

УДК 539.3

© 2002 г. И.И. АРГАТОВ

ДАВЛЕНИЕ УЗКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ШТАМПА НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

Методом срачиваемых асимптотических разложений изучается контактная задача для узкого прямоугольного штампа на упругом полупространстве. При помощи модифицированной процедуры срачивания выводится корректное интегральное уравнение для определения плотности погонных давлений. Проводится сравнение результатов численных расчетов с известными. Полученное решение обобщается на случай узкого криволинейного штампа, упругого слоя и одностороннего контакта.

1. Постановка задачи. Пусть в упругое (с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν) полупространство $x_2 \leq 0$ вдавливается штамп, имеющий в плане форму прямоугольника длиной $2l$ и шириной $2h$. При этом точки подошвы штампа получают вертикальные перемещения

$$u_2(x_1, 0, x_3) = -v(x_3), \quad |x_1| \leq h, \quad |x_3| \leq l. \quad (1.1)$$

Трением между штампом и поверхностью упругого основания пренебрегаем; нагрузка на границу упругого основания вне штампа отсутствует. Отношение

$$\varepsilon = h/l \quad (1.2)$$

считаем малым параметром.

Контактная задача для узкого прямоугольного штампа исследовалась в работах [1–3] (см. также [4], гл. 2, § 13), [5] (см. также [6], § 1.9) на основе гипотезы Л.А. Галина: распределение давления под штампом в поперечном направлении будет таким же, какое получается на основании решения соответствующей плоской задачи:

$$p(x_1, x_3) = \frac{P(x_3)}{\pi\sqrt{h^2 - x_1^2}} \quad (1.3)$$

Задача для двух одинаковых штампов, расположенных на одной прямой, рассматривалась в [7].

Метод срачиваемых асимптотических разложений (см. [8–10] и др.) применялся в [11–13]. Решение задачи для двух прямоугольных штампов получено в [14]. Другой асимптотический подход к задаче с вытянутой зоной контакта, приводящий к аналогичным [11–14] результатам, был предложен в [15]. Недостатки решений [11–15] обсуждались в [16]. Строгое обоснование асимптотического метода для задач, родственных рассматриваемой, впервые было дано в работах [17, 18].

В настоящей работе применяется модификация стандартной процедуры срачивания, приводящая к результатам, по форме отличным от [11–16].

2. Внешнее поле перемещений. Пусть T – решение задачи Буссинеска о воздействии на границу упругого полупространства $x_2 \leq 0$ единичной сосредоточенной силы, *противонаправленной* оси Ox_2 (см., например, [21]). Вектор смещений точек полупространства на удалении от штампа представим в виде

$$v(P; \mathbf{x}) = \int_{-l}^l P(s) T(x_1, x_2, x_3 - s) ds \quad (2.1)$$

Здесь $P(s)$ – величина контактного давления, рассчитанного на единицу длины штампа.

Введем обозначения $y_1 = x_1, y_2 = x_2, z = x_3$. Для компонент вектор-функции (2.1) при $|y| = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \rightarrow 0$ справедливы асимптотические следующие формулы:

$$\frac{2\pi E}{1+\nu} v_1(P; y, z) = -P(z) \left[\frac{2y_1 y_2}{|y|^2} + 4(1-2\nu) \text{sign}(y_1) \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{|y| - y_2}{|y_1|} \right) \right] + o(1) \quad (2.2)$$

$$\frac{2\pi E}{1+\nu} v_2(P; y, z) = -2(1-\nu) \int_{-l}^l \frac{P(s) ds}{\sqrt{(z-s)^2 + |y|^2}} - \frac{2y_2^2}{|y|^2} P(z) + o(1) \quad (2.3)$$

$$\frac{2\pi E}{1+\nu} v_3(P; y, z) = -(1-2\nu) \nu \cdot \text{p.} \int_{-l}^l \frac{P(s) ds}{z-s} + o(1) \quad (2.4)$$

При выводе (2.2) интеграл $\int (x^2 + |y|^2)^{-1/2} [(x^2 + |y|^2)^{1/2} - y_2]^{-1} dx$ вычислялся при помощи подстановки Эйлера $t = \sqrt{x^2 + |y|^2} + x$. В (2.4) интеграл понимается в смысле Коши. Для интеграла в (2.3) известна асимптотическая формула

$$\int_{-l}^l \frac{P(s) ds}{\sqrt{(z-s)^2 + |y|^2}} = -2 \ln \frac{|y|}{2\sqrt{l^2 - z^2}} + \int_{-l}^l \frac{P(s) - P(z)}{|z-s|} ds + o(1), \quad |y| \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

Заметим, что оценки остатков в (2.2) – (2.5) выписываются в зависимости от дифференциальных свойств плотности P (см. [20, 17, 18] и др.).

