

УДК 531.39

© 2002 г. В.И. КУВЫКИН, Ю.Г. МАРТЫНЕНКО

ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматривается проводящее твердое тело произвольной формы, помещенное в заданное неоднородное магнитное поле. При медленных движениях тела, т.е. при большой глубине проникновения поля в проводник, определяется асимптотическое выражение для вихревых токов, индуцируемых внутри тела. В первом приближении по малому параметру задачи вычисляются пондеромоторные силы и моменты этих сил. Анализируется структура дифференциальных уравнений движения центра масс и движения около центра масс твердого тела. Обсуждаются динамические эффекты, возникающие из-за взаимосвязи поступательных и вращательных движений твердого тела в неоднородном магнитном поле.

Задачи о силовом воздействии магнитного поля на проводящее тело возникают в различных областях современной техники: при анализе влияния магнитного поля на динамику тел в космическом пространстве, при исследовании левитации тела в неконтактных подвесах, при изучении работы электродинамических демпферов, при конструировании магнитных катапульта, при разработке поезда на магнитном подвесе и т.д. В настоящее время оказались хорошо изученными вопросы движения проводящего тела около центра масс в однородном магнитном поле [1–4]. В этом случае главный вектор пондеромоторных сил обращается в нуль и задача сводится к анализу только углового движения тела относительно центра масс. При заданном движении проводящего шара типа регулярной прецессии построены дифференциальные уравнения задачи о движении быстро закрученного шара около центра масс в неоднородном магнитном поле, поскольку для тела, обладающего сферической симметрией, уравнения электродинамики можно решить методом разделения переменных [5].

Авторам неизвестны работы, посвященные анализу произвольного движения твердого тела, форма которого отлична от шара, в неоднородном магнитном поле, так как в этом случае главный вектор пондеромоторных сил отличен от нуля, а его величина, вообще говоря, зависит от углового положения тела относительно поля, что приводит к взаимосвязи поступательных и вращательных движений тела.

Сложность исследования динамики твердого тела в магнитном поле заключается в необходимости решения совместной системы уравнений электродинамики и уравнений динамики твердого тела. Построение упрощенных математических моделей в этой задаче возможно при использовании асимптотических методов разделения быстрых и медленных переменных [2] на определенных заранее выбранных классах движения твердого тела. В данной работе этот подход позволяет построить упрощенную математическую модель движения твердого тела в неоднородном поле при медленных движениях тела относительно поля.

1. Постановка задачи. Пусть неоднородное магнитное поле H^∞ , в котором находится проводящее твердое тело произвольной формы, задано в ограниченной области пространства, не содержащей источников тока, скалярным потенциалом U^0 , который

является гармонической функцией пространственных координат, так что вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}^\infty = \nabla U^0$.

Введем неподвижный правый ортогональный трехгранник ξ , связанный с источниками поля, и в нем сферическую систему координат r, θ, φ с полярной осью $O\xi_3$. Кроме того, введем правый ортогональный трехгранник x , жестко связанный с твердым телом с началом в точке O_1 . Единичный вектор вдоль оси $O\xi_3$ обозначим ξ , единичные орты системы координат $O_1x_1x_2x_3 - \mathbf{e}_i$.

Вначале изучим случай осесимметричного магнитного поля и предположим, что точки O и O_1 совпадают. Направим ось ξ_3 по оси симметрии магнитного поля. Тогда в сферической системе координат потенциал осесимметричного поля \mathbf{H}^∞ , в котором находится ротор, может быть представлен в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра

$$U^0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k P_k(\cos \theta) \quad (1.1)$$

где P_k – полином Лежандра степени k . Коэффициенты c_k определяются параметрами внешних источников поля и могут быть известными функциями времени для тела, находящегося в переменном магнитном поле.

Если в разложении (1.1) удержат только одно слагаемое, то потенциал будет представлен k -й гармоникой разложения по полиномам Лежандра

$$U^0 = c_k r^k P_k(\cos \theta) \quad (1.2)$$

При $k = 1$ потенциал (1.2) описывает однородное магнитное поле, вектор напряженности которого направлен по оси ξ_3 :

$$\mathbf{H}^\infty = \nabla(c_1 r \cos \theta) = c_1 \xi \quad (1.3)$$

При $k = 2$ имеем квазиоднородное магнитное поле "второй гармоники", когда

$$\mathbf{H}^\infty = \frac{c_2}{2} \nabla(3r^2 \cos^2 \theta - r^2) = c_2(3(\mathbf{r}, \xi)\xi - \mathbf{r}) \quad (1.4)$$

2. Решение уравнений Максвелла. Определение токов. В подвижной системе координат в квазистационарном приближении [6] уравнение для напряженности магнитного поля \mathbf{H}^i внутри однородного немагнитного ($\mu = 1$) проводника с проводимостью σ есть уравнение параболического типа

$$\Delta \mathbf{H}^i = \mu_0 \sigma \partial \mathbf{H}^i / \partial t, \quad \text{div } \mathbf{H}^i = 0 \quad (2.1)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Уравнения для напряженности поля \mathbf{H}^e в области, окружающей твердое тело и не содержащей источников поля, имеют вид

$$\text{rot } \mathbf{H}^e = 0, \quad \text{div } \mathbf{H}^e = 0 \quad (2.2)$$

На поверхности тела S вектор напряженности магнитного поля должен быть непрерывен

$$\mathbf{H}^i |_S = \mathbf{H}^e |_S \quad (2.3)$$

и должно быть выполнено условие непротекания тока через поверхность тела

$$(\mathbf{j}, \mathbf{n}) |_S = 0 \quad (2.4)$$

где \mathbf{j} – вектор плотности тока, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности тела S . Краевым условием в области, достаточно удаленной от поверхности тела S , является

