МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2002

УДК 531.38

© 2002 г. Ю.Н. ЧЕЛНОКОВ

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЕ КВАТЕРНИОНЫ И ЭТАЛОННЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ. Ч. 2

Рассматриваются эталонные дифференциальные уравнения, описывающие желаемую динамику управляемого углового движения твердого тела, синтезируются три группы законов управления, использующих кватернионные и векторные кинематические параметры вращательного движения. Обсуждается построение программного углового движения и программного управления, определение коэффициентов (скалярных, матричных, кватернионных) усиления нелинейных обратных связей, обеспечивающих желаемые качественные и количественные характеристики переходных процессов, предлагаются алгоритмы управления.

1. Эталонные дифференциальные уравнения переходных процессов. Стабилизирующие управления $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$, $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ и $\delta\mathbf{E}_x$, $\Delta\mathbf{E}_x$ [1] будем формировать таким образом, чтобы уравнения возмущенного углового движения твердого тела, замкнутые этими законами управления, принимали эталонные дифференциальные формы. В качестве эталонных дифференциальных форм для уравнений возмущенного движения твердого тела в переменных ν_υ и ν_υ^*, Θ_ξ и Θ_x примем формы (1.1) и (1.2):

$$y^{\cdot\cdot} + P_0 y^{\cdot} + K(\mathbf{p}_\upsilon)y^{\cdot} + Q_0 y + K(\mathbf{q}_\upsilon)y = 0, \quad y = \nu_\upsilon, \Theta_\xi \tag{1.1}$$

$$z^{\cdot\cdot} + P_0^* z^{\cdot} - K(\mathbf{p}_\upsilon^*)z^{\cdot} + Q_0^* z - K(\mathbf{q}_\upsilon^*)z = 0, \quad z = \nu_\upsilon^*, \Theta_x \tag{1.2}$$

а для уравнений в переменных $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}^*$ – формы (1.3) и (1.4):

$$\mathbf{N}^{\cdot\cdot} + \mathbf{p} \circ \mathbf{N}^{\cdot} + \mathbf{q} \circ (\mathbf{N} - 1) = 0 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{N}^{*\cdot\cdot} + \mathbf{N}^{*\cdot} \circ \mathbf{p}^* + (\mathbf{N}^* - 1) \circ \mathbf{q}^* = 0 \tag{1.4}$$

Формы (1.1), (1.2) – матричные линейные дифференциальные уравнения второго порядка относительно трехмерных переменных (матриц – столбцов) y и z с постоянными коэффициентами. В них P_0, P_0^* и Q_0, Q_0^* – диагональные матрицы с постоянными диагональными элементами p_{ok}, p_{ok}^* и q_{ok}, q_{ok}^* (k = 1, 2, 3) соответственно; $K(\mathbf{p}_\upsilon)$, $K(\mathbf{p}_\upsilon^*)$ и $K(\mathbf{q}_\upsilon)$, $K(\mathbf{q}_\upsilon^*)$ – постоянные кососимметрические матрицы вида (4.1) [1], сопоставляемые векторам $\mathbf{p}_\upsilon$, $\mathbf{p}_\upsilon^*$ и $\mathbf{q}_\upsilon$, $\mathbf{q}_\upsilon^*$, имеющим компоненты p_k, p_k^* и q_k, q_k^*

соответственно. В случаях, когда $p_{0k} = p_0$, $p_{0k}^* = p_0^*$, $q_{0k} = q_0$, $q_{0k}^* = q_0^*$, матрицы $P_0 = p_0E$, $P_0^* = p_0^*E$, $Q_0 = q_0E$, $Q_0^* = q_0^*E$, где E – трехмерная единичная матрица, и уравнения (1.1), (1.2) могут быть записаны в векторном виде:

$$\mathbf{y}^{\cdot\cdot} + p_0\mathbf{y}^{\cdot} + \mathbf{p}_v \times \mathbf{y}^{\cdot} + q_0\mathbf{y} + \mathbf{q}_v \times \mathbf{y} = 0 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot} + p_0^*\mathbf{z}^{\cdot} + \mathbf{z}^{\cdot} \times p_v^* + q_0^*\mathbf{z} + \mathbf{z} \times q_v^* = 0 \tag{1.6}$$

Формы (1.3) и (1.4) – кватернионные линейные дифференциальные уравнения второго порядка относительно кватернионных переменных $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}^*$ с постоянными кватернионными коэффициентами

$$\mathbf{p} = p_0 + \mathbf{p}_v = p_0 + \sum_{k=1}^{3} p_k\mathbf{i}_k, \quad \mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q}_v = q_0 + \sum_{k=1}^{3} q_k\mathbf{i}_k$$

$$\mathbf{p}^* = p_0^* + \mathbf{p}_v^* = p_0^* + \sum_{k=1}^{3} p_k^*\mathbf{i}_k, \quad \mathbf{q}^* = q_0^* + \mathbf{q}_v^* = q_0^* + \sum_{k=1}^{3} q_k^*\mathbf{i}_k$$