3. "Плоский" пограничный слой. В окрестности штампа в плоскостях, нормальных к его оси, перейдем к "растянутым" переменным

$$(\eta_1, \eta_2) = \varepsilon^{-1}(y_1, y_2) \quad (3.1)$$

Задачу для внутреннего поля перемещений

$$w(\boldsymbol{\eta}; z) = W_1(\boldsymbol{\eta}; z) \mathbf{e}_1 + W_2(\boldsymbol{\eta}; z) \mathbf{e}_2 + w_3(\boldsymbol{\eta}; z) \mathbf{e}_3 \quad (3.2)$$

получаем, выделяя в дифференциальных уравнениях исходной смешанной задачи линейной теории упругости старшие относительно параметра ε члены (см., например, [16]).

Функция w_3 характеризует проскальзывание поверхности упругого основания вдоль штампа и согласно (2.4) такова:

$$w_3(\boldsymbol{\eta}; z) = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E} \nu \cdot \text{p.} \int_{-l}^l \frac{P(s) ds}{z-s} \quad (3.3)$$

Пусть (\hat{W}_1, \hat{W}_2) – вектор смещений точек упругой полуплоскости $\eta_2 \leq 0$, в границу которой под действием единичной нагрузки без трения вдавливается штамп с прямолинейным горизонтальным основанием, причем

$$\hat{W}_2(\boldsymbol{\eta}) = 0, \quad \eta_2 = 0, \quad |\eta_1| < l \quad (3.4)$$

Используя решение, полученное в [21], при $|\eta| \rightarrow \infty$ находим следующие асимптотические формулы:

$$\frac{2\pi E}{1+\nu} \hat{W}_1(\eta) = -\frac{2\eta_1\eta_2}{|\eta|^2} + 2(1-2\nu)\text{sign}(\eta_1) \left(\arctg \frac{|\eta_2|}{|\eta_1|} - \frac{\pi}{2} \right) + O(|\eta|^{-1}) \quad (3.5)$$

$$\frac{2\pi E}{1+\nu} \hat{W}_2(\eta) = 4(1-\nu) \ln \frac{2|\eta|}{l} - \frac{2\eta_2^2}{|\eta|^2} + O(|\eta|^{-1}) \quad (3.6)$$

Принимая во внимание (1.1) и (2.1), первые компоненты вектора (3.2) назовем в виде

$$W_1(\eta; z) = P(z) \hat{W}_1(\eta) \quad (3.7)$$

$$W_2(\eta; z) = P(z) \hat{W}_2(\eta) - \nu(z) \quad (3.8)$$

Функциям (3.7), (3.8) отвечает закон распределения контактного давления в форме (1.3).

4. Уравнение для плотности погонных давлений. В соотношениях (3.5) – (3.8) осуществим обратную к (3.1) замену координат и сравним ("сошьем" в переходной области) внешнее (2.1) и внутреннее (3.2) асимптотические представления поля перемещений упругого полупространства.

Главные члены асимптотик функций $v_1(P; y, z)$ (при $|y| \rightarrow 0$) и $w_1(\varepsilon^{-1}y; z)$ (при $\varepsilon^{-1}|y| \rightarrow \infty$) с учетом тригонометрического тождества (1.625.9) [22] совпадают в области срачивания, где $|y|/l$ порядка $\sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Далее, асимптотическое соотношение

$$w_2(\varepsilon^{-1}y; z) - v_2(P; y, z) = o(1), \quad |y|/l \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

в соответствии с (2.3), (3.6), (3.8) преобразуется к виду

$$P(z) 2 \ln \frac{2|y|}{\varepsilon l} + \int_{-l}^l \frac{P(s) ds}{\sqrt{(z-s)^2 + |y|^2}} - \frac{\pi E}{1-\nu^2} \nu(z) = o(1), \quad \frac{|y|}{l} \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

Нетрудно показать, что подстановка (2.5) в (4.1) приводит к уравнению Калкера – Сивашинского [11–14].