совпадение поля \mathbf{H}^e с исходным полем \mathbf{H}^∞ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbf{H}^e - \nabla U^0) = 0 \quad (2.5)$$

Если в уравнении (2.1) перейти к безразмерным переменным, то при производной по времени появится безразмерный параметр ε :

$$\Delta \mathbf{H}^i = \varepsilon \nabla \mathbf{H}^i / \partial \tau, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}^i = 0 \quad (2.6)$$

Здесь введено безразмерное время $\tau = vt/L$, L – характерный размер тела, v – характерная скорость, $\varepsilon = \mu_0 \sigma L v$ представляет собой так называемое "магнитное число Рейнольдса".

Если магнитное число Рейнольдса ε является малым по сравнению с единицей $\varepsilon \ll 1$ (большая глубина проникновения поля в проводник по сравнению с его характерными размерами), то при производной по времени в уравнениях (2.6) возникает малый параметр, и задачу (2.6) необходимо рассматривать как сингулярно возмущенную. Как известно из теории решения этих уравнений [7], их асимптотическое решение состоит из регулярной (медленно меняющейся) части и функций типа пограничного слоя по времени, быстро изменяющихся в окрестности начальной точки.

Анализ системы уравнений (2.2)–(2.6) и оценка пограничных функций проведены в монографии [2]. Показано, что вне малого начального интервала времени, длина которого оценивается величиной порядка $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$, пограничными функциями можно пренебречь и рассматривать в решении только регулярную часть ряда.

В нулевом приближении по малому параметру ε поле внутри проводника совпадает с исходным полем.

Для построения первого приближения по ε решения задачи (2.2)–(2.6) удобно ввести вектор плотности тока $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H}^i$. Тогда для нахождения первого приближения для тока (в размерных переменных) возникает задача

$$-\operatorname{rot} \mathbf{j} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \nabla U^0}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (\mathbf{j}, \mathbf{n})|_S = 0. \quad (2.7)$$

Учитывая соотношения

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})}{r}, \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla(\cos \theta) = \frac{\boldsymbol{\xi}}{r} - \frac{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{r}}{r^3} = \frac{[\mathbf{r}, [\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}]]}{r^3} \quad (2.8)$$

найдем напряженность магнитного поля $\mathbf{H} = \nabla U^\infty$, в котором находится тело

$$\nabla U = c_k \{ r^{k-1} P'_k \boldsymbol{\xi} + r^{k-3} (kr P_k - (\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) P'_k) \mathbf{r} \} \quad (2.9)$$

Здесь штрих означает производную по аргументу x полинома Лежандра $P_k(x)$.

Рассмотрим соленоидальный вектор

$$\mathbf{Z}^* = \frac{c_k r^{k-1}}{k+1} P'_k[\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}]$$

Вычислим ротор этого вектора. Принимая во внимание дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра $r^2 \sin^2 \theta P''_k(\cos \theta) = 2r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}) P'_k(\cos \theta) - k(k+1)r^2 P_k(\cos \theta)$, соотношение $\operatorname{rot}[\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}] = -2\boldsymbol{\xi}$ и учитывая (2.8), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^* &= \frac{c_k}{k+1} [-2r^{k-1} P'_k \boldsymbol{\xi} + (k-1)r^{k-3} P'_k[\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}]] + r^{k-4} P''_k [r^2 \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r})\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}]]] = \\ &= \frac{c_k}{k+1} \{-2r^{k-1} P'_k \boldsymbol{\xi} + (k-1)r^{k-3} P'_k((\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{r} - r^2 \boldsymbol{\xi}) + r^{k-2} P''_k[(\mathbf{r} - (\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}) - \end{aligned}$$

$$-r^{k-4} P_k''(\mathbf{r}, \xi)((\mathbf{r}, \xi)\mathbf{r} - r^2 \xi) = \frac{c_k}{k+1} [-(k+1)r^{k-1} P_k' \xi + (k-1)r^{k-3} P_k'(\mathbf{r}, \xi) + r^{k-4} P_k''(r^2 - (\mathbf{r}, \xi)^2)\mathbf{r}] = c_k [-r^{k-1} P_k' \xi + r^{k-3} ((\mathbf{r}, \xi) P_k' - kr P_k)\mathbf{r}]$$

что с точностью до знака совпадает с градиентом потенциала внешнего магнитного поля (2.9).

Дифференцируя обе части равенства (2.9) по времени, имеем $-\text{rot } \dot{\mathbf{Z}}^* = \partial \mathbf{H} / \partial t$.
Причем

$$\dot{\mathbf{Z}}^* = \frac{\dot{c}_k r^{k-1}}{k+1} P_k'(\mathbf{r}, \xi) + \frac{c_k r^{k-2}}{k+1} \{r P_k'(\mathbf{r}, \xi) + (\mathbf{r}, \xi) P_k''(\mathbf{r}, \xi)\}$$

Таким образом, для потенциалов U^0 , определяемых формулой (1.2), решением уравнения (2.7) является вектор

$$\mathbf{j} = \mu_0 \sigma \left[c_k \sum_{m=1}^3 \frac{d\xi_m}{dt} (\mathbf{T}_m + \nabla \Psi_m) + \dot{c}_k (\mathbf{T}_0 + \nabla \Psi_0) \right] \quad (2.10)$$

$$\mathbf{T}_m = \frac{r^{k-2}}{k+1} \{r P_k'(\mathbf{r}, \mathbf{e}_m) + (\mathbf{r}, \mathbf{e}_m) P_k''(\mathbf{r}, \xi)\}; \quad \mathbf{T}_0 = \frac{r^{k-1}}{k+1} P_k'(\mathbf{r}, \xi)$$

