $\tau = (G_1 + G_2)/2$ .

Из формул (2.4) ясно, что компоненты напряжения в полюсе  $r = 0$  имеют особенность вида  $(r/a)^{v_1 - 1}$ , независящую от отношения модулей сдвига  $\mu$ . Особенность появляется при  $\alpha > \pi/2$ .

3. Пусть  $\beta = 3\alpha$ . Из условия (7) из [4] вытекает, что  $B_2 = 0$ ,  $B_1 = 0$ . Собственные значения  $\lambda_l$ , соответствующие случаю (7) из [4], определяются формулой  $\lambda_l = \pi(2k - 1)(2l - 1)/2\alpha$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) при  $k = 1$ . Собственными функциями, соответствующими  $\lambda_l$ , будут:

$$\theta_l^{(1)}(\lambda_l; \varphi) = A^{(l)} \cos \lambda_l \varphi = -\frac{A^{(l)}}{\sin \lambda_l \alpha} \sin \lambda_l (\varphi - \alpha), \quad A^{(l)} = A_1^{(l)} A_2^{(l)}$$

$$\theta_l^{(2)}(\lambda_l; \varphi) = A^{(l)} \cos \lambda_l \varphi = -\frac{A^{(l)}}{\sin \lambda_l \alpha} \left( \frac{1}{\mu} \sin \lambda_l \varphi \cos \lambda_l \alpha - \cos \lambda_l \varphi \sin \lambda_l \alpha \right)$$

При  $\beta = 3\alpha$  уравнение (6) в [4] имеет корни

$$\lambda = \frac{\pi}{\alpha} k, \quad \lambda = \pm \delta + \frac{\pi}{\alpha} (k - 1) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \delta = \frac{1}{2\alpha} \arccos \frac{\mu - 1}{2(\mu + 1)}$$

причем  $\pi/3 < 2\alpha\delta < 2\pi/3$ , а при  $k = 1$ ,  $\lambda = \delta$ . Пронумеровав по порядку возрастания, обозначим их через  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Они будут собственными значениями. Собственному значению  $\lambda_k$  соответствует собственная функция

$$\theta_k^{(i)}(\lambda_k; \varphi) = A_i^{(k)} \cos \lambda_k \varphi + B_i^{(k)} \sin \lambda_k \varphi \quad (3.1)$$

Из системы алгебраических уравнений (1.5), выразим постоянные  $A_i^{(k)}$  и  $B_i^{(k)}$  через  $B_2^{(k)}$ :

$$A_1^{(k)} = -\mu B_2^{(k)} \operatorname{tg} \lambda_k \alpha, \quad A_2^{(k)} = A_1^{(k)}, \quad B_1^{(k)} = \mu B_2^{(k)} \quad (3.2)$$

Подставив (3.2) в (3.1), получим окончательный вид собственных функций:

$$\theta_k^{(1)}(\lambda_k; \varphi) = \mu B_2^{(k)} (\sin \lambda_k \varphi - \operatorname{tg} \lambda_k \alpha \cos \lambda_k \varphi) = \frac{\mu B_2^{(k)}}{\cos \lambda_k \alpha} \sin \lambda_k (\varphi - \alpha)$$

$$\begin{aligned} \theta_k^{(2)}(\lambda_k; \varphi) &= B_2^{(k)} (\sin \lambda_k \varphi - \mu \operatorname{tg} \lambda_k \alpha \cos \lambda_k \varphi) = \\ &= \frac{B_2^{(k)}}{\cos \lambda_k \alpha} (\sin \lambda_k \varphi \cos \lambda_k \alpha - \mu \cos \lambda_k \varphi \sin \lambda_k \alpha) \end{aligned}$$

Согласно условию (9) в [4] из системы (1.5) установим, что  $A_1 = A_2 = 0$ . Собственные значения  $\lambda_j$  определяются формулой  $\lambda_j = \pi k j / \alpha$  ( $j = 1, 2$ ), при  $k = 1$ . Собственными функциями, соответствующими  $\lambda_j$ , будут

$$\theta_j^{(1)}(\lambda_j; \varphi) = \mu B_2^{(j)} \sin \lambda_j \varphi = \frac{\mu B_2^{(j)}}{\cos \lambda_j \alpha} \sin \lambda_j (\varphi - \alpha), \quad B_1^{(j)} = \mu B_2^{(j)}$$

$$\theta_j^{(2)}(\lambda_j; \varphi) = B_2^{(j)} \sin \lambda_j \varphi = \frac{B_2^{(j)}}{\cos \lambda_j \alpha} (\sin \lambda_j \varphi \cos \lambda_j \alpha - \mu \cos \lambda_j \varphi \sin \lambda_j \alpha)$$