Левая часть равенства (4.1) в зоне срачивания окажется малой, если приравнять ее нулю при $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt{\varepsilon}l$. Вспомогательное обозначение (1.2), находим

$$P(z) \ln \frac{4l}{h} + \int_{-l}^l \frac{P(s) ds}{\sqrt{(z-s)^2 + hl}} = \frac{\pi E}{1-\nu^2} \nu(z) \quad (4.2)$$

Теорема. Пусть $\nu \in C^1[-l, l]$. Тогда существует единственное решение уравнения (4.2), также принадлежащее классу $C^1[-l, l]$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\Lambda = \ln \frac{4}{\varepsilon}; \quad \zeta = \frac{z}{l}, \quad \gamma(\zeta) = \frac{1-\nu^2}{\pi E l} P(\zeta l), \quad \varphi(\zeta) = \frac{1}{l} \nu(\zeta l). \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) в пространстве $L_2(-l, l)$ эквивалентно задаче о минимуме функционала

$$\Phi(\gamma) = b(\gamma, \gamma) - 2(\varphi, \gamma) \quad (4.4)$$

$$b(\gamma, \gamma) = \Lambda(\gamma, \gamma) + (J_\varepsilon \gamma, \gamma) \quad (4.5)$$

$$(J_\varepsilon \gamma)(\zeta) = \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\sigma) d\sigma}{\sqrt{(\zeta - \sigma)^2 + \varepsilon}}, \quad (\varphi, \gamma) = \int_{-1}^1 \varphi(\sigma) \gamma(\sigma) d\sigma \quad (4.6)$$

Используя неравенство $x \leq \pi \sin(x/2)$ для $x \in (0, \pi)$, получаем

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\zeta)\gamma(\sigma)}{\sqrt{(\zeta-\sigma)^2 + \varepsilon}} d\sigma d\zeta \geq (\tilde{J}_\varepsilon \gamma, \gamma) \quad (4.7)$$

$$(\tilde{J}_\varepsilon \gamma)(\zeta) = \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\sin^2[\pi(\zeta-\sigma)/2] + \varepsilon}}$$

Непосредственно убеждаемся в справедливости равенств

$$\int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} \cos k\pi\sigma \\ \sin k\pi\sigma \end{array} \right\} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sin^2[\pi(\zeta-\sigma)/2] + \varepsilon}} = \lambda(\tilde{J}_\varepsilon; k) \left\{ \begin{array}{l} \cos k\pi\zeta \\ \sin k\pi\zeta \end{array} \right\}$$

$$\lambda(\tilde{J}_\varepsilon; k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tilde{\Xi}_\varepsilon(x) \cos kx dx, \quad \tilde{\Xi}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(x/2) + \varepsilon}}$$

Очевидно, что $\lambda(\tilde{J}_\varepsilon; 0) > 0$. Так как функция $\tilde{\Xi}_\varepsilon$ является убывающей, то нетрудно видеть, что $\lambda(\tilde{J}_\varepsilon; 1) > 0$ и для $k \geq 2$ имеет место неравенство

$$\frac{2}{\pi} \int_{\pi/k}^{3\pi/(2k)} \tilde{\Xi}_\varepsilon(x) \cos kx dx < \lambda(\tilde{J}_\varepsilon; k)$$

Отсюда вытекает соотношение

$$-\frac{2}{\pi k} \frac{1}{\sqrt{\sin^2[\pi/(2k)] + \varepsilon}} < \lambda(\tilde{J}_\varepsilon; k) \quad (4.8)$$

При возрастании k увеличивается и левая часть неравенства (4.8). Значит, для $k = 2, 3, \dots$ верна оценка

$$-\sqrt{2}/\pi < \lambda(\tilde{J}_\varepsilon; k) \quad (4.9)$$

Пусть функция γ представлена своим рядом Фурье

$$\gamma(\zeta) = (a_0/2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi\zeta + b_k \sin k\pi\zeta$$