где гармонические функции Ψ_m удовлетворяют краевым задачам Неймана, граничные условия для которых получаются из условия (2.4) непротекания тока через границу тела

$$\Delta \Psi_m = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} \right|_S = -(\mathbf{n}, \mathbf{T}_m)|_S \quad (m = 0, 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

После решения задачи (2.11) первое приближение для распределения вихревых токов, индуцируемых при медленном движении проводящего твердого тела произвольной формы в осесимметричном магнитном поле, будет полностью построено. Нахождение магнитного поля сводится к известной задаче векторного анализа определения соленоидального векторного поля по заданному распределению вихрей.

В силу линейности электродинамических задач (2.7); (2.11) решение для произвольного осесимметричного магнитного поля, у которого потенциал есть сумма гармоник (1.1), является суммой найденных решений.

3. Момент пондеромоторных сил. В заданном магнитном поле \mathbf{H} на твердое тело действует момент пондеромоторных сил [6]:

$$\mathbf{M} = \mu_0 \int_V [\mathbf{r}, \mathbf{j}, \mathbf{H}] dv \quad (3.1)$$

Здесь μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, \mathbf{j} – вектор плотности тока, интегрирование ведется по объему тела V .

Согласно [6] в осесимметричном магнитном поле вектор момента сил всегда ортогонален оси симметрии поля, поэтому существует вектор \mathbf{p} , такой что

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}, \xi] \quad (3.2)$$

Следовательно, для осесимметричного магнитного поля (1.2) задачу нахождения вектора момента (3.1) можно заменить задачей расчета вектора \mathbf{p} .

Разумеется, вектор \mathbf{p} в (3.2) определяется с точностью до произвольного вектора, коллинеарного вектору ξ . В качестве \mathbf{p} выберем вектор

$$\mathbf{p} = [\xi, \mathbf{M}] \quad (3.3)$$

Для нахождения проекции \mathbf{p} на подвижную ось x , умножим (3.3) на единичный

вектор этой оси e_i :

$$p_{xi} = (\mathbf{p}, \mathbf{e}_i) = ([\xi, \mathbf{M}], \mathbf{e}_i) = \mu_0 \int_V \{([\mathbf{e}_i, \xi], \mathbf{j})(\mathbf{r}, \mathbf{H}) - ([\mathbf{e}_i, \xi], \mathbf{H})(\mathbf{r}, \mathbf{j})\} dV \quad (3.4)$$

Если ввести в рассмотрение вектор $\mathbf{w}_i = [\mathbf{e}_i, \xi]$, то формулу (3.4) можно преобразовать к виду

$$p_{xi} = \mu_0 \int_V \{(\mathbf{j}, \mathbf{w}_i)(\mathbf{r}, \mathbf{H}) - (\mathbf{j}, \mathbf{r})(\mathbf{w}_i, \mathbf{H})\} dV = \mu_0 c_k \int_V (\mathbf{j}, \mathbf{b}_i) dV$$

$$c_k \mathbf{b}_i = \mathbf{w}_i(\mathbf{H}, \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{H}, \mathbf{w}_i) = [\mathbf{H}, [\mathbf{w}_i, \mathbf{r}]] = [\nabla U, [\mathbf{w}_i, \mathbf{r}]] \quad (3.5)$$

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{b}_i^* = \mathbf{b}_i + \mathbf{T}_i - (\mathbf{e}_i, \xi) \mathbf{b}_0 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{T}_i = \frac{r^{k-2}}{k+1} \{P'_k r[\mathbf{r}, \mathbf{e}_i] + P''_k[\mathbf{r}, \xi](\mathbf{r}, \mathbf{e}_i)\}$$

$$\mathbf{b}_0 = \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathbf{T}_i = \frac{r^{k-2}}{k+1} (P'_k r + P''_k(\mathbf{r}, \xi))[\mathbf{r}, \xi]$$

Подставляя (3.5) в (3.6), после соответствующих преобразований получим

$$\mathbf{b}_i^* = \Phi_1[\mathbf{r}, [\mathbf{w}_i, \mathbf{r}]] + \Phi_2 \mathbf{r} + \Phi_3[\mathbf{r}, [\xi, \mathbf{w}_i]] \quad (3.7)$$

$$\Phi_1 = \frac{r^{k-2}}{k+1} [k(k+1)P'_k + P''_k], \quad \Phi_2 = r^{k-2}(\mathbf{r}, \mathbf{w}_i)(\cos \theta P'_k), \quad \Phi_3 = \frac{r^{k-1}}{k+1} [P'_k + \cos \theta P''_k]$$

Учитывая, что $\text{rot}[\mathbf{r}, [\mathbf{w}_i, \mathbf{r}]] = 3[\mathbf{w}_i, \mathbf{r}]$, $\text{rot} \mathbf{r} = 0$, $\text{rot}[\mathbf{r}, [\xi, \mathbf{w}_i]] = -2[\xi, \mathbf{w}_i]$, найдем ротор от (3.7):

$$\text{rot} \mathbf{b}_i^* = [\nabla \Phi_1, [\mathbf{r}, [\mathbf{w}_i, \mathbf{r}]]] + 3\Phi_1[\mathbf{w}_i, \mathbf{r}] + [\nabla \Phi_2, \mathbf{r}] + [\nabla \Phi_3, [\mathbf{r}, [\xi, \mathbf{w}_i]]] - 2\Phi_3[\xi, \mathbf{w}_i] \quad (3.8)$$