Введем новые кватернионные переменные $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{N} - 1$, $\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{N}^* - 1$. Уравнения (1.3), (1.4) примут вид

$$\boldsymbol{\mu}^{\cdot\cdot} + \mathbf{p} \circ \boldsymbol{\mu}^{\cdot} + \mathbf{q} \circ \boldsymbol{\mu} = 0 \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{\mu}^{*\cdot\cdot} + \boldsymbol{\mu}^{*\cdot} \circ \mathbf{p}^* + \boldsymbol{\mu}^* \circ \mathbf{q}^* = 0 \tag{1.8}$$

Отметим, что если невозмущенному (программному) движению твердого тела соответствуют частные решения $\mathbf{N} = 1$, $\mathbf{N}^{\cdot} = 0$ и $\mathbf{N}^* = 1$, $\mathbf{N}^{*\cdot} = 0$ уравнений (1.3) и (1.4), то этому движению тела соответствуют нулевые частные решения $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{\cdot} = 0$ и $\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\mu}^{*\cdot} = 0$ уравнений (1.7) и (1.8), для чего и были введены новые переменные $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\mu}^*$.

При выделении скалярной и векторной частей в кватернионном уравнении (1.7) получаем систему из скалярного (1.9) и векторного (1.10) уравнений:

$$\mu_0^{\cdot\cdot} + p_0\mu_0^{\cdot} - \mathbf{p}_v \cdot \boldsymbol{\mu}_v^{\cdot} + q_0\mu_0 - \mathbf{q}_v \cdot \boldsymbol{\mu}_v = 0 \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{\mu}_v^{\cdot\cdot} + p_0\boldsymbol{\mu}_v^{\cdot} + \mu_0^{\cdot}\mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \boldsymbol{\mu}_v^{\cdot} + q_0\boldsymbol{\mu}_v + \mu_0\mathbf{q}_v + \mathbf{q}_v \times \boldsymbol{\mu}_v = 0 \tag{1.10}$$

Аналогичной системе эквивалентно кватернионное уравнение (1.8).

Кватернионные уравнения (1.7), (1.8) эквивалентны матричным

$$\mu^{\cdot\cdot} + m(\mathbf{p})\mu^{\cdot} + m(\mathbf{q})\mu = 0 \tag{1.11}$$

$$\mu^{*\cdot\cdot} + n(\mathbf{p}^*)\mu^{*\cdot} + n(\mathbf{q}^*)\mu^* = 0 \tag{1.12}$$

где μ, μ^* – матрицы – столбцы размерами 4×1 с элементами $\mu_0 = \mathrm{N}_0 - 1$, $\mu_k = \mathrm{N}_k$ и $\mu_0^* = \mathrm{N}_0^* - 1$, $\mu_k^* = \mathrm{N}_k^*$ $(k = 1, 2, 3)$ соответственно; $m(\mathbf{p})$, $m(\mathbf{q})$ и $n(\mathbf{p}^*)$, $n(\mathbf{q}^*)$ – кватернионные матрицы, сопоставляемые кватернионам $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$, имеющие вид [2, 3]:

$$m(\mathbf{x}) = \begin{Vmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{Vmatrix}, \quad n(\mathbf{x}) = \begin{Vmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{Vmatrix} \tag{1.13}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*$

Кватернионные матрицы $m(\mathbf{x})$ и $n(\mathbf{x})$ представим в виде

$$m(\mathbf{x}) = x_0E + m(\mathbf{x}_v), \quad n(\mathbf{x}) = x_0E + n(\mathbf{x}_v) \tag{1.14}$$

где E – четырехмерная единичная матрица; $m(\mathbf{x}_\upsilon)$, $n(\mathbf{x}_\upsilon)$ – кватернионные матрицы вида (1.13), сопоставляемые вектору $\mathbf{x}_\upsilon$, являющиеся четырехмерными кососимметрическими матрицами.

Учитывая (1.14), запишем уравнения (1.11), (1.12) в виде

$$\mu^{\cdot\cdot} + p_0\mu^{\cdot} + m(\mathbf{p}_\upsilon)\mu^{\cdot} + q_0\mu + m(\mathbf{q}_\upsilon)\mu = 0 \tag{1.15}$$

$$\mu^{*\cdot\cdot} + p_0^*\mu^{*\cdot} + n(\mathbf{p}_\upsilon^*)\mu^{*\cdot} + q_0^*\mu^* + n(\mathbf{q}_\upsilon^*)\mu^* = 0 \tag{1.16}$$

В соответствии с известной классификацией вторые слагаемые в уравнениях (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), (1.15), (1.16) определяют собой управляющие диссипативные силы, третьи слагаемые – гироскопические, четвертые – потенциальные (консервативные) силы, пятые – силы радиальной коррекции.