Тогда согласно (4.7) находим

$$b(\gamma, \gamma) \geq (\Lambda + \lambda(\tilde{J}_\varepsilon; 0)) \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\Lambda + \lambda(\tilde{J}_\varepsilon; k)] (a_k^2 + b_k^2) \quad (4.10)$$

В силу (4.9) положительны все коэффициенты ряда (4.10). Более того, квадратичная форма $b(\gamma, \gamma)$ положительно определена, т.е. $b(\gamma, \gamma) \geq c(\gamma, \gamma)$, где $c = 1 - (\sqrt{2}/\pi)$. Следовательно (см., например, [23], § 13), задача минимизации функционала (4.4) на пространстве функций интегрируемых с квадратом однозначно разрешима.

Наконец, используя рассуждения [24; разд. 4, гл. 1], нетрудно показать и гладкость решения уравнения (4.2) при сделанных предположениях относительно его правой части.

Замечание. Требование гладкости функции v гарантирует, что профиль штампа имеет непрерывно изменяющуюся касательную. Если в какой-либо точке это свойство теряется (подошва штампа имеет излом), то в окрестности данной точки так же как и в окрестностях концов штампа возникает явление трехмерного пограничного слоя.

5. Численное решение уравнения контакта вдоль линии. Пусть для простоты штамп имеет плоское основание, т.е. $v(z) = \delta_0 - \beta_1 z$, где δ_0 – поступательное смещение штампа, β_1 – угол его поворота относительно оси Ox_1 .

Таблица 1

	$\varepsilon = 0.15$	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.02$
\tilde{b}_0	0.158781	0.142051	0.120004	0.099201
\tilde{b}_1	0.233388	0.203032	0.164652	0.130262
\tilde{b}_2	0.028186	0.025481	0.021377	0.016870
\tilde{b}_3	0.021557	0.020730	0.018827	0.015878
\tilde{b}_4	0.003331	0.004316	0.005562	0.006279
\tilde{b}_5	0.000740	0.001737	0.003335	0.004773
\tilde{b}_6	-0.000497	-0.000240	0.000476	0.001598
\tilde{b}_7	-0.000572	-0.000528	-0.000125	0.000847
\tilde{b}_8	-0.000195	-0.000272	-0.000278	0.000082

Таблица 2

γ	$\varepsilon = 0.15$	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.02$
[3]	0.922	1.04	1.26	1.53
[13]	0.927	1.05	1.27	1.57
[5]	0.911	1.05	1.29	1.60
(5.5)	1.002	1.12	1.33	1.60
e_*	0.364	0.363	0.360	0.358

Воспользуемся методом Бубнова – Галеркина и будем искать приближенное решение уравнения (4.2) в виде разложения по полиномам Лежандра

$$P(z) = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} \sum_{n=0}^N b_n P_n(z/l) \quad (5.1)$$

При этом интегральные характеристики распределения контактных усилий – сила F_2 и момент M_1 относительно оси Ox_1 – вычисляются по формулам

$$F_2 = \int_{-l}^l P(z) dz = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} 2lb_0 \quad (5.2)$$

$$M_1 = - \int_{-l}^l z P(z) dz = - \frac{\pi E}{1 - \nu^2} \frac{2l^2}{3} b_1 \quad (5.3)$$

Учитывая симметричность ядра оператора (4.5), имеем

$$b_{2k} = \tilde{b}_{2k} \delta_0, \quad b_{2k+1} = -\tilde{b}_{2k+1} \beta_1 l \quad (5.4)$$

где \tilde{b}_{2k} и \tilde{b}_{2k+1} – безразмерные коэффициенты, зависящие от параметра ϵ (для числа $N = 8$ см. табл. 1).

Для сравнения построенного решения с известными [3, 13, 5] вычислим безразмерный коэффициент податливости упругого оснований (см. (5.2), (5.4)):

$$\gamma = \frac{E l \delta_0}{(1 - \nu^2) F_2} = \frac{1}{2\pi \tilde{b}_0} \quad (5.5)$$

Нетрудно видеть (см. табл. 2), что величина расхождения полученных результатов с найденными ранее оказывается $O(\epsilon)$ и лежит в пределах погрешности применяемого асимптотического метода.