Выполняя необходимые вычисления в (3.8), получим, что $\text{rot} \mathbf{b}_i^* = 0$, т.е. вектор \mathbf{b}_i^* потенциален. Любой соленоидальный вектор \mathbf{j} , нормальная составляющая которого на поверхности тела обращается в нуль, ортогонален в области V любому потенциальному вектору \mathbf{b}_i^* ([2], стр. 246), т.е.

$$\int_V (\mathbf{j}, \mathbf{b}_i^*) dV = 0 \quad (3.9)$$

Учитывая выражение для \mathbf{b}_i^* (3.6), из (3.9) найдем

$$\mu_0 \int_V (\mathbf{j}, \mathbf{b}_i) dV + \mu_0 (\mathbf{j}, \mathbf{T}_i) dV - \mu_0 (\mathbf{e}_i, \xi) \int_V (\mathbf{j}, \mathbf{b}_0) dV = 0$$

Следовательно,

$$p_{xi} = \mu_0 c_k \int_V (\mathbf{j}, \mathbf{b}_i) dV = -\mu_0 c_k \int_V (\mathbf{j}, \mathbf{T}_i) dV + \mu_0 (\mathbf{e}_i, \xi) c_k \int_V (\mathbf{j}, \mathbf{b}_0) dV$$

Последнее слагаемое в этой формуле можно не учитывать, так как оно не может изменить момент сил, действующих на твердое тело. Следовательно, проекции вектора "магнитного момента" в формуле (3.3) можно вычислять с помощью соотношения

$$p_{xi} = -\mu_0 c_k \int_V (\mathbf{j}, \mathbf{T}_i) dV \quad (3.10)$$

Подставляя (2.8) в (3.10), получим

$$p_{xi} = -\mu_0^2 \sigma c_k^2 \sum_{m=1}^3 \frac{d\xi_m}{dt} \int_V (\mathbf{T}_m + \nabla \Psi_m, \mathbf{T}_i) dv - \mu_0^2 \sigma \dot{c}_k c_k \int_V (\mathbf{T}_0 + \nabla \Psi_0, \mathbf{T}_i) dv \quad (3.11)$$

Вектора $\mathbf{T}_m + \nabla \Psi_m$ являются соленоидальными векторами, поэтому добавление в подынтегральных выражениях к вектору \mathbf{T}_i любого потенциального вектора $\nabla \Psi_i$ не изменяет величины объемных интегралов. Это обстоятельство позволяет представить выражение (3.11) в виде

$$p_{xi} = -\mu_0^2 \sigma c_k \left(c_k \sum_{m=1}^3 p_{mi} \dot{\xi}_m + \dot{c}_k p_{oi} \right) \quad (3.12)$$

$$p_{mi} = \int_V (\mathbf{T}_m, \mathbf{T}_i) dv - \int_V (\nabla \Psi_m, \nabla \Psi_i) dv \quad (3.13)$$

При вычислении компонент p_{mi} удобно выделить величины, которые не зависят от движения твердого тела. Для этого используем прямое разложение стандартизированных многочленов Лежандра по степеням независимого переменного [8] и выпишем явный вид проекций вектор \mathbf{T}_i на оси подвижного трехгранника $Ox_1x_2x_3$:

$$\mathbf{T}_i = \sum_{m=1}^3 t_{im} \mathbf{e}_m \quad (3.14)$$

$$t_{im} = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j (2k-2j)!}{j!(k-j)!(k-2j-1)!} (\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})^{k-2j-2} r^{2j} \{ (\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})([\mathbf{r}, \mathbf{e}_i], \mathbf{e}_m) + (k-2j-1)(\mathbf{r}, \mathbf{e}_i)([\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}], \mathbf{e}_m) \}$$

где $[k/2]$ означает целую часть числа $k/2$.

После подстановки в выражения для проекции t_{im} (3.14) формул $\boldsymbol{\xi} = \sum \xi_m \mathbf{e}_m$, $r \cos \theta = \sum \xi_m x_m$ ($m=1, 2, 3$) получаются конечные суммы слагаемых, представляющих собой произведения однородных полиномов степени k пространственных переменных x_1, x_2, x_3 на нестационарные множители вида $\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \xi_3^{m_3}$ ($m_1 + m_2 + m_3 = k$). Поэтому вектора \mathbf{T}_i удобно записать в форме

$$\mathbf{T}_m = \sum_{m_1 m_2 m_3} \mathbf{t}_{m_1 m_2 m_3}^{(m)} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \xi_3^{m_3} \quad (3.15)$$

и искать решение краевых задач (2.11) в виде

$$\Psi_m = \sum_{m_1 m_2 m_3} \Psi_{m_1 m_2 m_3}^{(m)} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \xi_3^{m_3} \quad (3.16)$$

что приводит к естественному разложению решений задач (2.11) на конечное число стационарных задач, зависящих только от формы тела.