Анализ случая (8) из [4] аналогичен случаю (6) в [4]. При  $\beta = 3\alpha$  уравнение (8) в [4] имеет корни  $\lambda = \pi(2k-1)/2\alpha$ ,  $\lambda = \pm\delta + \pi(k-1)/\alpha$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Нумеруя в порядке возрастания, обозначим их через  $\lambda_m$ . Собственному значению  $\lambda_m$  соответствуют постоянные  $\mu B_2^{(m)} = -A_1^{(m)} \operatorname{ctg} \lambda_m \alpha$ ,  $B_1^{(m)} = -A_1^{(m)} \operatorname{ctg} \lambda_m \alpha$ ,  $A_1^{(m)} = A_2^{(m)}$ , определяемые из системы (1.5), и собственные функции

$$\theta_m^{(1)}(\lambda_m; \varphi) = A_1^{(m)} (\cos \lambda_m \varphi - \operatorname{ctg} \lambda_m \alpha \sin \lambda_m \varphi) = -\frac{A_1^{(m)}}{\sin \lambda_m \alpha} \sin \lambda_m (\varphi - \alpha)$$

$$\begin{aligned} \theta_m^{(2)}(\lambda_m; \varphi) &= A_1^{(m)} \left( \cos \lambda_m \varphi - \frac{1}{\mu} \operatorname{ctg} \lambda_m \alpha \sin \lambda_m \varphi \right) = \\ &= -\frac{A_1^{(m)}}{\mu \sin \lambda_m \alpha} (\sin \lambda_m \varphi \cos \lambda_m \alpha - \mu \cos \lambda_m \varphi \sin \lambda_m \alpha) \end{aligned}$$

Объединив результаты, полученные в рассмотренных четырех случаях, перегруппируем собственные числа  $\lambda_l, \lambda_k, \lambda_j$  и  $\lambda_m$ , представив их в виде двух наборов  $\nu_k$  и  $\rho_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ):

$$\nu_{2n-1} = \delta + \pi(n-1)/\alpha, \quad \nu_{2n} = \pi(2n-1)/2\alpha, \quad \rho_{2n-1} = -\delta + \pi n/\alpha,$$

$$\rho_{2n} = \pi n/\alpha \quad (n = 1, 2, \dots)$$

При  $\alpha = \pi/4$  отсюда получается результат, приведенный в [3]. Собственными функциями, соответствующими  $\nu_k$  и  $\rho_k$ , будут

$$\theta_k(\nu_k; \varphi) = \begin{cases} \theta_k^{(1)}(\nu_k; \varphi), & \varphi \in [0; \alpha] \\ \theta_k^{(2)}(\nu_k; \varphi), & \varphi \in [-3\alpha; 0] \end{cases}, \quad \psi_k(\rho_k; \varphi) = \begin{cases} \psi_k^{(1)}(\rho_k; \varphi), & \varphi \in [0; \alpha] \\ \psi_k^{(2)}(\rho_k; \varphi), & \varphi \in [-3\alpha; 0] \end{cases}$$

$$\theta_k^{(1)}(\nu_k; \varphi) = -\frac{A_1^{(k)}}{\sin \nu_k \alpha} \sin \nu_k (\varphi - \alpha), \quad \psi_k^{(1)}(\rho_k; \varphi) = \frac{\mu B_2^{(k)}}{\cos \rho_k \alpha} \sin \rho_k (\varphi - \alpha)$$

$$\theta_k^{(2)}(\nu_k; \varphi) = -\frac{A_1^{(k)}}{\mu \sin \nu_k \alpha} (\sin \nu_k \varphi \cos \nu_k \alpha - \mu \cos \nu_k \varphi \sin \nu_k \alpha)$$

$$\psi_k^{(2)}(\rho_k; \varphi) = \frac{B_2^{(k)}}{\cos \rho_k \alpha} (\sin \rho_k \varphi \cos \rho_k \alpha - \mu \cos \rho_k \varphi \sin \rho_k \alpha)$$