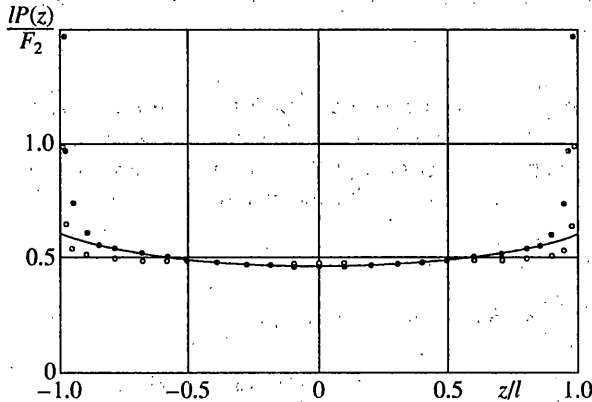


График плотности погонных давлений для случая $\beta_1 = 0$ и $\epsilon = 0,1$ представлен на фигуре. Точками показаны расчетные значения, полученные в [5], светлыми кружочками – результаты [3]. Налицо расхождение лишь в концевых зонах, где неверна гипотеза Галина (1.3) и не работает плоский пограничный слой (3.2). Подчеркнем [16], что для адекватного описания напряженного состояния в окрестностях концов штампа необходимо построить трехмерные пограничные слои (см., в частности, [18]).

Вводя емкостные характеристики штампа (см. электростатическую аналогию в [4]), формулы (5.2), (5.3) запишем в виде

$$F_3 = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c \delta_0, \quad M_1 = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} m \beta_1$$

Здесь c – поступательная емкость штампа с плоским гладким основанием, m – его вращательная емкость, причем

$$c = 2\tilde{b}_0 l, \quad m = (2/3)\tilde{b}_1 l^3 \quad (5.6)$$

Заметим, что именно простота формул (5.2), (5.3) и (5.6) выделяет метод Бубнова – Галеркина среди прочих (см. [25] и др.).

Предположим теперь, что штамп нагружен силой; приложенной с эксцентриситетом e (т.е. плечо силы равно el). Если $e = 0$, то штамп получает только поступательное перемещение. Когда $e \neq 0$, появляется перекося штамп, а при превышении некоторого критического значения e_* должен произойти отрыв подошвы штампа от поверхности

упругого основания. Результаты расчетов ϵ_* (из условия обращения в нуль плотности погонных давлений (5.1) на конце штампа) приведены в табл. 2.

6. Контакт по разомкнутой дуге. Пусть срединная линия штампа Γ представляет собой участок кривой $x_3 = f_1(s)$, $x_1 = f_2(s)$ с непрерывно изменяющейся кривизной $k(s) = f_2''(s)f_1'(s) - f_1''(s)f_2'(s)$, причем $[-l, l] \ni s$ – естественный параметр (длина дуги с учетом знака). Тогда квадрат расстояния между точкой на Γ с координатой t и точкой вблизи Γ с локальными координатами (s, y_1, y_2) , где y_1 – расстояние (с учетом знака) вдоль внутренней нормали к дуге Γ и $y_2 = x_2$, равен

$$R_y(s, t)^2 = R_0(s, t)^2 + |y|^2 - 2y_1 \{f_2'(s)[f_1(s) - f_1(t)] - f_1'(s)[f_2(s) - f_2(t)]\} \quad (6.1)$$

$$R_0(s, t)^2 = [f_1(s) - f_1(t)]^2 + [f_2(s) - f_2(t)]^2$$

Заметим, что выражение, заключенное в (6.1) в фигурные скобки, при $t \rightarrow s$ равно $2^{-1}k(s)(s-t)^2(1 + o(1))$ (см., например, [16]).

Считая для простоты ширину штампа $2h$ постоянной, в качестве малого параметра положим

$$\epsilon = hk \quad (6.2)$$

где $k = \max k(s)$ при $s \in \Gamma$. (Предполагается, что величина отношения радиуса кривизны $1/k$ к полудлине штампа l не может быть большой, когда штамп слабо изогнут, и в качестве малого параметра вместо (6.2) надо брать выражение (1.2).)