Подставляя (3.15), (3.16) в (3.13), получаем для компонент тензора p_{mi} соотношения

$$p_{mi} = \sum (a_{mm_1 \dots m_{n-1} i i_1 \dots i_{n-1}} - b_{mm_1 \dots m_{n-1} i i_1 \dots i_{n-1}}) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{k-1}} \xi_{m_1} \dots \xi_{m_{k-1}}$$

где интеграл

$$a_{mm_1 \dots m_{n-1} i i_1 \dots i_{n-1}} = \int_V (\mathbf{t}_{mm_1 \dots m_{n-1}}, \mathbf{t}_{i i_1 \dots i_{n-1}}) dv$$

определяется формой тела, а при вычислении интегралов

$$b_{mm_1 \dots m_{n-1} i i_1 \dots i_{n-1}} = \int_V (\nabla \Psi_{mm_1 \dots m_{n-1}}, \nabla \Psi_{i i_1 \dots i_{n-1}}) dv$$

требуется решить стационарные задачи Неймана

$$\Delta \Psi_{i_1 \dots i_{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_{i_1 \dots i_{n-1}}}{\partial n} \Big|_S = -(\mathbf{n}, \mathbf{t}_{i_1 \dots i_{n-1}}) \Big|_S$$

4. Вычисление сил. Сила, действующая на проводящее тело в магнитном поле, определяется интегралом [6]

$$\mathbf{F} = \mu_0 \int_V [\mathbf{j}, \mathbf{H}] dV \quad (4.1)$$

Для нахождения интеграла, входящего в (4.1), умножим скалярно разность

$$\int_V [\mathbf{j}, \mathbf{H}] dV - \frac{1}{k} \int_V ((\mathbf{r}, \mathbf{j}), \nabla) \mathbf{H} dV \quad (4.2)$$

на единичный вектор \mathbf{e}_i оси подвижного трехгранника x_i и приведем выражение для получившейся проекции на ось x_i вектора (4.2) к виду

$$\frac{1}{k} \int_V [\mathbf{j}, \Phi] dV, \quad \Phi = k[\mathbf{H}, \mathbf{e}_i] + [\mathbf{r}, \mathbf{b}], \quad \mathbf{b} = \nabla(\mathbf{H}, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_i, \nabla) \mathbf{H} \quad (4.3)$$

Так как вектор $\mathbf{H} = \nabla U$ является градиентом гармонической функции, то вектор \mathbf{b} будет соленоидален. Действительно

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \operatorname{div} \nabla(\mathbf{H}, \mathbf{e}_i) = \Delta(\mathbf{H}, \mathbf{e}_i) = \Delta(\nabla U, \mathbf{e}_i) = (\nabla \Delta U, \mathbf{e}_i) = 0$$

Учитывая, что для любого вектора \mathbf{b} выполняется тождество $(\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{b}$, подсчитаем ротор вектора Φ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \Phi &= \operatorname{rot} \{k[\mathbf{H}, \mathbf{e}_i] + [\mathbf{r}, \mathbf{b}]\} = k[(\mathbf{e}_i, \nabla) \mathbf{H} - (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{e}_i + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i \operatorname{div} \mathbf{H}] + \\ &+ (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{r} - (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{r} = (k-2)\mathbf{b} - (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Функция U есть однородный гармонический полином степени k , поэтому проекции вектора \mathbf{H} есть однородные полиномы степени $k-1$, проекции вектора \mathbf{b} есть однородные полиномы степени $k-2$, и следовательно, в силу теоремы Эйлера об однородных функциях вектор $(k-2)\mathbf{b} - (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{b}$ в (4.4) обращается в нуль. Таким образом, $\operatorname{rot} \Phi = 0$, и интеграл (4.3) тоже обращается в нуль.

Следовательно, в неоднородном магнитном поле с потенциалом (1.2) формула (4.1) может быть преобразована к виду

$$\mathbf{F} = \mu_0 \frac{1}{k} \int_V ((\mathbf{r}, \mathbf{j}), \nabla) \mathbf{H} dV \quad (4.5)$$

Тем самым эквивалентность формул (4.1), (4.5) доказана. (Заметим, что в приведенном доказательстве нигде не использовалось свойство осевой симметрии магнитного поля, поэтому формулы (4.1) и (4.5) оказываются эквивалентными для любого магнитного поля, потенциал которого является однородным гармоническим полиномом степени k).

В магнитном поле второй гармоники ($k=2$) проекции вектора напряженности \mathbf{H} являются линейными функциями пространственных координат, после дифференцирования которых возникают константы. Поэтому \mathbf{H} вместе с оператором ∇ можно вынести в (4.5) из под знака интеграла

$$\mathbf{F} = \mu_0 (\mathbf{P}, \nabla) \mathbf{H}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}, \mathbf{j}] dV \quad (4.6)$$

Вектор \mathbf{P} в (4.6) представляет магнитный момент вихревых токов, а формула (4.6) по форме записи совпадает с известной формулой для линейных проводников [6]. Для токов, текущих по всему объему проводника, она справедлива лишь для вычисления сил при движении в поле, представляющем суперпозицию однородного поля и поля второй гармоники в разложении потенциала (1.1).

5. Медленные движения проводящего твердого тела в осесимметричном поле второй гармоники. Перейдем к общему случаю движения проводящего твердого тела в осесимметричном магнитном поле, представляющим собой в неподвижной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ постоянное поле второй гармоники (1.4):

$$\mathbf{H}^\infty = c_2(3(\mathbf{r}, \xi)\xi - \mathbf{r}), \quad c_2 = \text{const} \quad (5.1)$$

Введем систему координат $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$, связанную с центром масс O_1 тела, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$.