Просуммировав частные решения, соответствующие  $v_k$  и  $\rho_k$ , согласно (1.4) получим общее решение задачи (1.1)–(1.3)

$$F_1(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^* r^{v_k} \sin v_k(\varphi - \alpha) + \mu B_k^* r^{\rho_k} \sin \rho_k(\varphi - \alpha)]$$

$$F_2(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k^* r^{v_k} \left( \frac{1}{\mu} \sin v_k \varphi \cos v_k \alpha - \cos v_k \varphi \sin v_k \alpha \right) + \right.$$

$$\left. + B_k^* r^{\rho_k} (\sin \rho_k \varphi \cos \rho_k \alpha - \mu \cos \rho_k \varphi \sin \rho_k \alpha) \right] \quad (3.3)$$

$$A_k^* = -A_1^{(k)} / \sin v_k \alpha, \quad B_k^* = B_2^{(k)} / \cos \rho_k \alpha$$

Если на границе  $r = a$  заданы напряжения

$$\tau_{zr}^{(1)}(a, \varphi) = \tau f_1(\varphi), \quad \varphi \in [0; \alpha]; \quad \tau_{zr}^{(2)}(a, \varphi) = \tau f_2(\varphi), \quad \varphi \in [-3\alpha; 0] \quad (3.4)$$

то согласно (3.3) будем иметь разложения

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos v_k(\varphi - \alpha) + \mu B_k \cos \rho_k(\varphi - \alpha)] = \tau f_1(\varphi) \quad (3.5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A_k (\cos v_k \varphi \cos v_k \alpha + \mu \sin v_k \varphi \sin v_k \alpha)] +$$

$$+ \mu [B_k (\cos \rho_k \varphi \cos \rho_k \alpha + \mu \sin \rho_k \varphi \sin \rho_k \alpha)] = \mu \tau f_2(\varphi)$$

где  $A_k = A_k^* v_k a^{v_k - 1}$ ,  $B_k = B_k^* \rho_k a^{\rho_k - 1}$ ,  $f_i(\varphi)$  – функции, удовлетворяющие условиям равновесия [4].

Предварительно умножив первое равенство (3.5) на  $G_1 \cos v_n(\varphi - \alpha)$ , а второе равенство (3.5) на  $G_2 (\cos v_n \varphi \cos v_n \alpha + \mu \sin v_n \varphi \sin v_n \alpha)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), проинтегрируем первое из них почленно в промежутке  $[0; \alpha]$ , а второе – в промежутке  $[-3\alpha; 0]$  и сложим полученные равенства. Умножив затем равенства (3.5) соответственно на  $G_1 \cos \rho_n(\varphi - \alpha)$  и  $G_2 (\cos \rho_n \varphi \cos \rho_n \alpha + \mu \sin \rho_n \varphi \sin \rho_n \alpha)$  и повторив ту же процедуру, в результате получим систему двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_k$  и  $B_k$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{kn} A_k + \mu b_{kn} B_k) = g_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c_{kn} A_k + \mu d_{kn} B_k) = q_n \quad (3.6)$$

При помощи (6) и (8) из [4] можно показать, что при  $k \neq n$ ,  $a_{kn} = 0$ ,  $d_{kn} = 0$ , а  $b_{kn} = 0$  и  $c_{kn} = 0$  при любых  $k$  и  $n$ .

Коэффициент  $a_{nn}$  и свободный член  $g_n$  выражаются формулами

$$a_{nn} = G_2 \left( \frac{3}{2} \alpha + \frac{\sin 6v_n \alpha}{4v_n} \right) \cos^2 v_n \alpha - \frac{G_1}{2v_n} \sin 2v_n \alpha \sin \frac{2}{3v_n \alpha} +$$

$$+ G_2 \mu^2 \left( \frac{3}{2} \alpha - \frac{\sin 6v_n \alpha}{4v_n} \right) \sin^2 v_n \alpha + G_1 \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2v_n \alpha}{4v_n} \right)$$

$$g_n = \tau G_1 \left[ \int_{-3\alpha}^0 f_2(\varphi) (\cos v_n \varphi \cos v_n \alpha + \mu \sin v_n \varphi \sin v_n \alpha) d\varphi + \int_0^{\alpha} f_1(\varphi) \cos v_n(\varphi - \alpha) d\varphi \right]$$

а выражения  $d_{nn}$  и  $q_n$  получим соответственно из выражений  $a_{nn}$  и  $g_n$ , заменив в них  $v_n$  на  $\rho_n$ .