Чтобы срastить внутреннее асимптотическое представление (3.2) с внешним

$$v(P; \mathbf{x}) = \int_{-l}^l P(t) \mathbf{T}(x_1 - f_2(t), x_2, x_3 - f_1(t)) dt$$

необходимо добиться выполнения соотношения

$$P(s) 2 \ln \frac{2|y|}{h} + \int_{-l}^l \frac{P(t) dt}{R_y(s, t)} - \frac{\pi E}{1 - \nu^2} v(s) = o(1), \quad |y| k \sim \sqrt{\epsilon}, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (6.3)$$

Приравнявая левую часть равенства (6.3) нулю для $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt{\epsilon/k}$ (под штампом на глубине $\sqrt{h/k}$), приходим к уравнению

$$P(s) \ln \frac{4}{hk} + \int_{-l}^l \frac{P(t) dt}{\sqrt{R_0(s, t)^2 + (h/k)}} = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} v(s) \quad (6.4)$$

где $R_0(s, t)$ – расстояние между точками, лежащими на срединной линии штампа.

Заметим, что уравнение (6.4) сохраняет силу и для замкнутого контура Γ . Например, для окружности радиусом R имеем $l = \pi R$, $k = R^{-1}$, $s = R\theta$, $t = R\tau$ и $R_0(\theta, \tau) = 2R \sin[(\theta - \tau)/2]$, где $\theta, \tau \in (-\pi, \pi]$ (сравните с [16]).

7. Асимптотическая модель одностороннего контакта вдоль линии. Рассматривая упругое основание как деформируемую неудерживающую связь, приходим к формулировке контактной задачи с краевыми условиями в виде неравенств (см. [26–28] и др.). Методом [29], с применением апробированной в разделах 4 и 6 процедуры сшивания, для узкого прямоугольного штампа выводим результирующую задачу

$$P(z) > 0 \rightarrow P(z) \ln \frac{4l}{h} + \int_{-l}^l \frac{P(s) ds}{\sqrt{(z-s)^2 + hl}} = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} v(z) \quad (7.1)$$

$$P(z) = 0 \rightarrow \int_{-l}^l \frac{P(s) ds}{\sqrt{(z-s)^2 + hl}} \geq \frac{\pi E}{1 - \nu^2} v(z) \quad (7.2)$$

$$P(z) \geq 0, z \in [-l, l] \quad (7.3)$$

Следуя общей методике (см. [30, 29] и др.), сводим задачу (7.1)–(7.3) к вариационному неравенству на замкнутом выпуклом множестве K неотрицательных квадратично суммируемых функций. В обозначениях (4.3), (4.5), (4.6) получаем задачу отыскания функции $\gamma \in K$ такой, что

$$\Lambda(\gamma, \sigma - \gamma) + (J_\varepsilon \gamma, \sigma - \gamma) \geq (\varphi, \sigma - \gamma) \quad \forall \sigma \in K \quad (7.4)$$

Ввиду установленной в разд. 4 положительной определенности квадратичной формы $\Lambda(\sigma, \sigma) + (J_\varepsilon \sigma, \sigma)$, решение вариационного неравенства (7.4) существует и единственно.

Заметим, что задача (7.1)–(7.3) в отличие от полученной в [29] на основе асимптотической формулы (2.5), обладает следующим (характерным для контактных задач) свойством: там, где $\nu(z) < 0$, заведомо выполняется равенство $P(z) = 0$.

8. Давление узкого прямоугольного штампа на упругий слой конечной толщины. В рассматриваемом случае в качестве внешнего асимптотического представления вместо (2.1) следует назначить интеграл

$$v(P; \mathbf{x}) = \int_{-l}^l P(s) G(x_1, x_2, x_3 - s) ds \quad (8.1)$$

где $G(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ – решение задачи о нагружении упругого слоя единичной сосредоточенной силой.