При движении тела поле в системе, связанной с телом, перестает быть осесимметричным и постоянным. Полагая в (5.1) $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{x}$, где \mathbf{r}' – радиус-вектор точки в системе координат $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$, связанной с твердым телом, \mathbf{x} – вектор смещения центра масс, найдем выражение для магнитного поля в системе $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$:

$$\mathbf{H}^\infty = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \quad (5.2)$$

$$\mathbf{H}_1 = c_2(3(\mathbf{x}, \xi)\xi - \mathbf{x}), \quad \mathbf{H}_2 = c_2(3(\mathbf{r}', \xi)\xi - \mathbf{r}')$$

т.е. задача сводится к определению сил и моментов при суперпозиции поля второй гармоники \mathbf{H}_2 , имеющего ось симметрии ξ и однородного поля \mathbf{H}_1 , напряженность которого согласно (5.2) зависит от смещения центра масс тела.

Запишем формулу для вычисления сил и моментов в виде суммы

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \mathbf{F}_{ki}, \quad \mathbf{M} = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \mathbf{M}_{ki} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{F}_{ki} = \mu_0 \int_V [\mathbf{j}_k, \mathbf{H}_i] dv, \quad \mathbf{M}_{ki} = \mu_0 \int_V [\mathbf{r}, [\mathbf{j}_k, \mathbf{H}_i]] dv \quad (5.4)$$

где через \mathbf{j}_k обозначена плотность вихревых токов, индуцируемых полем \mathbf{H}_k . Эти токи были определены выше в результате решения электродинамической задачи (2.7) и определяются формулами (2.10). Сила, действующая на проводящее тело в однородном магнитном поле, обращается в нуль, поэтому $\mathbf{F}_{11} = \mathbf{F}_{21} = 0$, а согласно (4.6):

$$\mathbf{F}_{k2} = \mu_0 [\mathbf{P}_k, \nabla] \mathbf{H}_2, \quad \mathbf{P}_k = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}', \mathbf{j}_k] dv$$

С учетом (5.2) выражения для главного вектора пондеромоторных сил запишутся в виде

$$\mathbf{F}_{k2} = \mu_0 c_2 [3(\mathbf{P}_k, \xi)\xi - \mathbf{P}_k] \quad (5.5)$$

В однородном поле главный момент пондеромоторных сил определяется векторным произведением магнитного момента тела на вектор напряженности магнитного поля, поэтому

$$\mathbf{M}_{k1} = [\mathbf{P}_k, \mathbf{H}_1]$$

Принимая во внимание (2.10), выпишем явные выражения для индуцированных токов

$$\mathbf{j}_1 = \mu_0 \sigma \left(\frac{1}{2} \left[\mathbf{r}', \frac{d\mathbf{H}_1}{dt} \right] + \nabla \Psi^{(1)} \right), \quad \mathbf{j}_2 = \mu_0 \sigma \frac{d}{dt} \{ c_2(\mathbf{r}', \xi) [\mathbf{r}', \xi] + \nabla \Psi^{(2)} \}$$

Проекция магнитного момента

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}', \mathbf{j}_1] dv'$$

на подвижные оси найдены в [2], где показано, что

$$P_{1x_u} = -\mu_0 \sigma \sum_{m=1}^3 p_{im} \frac{dH_{1x_m}}{dt}$$

Здесь постоянные коэффициенты p_{im} образуют симметричный положительно определенный тензор второго ранга. Коэффициенты p_{im} представляют собой производные по частоте от мнимой части компонент тензора поляризуемости тела в однородном поле. Постоянные p_{im} зависят только от формы области, занятой проводящим материалом. Стационарная электродинамическая задача определения компонент p_{im} аналогична механической задаче Стокса – Жуковского о движении тела с полостями, заполненными идеальной жидкостью, причем

$$p_{im} = (a_{im} - b_{im}) / 4 \quad (5.6)$$

где a_{im} – компоненты тензора "моментов инерции" и b_{im} – компоненты тензора "присоединенных моментов инерции", определяемых формулами

$$a_{im} = \int_V ([\mathbf{r}', \mathbf{e}_i], [\mathbf{r}', \mathbf{e}_m]) dv', \quad b_{im} = \int_V (\nabla \psi_i, \nabla \psi_m) dv'$$

а гармоническая функция ψ_i удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta \psi_i = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right|_S = (\mathbf{n}, [\mathbf{r}', \mathbf{e}_i]) \Big|_S \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

где \mathbf{r}' – радиус-вектор с началом в точке O_1 . Использование механической терминологии для коэффициентов a_{im}, b_{im} в (5.6) основано на чисто геометрической трактовке указанных коэффициентов, при которой компоненты тензора "инерции" следует разделить на плотность материала тела, а компоненты тензора "присоединенных моментов инерции" – на плотность жидкости. Тем не менее, используемая аналогия весьма конструктивна, поскольку имеются многочисленные работы и даже специальные справочники, содержащие значения моментов инерции и присоединенных моментов инерции для тел разнообразной формы. При этом, отпадает необходимость проведения новых расчетов во многих задачах электродинамики и электротехники.

Аналогичная ситуация возникает при расчете магнитного момента, порождаемого током \mathbf{j}_2 . Здесь требуется вычислить "моменты инерции третьего порядка"

$$a_{iml} = \int_V ([\mathbf{r}', \mathbf{e}_i], [\mathbf{r}', \mathbf{e}_m]) (\mathbf{r}', \mathbf{e}_l) dv'$$

Наиболее простая структура сил и моментов получается для тела в форме шара радиуса R . В этом случае гармонические функции ψ и все компоненты выписанных выше тензоров с неравными индексами обращаются в нуль.