Таким образом, в силу того, что производные собственных функций  $\theta_k^{(i)}(v_k; \varphi)$  и  $\psi_k^{(i)}(\rho_k; \varphi)$ , соответствующих различным собственным числам, ортогональны в промежутке  $[-3\alpha; \alpha]$  с весом  $G_i$ , уравнения (3.6) упрощаются. В итоге находим коэффициенты Фурье разложений (3.5):

$$A_k = g_k / a_{kk}, \quad B_k = q_k / \mu d_{kk} \quad (3.7)$$

Согласно (3.3), (3.7), для компонента напряжения  $\tau_{\varphi z}^{(i)}$  будем иметь формулу

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi z}^{(1)}(r, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{g_k^*}{a_k} \left(\frac{r}{a}\right)^{v_k-1} \sin v_k(\varphi - \alpha) + \frac{q_k^*}{d_k} \left(\frac{r}{a}\right)^{\rho_k-1} \sin \rho_k(\varphi - \alpha) \right] \\ \tau_{\varphi z}^{(2)}(r, \varphi) &= \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{g_k^*}{a_k} \left(\frac{r}{a}\right)^{v_k-1} (\sin v_k \varphi \cos v_k \alpha - \mu \cos v_k \varphi \sin v_k \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q_k^*}{d_k} \left(\frac{r}{a}\right)^{\rho_k-1} (\sin \rho_k \varphi \cos \rho_k \alpha - \mu \cos \rho_k \varphi \sin \rho_k \alpha) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$g_k^* = g_k / G_2, \quad q_k^* = q_k / G_2, \quad a_k = -a_{kk} / G_2, \quad d_k = -d_{kk} / G_2, \quad \tau = (G_1 + G_2) / 2$$

Подобные формулы получаются и для компонента напряжения  $\tau_{zr}^{(i)}$ .

Из этих формул ясно, что компоненты напряжения в полюсе  $r = 0$  имеют особенность вида  $(r/a)^{\delta-1}$ , которая зависит от параметра  $\mu$ .

Для проведения анализа решения (3.8), зададим определенную нагрузку (3.4) на боковой поверхности цилиндра  $r = a$ . Пусть

$$f_1(\varphi) = \begin{cases} c_1, & \gamma_1 \leq \varphi \leq \alpha \\ c_2, & 0 \leq \varphi < \gamma_1 \end{cases}, \quad f_2(\varphi) = \begin{cases} c_2, & \gamma \leq \varphi \leq 0 \\ -e, & -(2\alpha + \gamma) \leq \varphi < \gamma \\ c_2, & -(2\alpha + \gamma_1) \leq \varphi < -(2\alpha + \gamma) \\ c_1, & -3\alpha \leq \varphi < -(2\alpha + \gamma_1) \end{cases} \quad (3.9)$$

где  $c_1, c_2, e, \gamma$  и  $\gamma_1$  – постоянные, причем  $e > 0, \gamma \in (-\alpha; 0], \gamma_1 \in [0; \alpha]$ .

Подставив выражения  $f_1(\varphi)$  и  $f_2(\varphi)$  из (3.9) в условия равновесия [4] и произведя интегрирование, будем иметь