На основании расчетов [31, 6] вертикальная компонента регулярной вектор-функции \mathbf{g} равна

$$g_2(0, 0, z - s) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E H} F(|z - s| / H) \quad (8.2)$$

$$F(t) = \int_0^\infty [1 - L(u)] J_0(ut) du$$

здесь H – толщина слоя, J_0 – функция Бесселя. В случае упругого слоя, жестко соединенного с недеформируемой основой

$$L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 1 + \kappa^2 + 4u^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

В результате модифицированной процедуры сращивания внешнего асимптотического представления (8.1) с внутренним (3.2) при учете (8.2) получаем уравнение

$$P(z) \ln \frac{4l}{h} + \int_{-l}^l \frac{P(s) ds}{\sqrt{(z-s)^2 + hl}} - \frac{1}{H} \int_{-l}^l F(|z-s|/H) P(s) ds = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} \nu(z) \quad (8.3)$$

Отметим, что уравнение (8.3) справедливо только при малых значениях отношения h/H , когда расстояние от подошвы штампа до дна слоя в масштабе ширины штампа оказывается большим, и в роли плоского пограничного слоя (3.7), (3.8) может выступать решение контактной задачи для упругой полуплоскости.

Заметим также, что разрешимость уравнения (8.3) без труда устанавливается для сравнительно малых значений l/H .

9. Заключение. Отметим два преимущества построенной асимптотической модели контакта вдоль линии перед известными приближенными решениями. Во-первых, при одинаковой точности интегральное уравнение (4.2) значительно проще выведенного в работах [1–3, 5]. Вследствие чего, при изучении сложных задач (например, в случае нескольких штампов) для получения численных результатов потребуются меньшие затраты, чем в [2–7]. Во-вторых, результирующая задача в отличие от [11–16] является корректно поставленной. Последнее обстоятельство оказывается весьма важным в задаче одностороннего контакта.

Автор благодарит С.А. Назарова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галин Л.А. О гипотезе Циммермана–Винклера для балок // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 4. С. 293–300.
2. Бородачев Н.М. Вдавливание штампа с основанием в виде узкого прямоугольника в упругое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 135–141.
3. Бородачев Н.М., Галин Л.А. Контактная задача для штампа с основанием в виде узкого прямоугольника // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 1. С. 125–130.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
5. Александров В.М., Сумбатян М.А. Асимптотическое решение интегральных уравнений типа свертки с логарифмической особенностью трансформанты ядра и приложение в задачах механики // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 80–88.
6. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
7. Vrbik J., Singh B.M., Danyluk H.T. Contact problem of a pair of flat rectangular stamps resting on an elastic half-space // Acta mech. 1995. V. 112. № 1–4. P. 77–82.
8. Ван-Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
9. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
10. Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Bd. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. 432 s.
11. Kalker J.J. On elastic line contact // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1972. V. 39. № 4. P. 1125–1132.
12. Sivashinsky G.I. The problem of a slender die // J. Elasticity. 1975. V. 5. № 2. P. 161–166.
13. Panek C., Kalker J.J. A solution for the narrow rectangular punch // J. Elasticity, 1977. V. 7. № 2. P. 213–218.
14. Tuck E.O., Mei C.C. Contact of one more slender bodies with an elastic half space // Int. J. Solids and Structures. 1983. V. 19. № 1. P. 1–23.
15. Бурмистров А.Н. Контактная задача теории упругости для узких областей // ПМТФ. 1988. № 5. С. 149–157.
16. Аргатов И.И., Назаров С.А. Давление на упругое полупространство узкого кольцевого штампа // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 810–825.
17. Федорюк М.В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Тр. Семинара С.Л. Соболева. 1980. Т. 1. С. 113–131.
18. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Об асимптотике решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанным тонким телом // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 1. С. 37–39.
19. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
20. Kalker J.J. The surface displacement of an elastic half-space loaded in a slender, bounded, curved surface region with application to the calculation of the contact pressure under a roller // J. Inst. Math. Appl. 1977. V. 19. № 2. P. 127–144.
21. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
22. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
23. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
24. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. М.: Гостехиздат, 1953. 804 с.
25. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наук. думка, 1978. 292 с.
26. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
27. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.

28. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во МГАПИ, 1997. 339 с.
29. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Мат. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 3–32.
30. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
31. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
10.11.1999