Для шара радиуса R :

$$\mathbf{P}_1 = -\frac{2\pi}{15} \mu_0^2 \sigma R^5 \frac{d\mathbf{H}_1}{dt}, \quad \mathbf{P}_2 = 0, \quad \mathbf{F}_{22} = 0$$

$$\mathbf{F}_{12} = c_2 [3(\mathbf{P}_k, \xi) \xi - \mathbf{P}_k] = -\frac{2\pi}{15} \mu_0^2 \sigma R^5 c_2 \left[3 \left(\frac{d\mathbf{H}_1}{dt}, \xi \right) \xi - \frac{d\mathbf{H}_1}{dt} \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{15} \mu_0^2 \sigma R^5 c_2^2 [3(\mathbf{x}, \dot{\xi}) \dot{\xi} - 3(\dot{\mathbf{x}}, \xi) \xi - 6(\mathbf{x}, \dot{\xi}) \xi - \dot{\mathbf{x}}] \quad (5.7)$$

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21} = 0; \quad \mathbf{M}_{11} = -\frac{2\pi}{15} \mu_0^2 \sigma R^5 \left[\frac{d\mathbf{H}_1}{dt}, \mathbf{H}_1 \right]$$

$$\mathbf{M}_{22} = -\left[\mathbf{P}_{22} \frac{d\xi}{dt}, \xi \right], \quad \mathbf{P}_{22} = \frac{8\pi}{105} \mu_0^2 \sigma R^7 c_2^2 [3\mathbf{E} + \xi \xi^T]$$

Здесь \mathbf{E} – единичная матрица третьего порядка.

Учитывая, что скалярное произведение $(\xi, \dot{\xi}) = 0$, в матрице \mathbf{P}_{22} переменную часть можно не учитывать и упростить выражение для момента \mathbf{M}_{22} :

$$\mathbf{M}_{22} = -\frac{8\pi}{35} \mu_0^2 \sigma R^7 c_2^2 \left[\frac{d\xi}{dt}, \xi \right]$$

Формулы (5.7) позволяют записать уравнения движения проводящего шара радиуса R массой $m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ (ρ – плотность материала шара) с моментом инерции $I = \frac{2}{5}mR^2$ в неоднородном постоянном поле (5.1):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} + [\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}]$$

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}] + \alpha_1 \{3(\mathbf{x}, \xi)[\xi, \boldsymbol{\Omega}] - 3(\dot{\mathbf{x}}, \xi)\xi - 6(\mathbf{x}, [\xi, \boldsymbol{\Omega}])\xi - \dot{\mathbf{x}}\}$$

$$\dot{\xi} = [\xi, \boldsymbol{\Omega}] \quad (5.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{\alpha_3 + 9\alpha_2(\mathbf{x}, \xi)^2\} [\xi, [\xi, \boldsymbol{\Omega}]] + 3\alpha_2(\mathbf{x}, \xi)[\dot{\mathbf{x}}, \xi] - 3\alpha_2\{(\dot{\mathbf{x}}, \xi) + (\mathbf{x}, [\xi, \boldsymbol{\Omega}])\} [\mathbf{x}, \xi] - 3\alpha_2(\mathbf{x}, \xi)[\mathbf{x}, [\xi, \boldsymbol{\Omega}]] + \alpha_2[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$$

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{15m\Omega_0} \mu_0^2 \sigma c_2^2 R^3 = \frac{1}{10}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{15I\Omega_0} \mu_0^2 \sigma c_2^2 R^5 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{8\pi}{35I\Omega_0} \mu_0^2 \sigma c_2^2 R^5 = \frac{3}{7}$$

Уравнения (5.6) записаны в безразмерных переменных. При переходе к безразмерным переменным в качестве характерной длины выбран радиус шара R , характерной линейной скорости $V = R/T$, характерной угловой скорости $\Omega_0 = \mu_0^2 \sigma c_2^2 R^2 \rho^{-1} = 1/T$, T – характерное время движения.

Первое уравнение в (5.8) определяет производные от проекции вектора смещения центра шара на подвижные оси, жестко связанные с шаром. Второе уравнение в (5.8) следует из теоремы о движении центра масс шара, третье уравнение – это кинематическое уравнение Пуассона для проекций единичного вектора оси симметрии магнитного поля, последнее уравнение вытекает из теоремы об изменении кинетического момента относительно центра масс. Поскольку главный вектор и главный момент пондеромоторных сил зависят от положения, скорости центра масс и параметров угловых движений, то уравнения движения центра масс и вращения относительно центра масс оказываются в (5.8) взаимосвязанными.

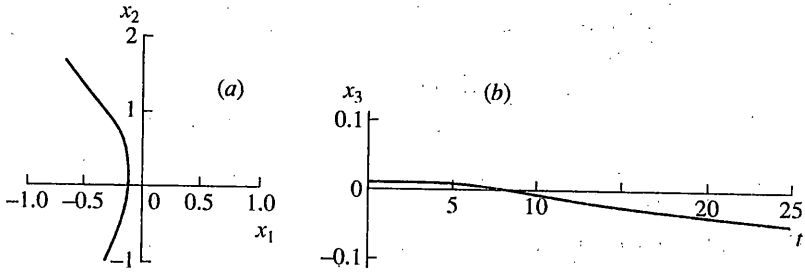
Результаты численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений 12-го порядка (5.8) приведены на фиг. 1–5. Расчеты проводились с помощью пакета "Математика 3.0". Начальные условия для положения центра масс и вектора его скорости принимались