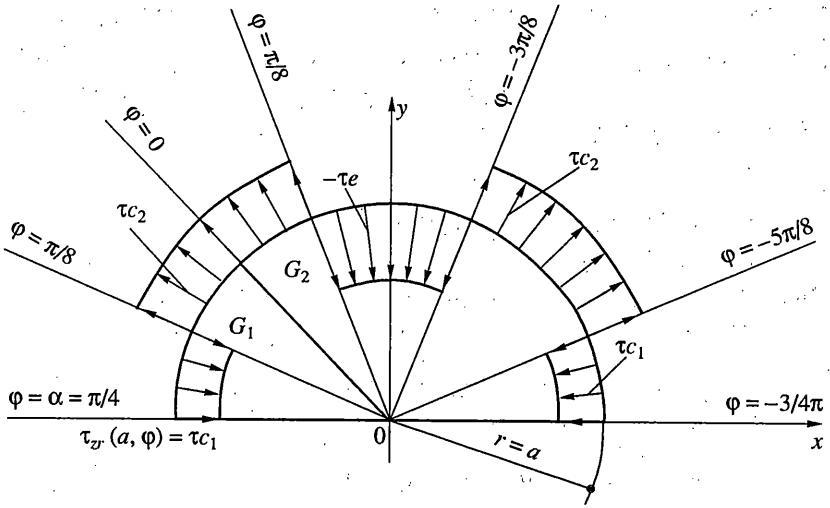
$$\begin{cases} (\alpha - \gamma_1)c_1 + (\gamma_1 - \gamma)c_2 = e(\alpha + \gamma) \\ [\sin 2\alpha - \sin(\alpha + \gamma_1)]c_1 + [\sin(\alpha + \gamma_1) - \sin(\alpha + \gamma)]c_2 = e \sin(\alpha + \gamma) \end{cases} \quad (3.10)$$

Окончательный вид функций  $f_1(\varphi)$  и  $f_2(\varphi)$  получим, определив  $c_1$  и  $c_2$  из системы (3.10).

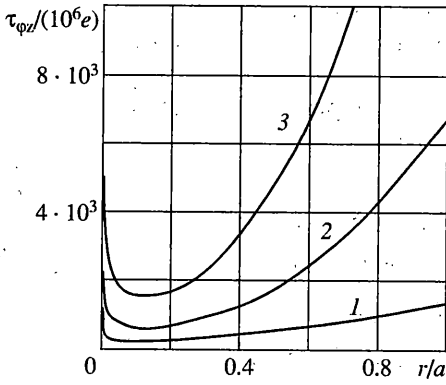
Решение (3.8) будет обладать интегрируемой особенностью, если показатель  $\delta - 1$  степени  $(r/a)^{\delta-1}$  находится в интервале  $(-1; 0)$ . Каждому значению  $\mu \in (0; \infty)$  соответствует одно единственное значение  $\zeta \in (\pi/6; \pi/3)$ , такое, что при  $\alpha > \zeta$  имеет место особенность.

Рассмотрим цилиндр с полукруговым поперечным сечением ( $\alpha = \pi/4$ ), принимая в (3.9)  $\gamma = -\pi/8, \gamma_1 = \pi/8$  (фиг. 1). При этом из (3.10) получаем:  $c_1 \approx -0,576e, c_2 \approx 0,788e$ .

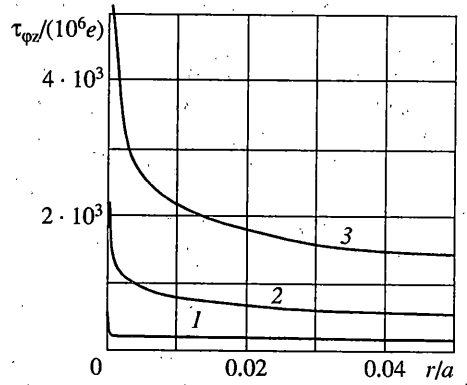
На фиг. 2, 3, для трех значений параметра  $\mu$ , приведены графики изменения напряжения  $\tau_{\varphi z}(r, 0)$  [Н/м<sup>2</sup>] на линии раздела ( $\varphi = 0$ ) составных частей, соответствующих различным материалам. Кривые 1 на фиг. 2, 3 соответствуют значению  $\mu = 1.236$  ( $G_1 = 4.178 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $G_2 = 3.381 \cdot 10^{10}$  Н/м), кривые 2 – значению  $\mu = 5.759$  ( $G_1 = 3.381 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $G_2 = 0.587 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>), а кривые 3 – значению  $\mu = 13.708$  ( $G_1 = 8.047 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $G_2 = 0.587 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>).