$$x_1|_{t=0} = -0.3, \quad x_2|_{t=0} = -1, \quad x_3|_{t=0} = -0.01$$

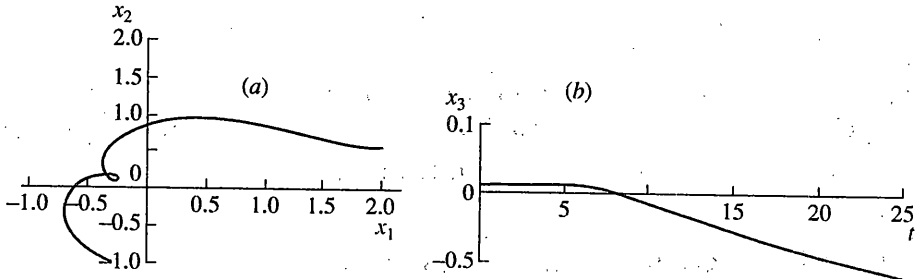
$$v_1|_{t=0} = 0.05, \quad v_2|_{t=0} = -0.3, \quad v_3|_{t=0} = 0.0$$

В начальный момент времени вектор оси x_3 параллелен оси симметрии поля ξ , т.е.

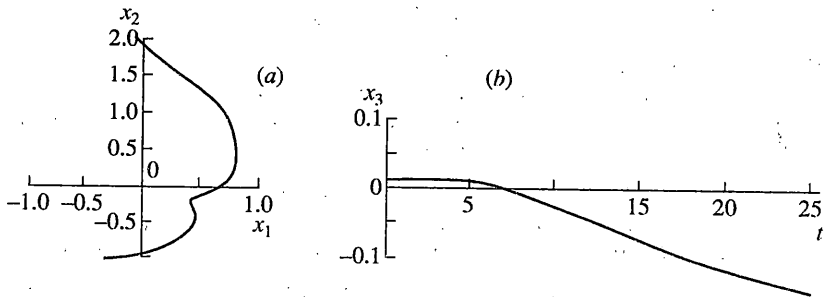
$$\xi_1|_{t=0} = 0, \quad \xi_2|_{t=0} = 0, \quad \xi_3|_{t=0} = 1$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 1 приведена траектория движения центра незакрученного шара, когда

$$\Omega_1|_{t=0} = \Omega_2|_{t=0} = \Omega_3|_{t=0} = 0 \quad (5.9)$$

Если выбрать вектор начальной угловой скорости шара коллинеарным оси симметрии магнитного поля

$$\Omega_1|_{t=0} = \Omega_2|_{t=0} = 0, \quad \Omega_3|_{t=0} = 1 \quad \text{и} \quad \Omega_1|_{t=0} = \Omega_2|_{t=0} = 0, \quad \Omega_3|_{t=0} = -1 \quad (5.10)$$

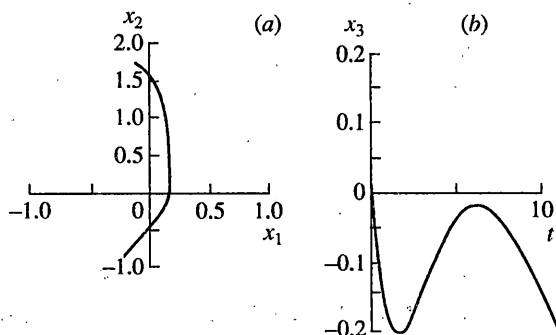
то получаем траектории, построенные соответственно на фиг. 2 и 3.

Наконец, фиг. 4 иллюстрирует возможность "генерации" колебаний центра шара вдоль оси симметрии поля, когда вектор начальной угловой скорости шара

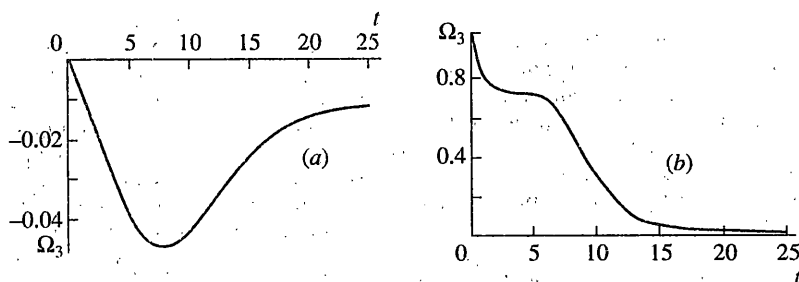
$$\Omega_1|_{t=0} = 0; \quad \Omega_2|_{t=0} = 1, \quad \Omega_3|_{t=0} = 0 \quad (5.11)$$

ортогонален этой оси.

На фиг. 5 приведены зависимости от времени составляющей угловой скорости шара Ω_3 , коллинеарной оси симметрии поля. Этот пример демонстрирует возможность раскрутки шара на некоторых временных интервалах за счет движения центра масс.



Фиг. 4



Фиг. 5

Взаимосвязь угловых и поступательных движений шара может также приводить к возникновению составляющих угловой скорости по другим осям, изменению ориентации шара относительно поля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-00212).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 288 с.
2. Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
3. Кувыкин В.И., Мартыненко Ю.Г. Оценка тормозящего момента, действующего на электродинамический демпфер неконтактного подвеса // Электричество. 1994. № 11. С. 30–33.
4. Рабинович Б.И., Лебедев В.Г., Мытарев А.И. Вихревые процессы и динамика твердого тела. М.: Наука, 1992. 296 с.
5. Линьков Р.В., Урман Ю.М. Силовое воздействие на проводящий шар, движущийся в магнитном поле // ЖТФ. 1977. Т. 47. № 4. С. 716–723.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 306 с.
7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 273 с.
8. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 415 с.
9. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною каплею жидкостью. Собр. соч. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. Т. 2. С. 152–309.