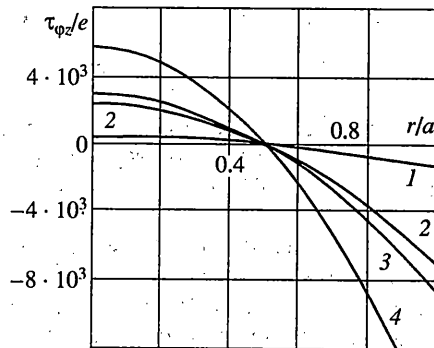
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

При расчетах в (3.8), как первое приближение, взяты только два слагаемых с индексом 1.

На фиг. 4 приведены графики изменения напряжений  $\tau_{\varphi z}(r, 0)$  на линии  $\varphi = 0$  для однородных цилиндров ( $\mu = 1$ ), материалами которых являются те материалы, из которых составлены неоднородные цилиндры, рассмотренные в вышеприведенных примерах (фиг. 2, 3). Графики 1–4 соответствуют следующим материалам с модулем сдвига  $6 \cdot 10^{-10}$  [Н/м<sup>2</sup>]: свинец (0.587), латунь холоднотянутая (3.381), фосфористая бронза катаная (4.178), углеродистые и легированные стали (8.047).

Из приведенных на фиг. 2 и 3 графиков следует, что при увеличении степени неоднородности  $\mu$ , на линии раздела составных частей  $\varphi = 0$  напряжения  $\tau_{\varphi z}$  увеличиваются.

Если сравнивать напряжения, соответствующие графикам 2 и 1 (фиг. 2, 3), то при  $r/a = 0.1$  изменение напряжения  $\tau_{\varphi z}$  составляет 70%, а при  $r/a = 1$  и  $r/a = 10^{-11}$  – соответственно 80% и 99,66%.

Этим изменениям соответствует изменение  $\mu$  равное 78,5%.

Аналогично, если сравнивать напряжения, соответствующие графикам 3 и 1 (фиг. 2, 3), то при тех же значениях  $r/a$  изменение напряжения  $\tau_{\varphi z}$  составляет 88%, 93,3% и 99,96% соответственно.

Этим изменениям соответствует изменение  $\mu$  равное 91%.

Из приведенных на фиг. 4 графиков видно, что при увеличении модуля сдвига  $G$ , напряжение  $\tau_{\varphi z}$  абсолютное по величине увеличивается. Причем, в отличие от однородных цилиндров, на линии  $\varphi = 0$  оно меняет знак и  $\tau_{\varphi z}(r, 0) = 0$  при  $r/a = 0.5$ .

Обозначим коэффициент особенности напряжения  $\tau_{\varphi z}^{(i)}(r, \varphi)$  через  $K^{(i)}(\varphi)$ :

$$K^{(1)}(\varphi) = \frac{g_1^*}{a_1} \sin \delta(\varphi - \alpha), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$K^{(2)}(\varphi) = \frac{1}{\mu} \frac{g_1^*}{a_1} (\sin \delta \varphi \cos \delta \alpha - \mu \cos \delta \varphi \sin \delta \alpha), \quad -\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq 0$$

Они зависят от координаты  $\varphi$  и, следовательно, при приближении к полюсу  $r = 0$ , напряжение  $\tau_{\varphi z}$  стремится к бесконечности по-разному.

$\mu$	1.236	5.759	13.708
$\varphi^\circ$	-42°	-18°	-9°
$K^{(2)}/(e \cdot 10^6)$ [Н/м <sup>2</sup> ]	204.5	334.6	716.5

В таблице для трех значений параметра  $\mu$  приведены наибольшие значения  $K^{(i)}(\varphi)$ . Как видно из таблицы этих значениях они достигают в области с индексом  $i = 2$ . Из приведенных результатов ясно, что при увеличении параметра  $\mu$  наибольшее значение коэффициента  $K(\varphi)$  увеличивается, а значение  $\varphi$ , в котором он принимает это значение, приближается к значению  $\varphi = 0$ .



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1987. 338 с.
2. Алексанян Р.К., Мелик-Саркисян С.А. О кручении анизотропного призматического стержня с поперечным сечением в виде эллиптических секторов // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1978. Т. 31. № 1. С. 40–47.
3. Алексанян Р.К. Стационарное температурное поле в составном круговом секторе // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1971. Т. 24. № 6. С. 14–23.
4. Галпчян П.В. Граничные задачи антиплоской деформации для цилиндра, составленного из различных материалов // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. № 1. С. 22–27.

Ереван

Поступила в редакцию  
7.03.2000