2. Законы стабилизирующих управлений. Построим законы стабилизирующих управлений, отвечающие эталонным дифференциальным формам (1.1)–(1.4) уравнений возмущенного движения твердого тела с замкнутой системой управления движением. Выражая из уравнений (1.1), (1.2) вторые производные $\nu_\upsilon^{\cdot\cdot}$, $\nu_\upsilon^{*\cdot\cdot}$, $\Theta_\xi^{\cdot\cdot}$, $\Theta_x^{\cdot\cdot}$ и подставляя их в матричные соотношения (4.11)–(4.14) [1], получаем, учитывая (4.2), (4.4), (4.6), (4.8) [1], следующие выражения для управлений δu_ξ, Δu_x:

$$\delta u_\xi = -\nu_0^{-1}[E + (C(\boldsymbol{\nu}))^T]\{(½)[P_0 + K(\mathbf{p}_\upsilon)][\nu_0 E - K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon)]\delta\omega_\xi + [Q_0 + K(\mathbf{q}_\upsilon)]\nu_\upsilon\} +$$
$$+ (2\nu_0)^{-1}\,|\,\delta\boldsymbol{\omega}|^2\,\nu_\upsilon \tag{2.1}$$

$$\Delta u_x = -(\nu_0^*)^{-1}[E + C(\boldsymbol{\nu}^*)]\{(½)[P_0^* - K(\mathbf{p}_\upsilon^*)][\nu_0^* E + K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon^*)]\Delta\omega_x + [Q_0^* - K(\mathbf{q}_\upsilon^*)]\nu_\upsilon^*\} +$$
$$+ (2\nu_0^*)^{-1}\,|\,\Delta\boldsymbol{\omega}|^2\,\nu_\upsilon^* \tag{2.2}$$

$$\delta u_\xi = -(1 + \boldsymbol{\Theta}^2)^{-1}[E + K(\boldsymbol{\Theta}_\xi)]\{[P_0 + K(\mathbf{p}_\upsilon)][E - K(\boldsymbol{\Theta}_\xi) + S(\boldsymbol{\Theta}_\xi)]\delta\omega_\xi +$$
$$+ 2[Q_0 + K(\mathbf{q}_\upsilon)]\Theta_\xi\} - (\boldsymbol{\Theta}_\xi \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_\xi)\delta\omega_\xi \tag{2.3}$$

$$\Delta u_x = -(1 + \boldsymbol{\Theta}^2)^{-1}[E - K(\boldsymbol{\Theta}_x)]\{[P_0^* - K(\mathbf{p}_\upsilon^*)][E + K(\boldsymbol{\Theta}_x) + S(\boldsymbol{\Theta}_x)]\Delta\omega_x +$$
$$+ 2[Q_0^* - K(\mathbf{q}_\upsilon^*)]\Theta_x\} - (\boldsymbol{\Theta}_x \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x)\Delta\omega_x \tag{2.4}$$

Стабилизирующие угловые ускорения $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ и $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ находятся через величины δu_ξ и Δu_x в соответствии с соотношениями (4.15) и (4.16) [1]:

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_x = \overline{\boldsymbol{\lambda}} \circ \delta\mathbf{u}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\omega}_x \times \delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.5}$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = \Delta\mathbf{u}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.6}$$

Соотношения (2.5) и (2.1), (2.5) и (2.3), (2.6) и (2.2), (2.6) и (2.4) образуют различные законы формирования стабилизирующих угловых ускорений $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ и $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ в виде нелинейных функций ошибок по угловому положению и угловой скорости твердого тела. При сообщении этих ускорений твердому телу вместе с программными угловыми ускорениями $\boldsymbol{\epsilon}_z^0$, $\boldsymbol{\epsilon}_x^0$ в соответствии с формулами (2.3) или (2.4) [1]:

$$\boldsymbol{\epsilon}_x = \boldsymbol{\epsilon}_z^0(t) + \delta\boldsymbol{\epsilon}_x = \sum_{k=1}^{3}(\varepsilon_k^0(t) + \delta\varepsilon_k)\mathbf{i}_k \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_x = \boldsymbol{\epsilon}_x^0 + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = \overline{\boldsymbol{\nu}}^* \circ \boldsymbol{\epsilon}_z^0(t) \circ \boldsymbol{\nu}^* + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_x \tag{2.8}$$

дифференциальные нелинейные нестационарные уравнения возмущенного движения твердого тела принимают эталонную форму (1.1) или (1.2), инвариантную относительно любого выбранного программного углового движения. Сообщение требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\epsilon}$ твердому телу осуществляется за счет приложения к нему управляющего момента, формируемого в соответствии с формулой (2.1) [1]:

$$U_x = J\varepsilon_x + K(\boldsymbol{\omega}_x)J\omega_x - M_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}) \tag{2.9}$$

В частном случае скалярных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, когда

$$p_{0k} = p_0, \quad q_{0k} = q_0 \quad (k = 1,2,3), \quad \mathbf{p}_\upsilon = \mathbf{q}_\upsilon = 0$$

$$p_{0k}^* = p_0^*, \quad q_{0k}^* = q_0^* \quad (k = 1,2,3), \quad \mathbf{p}_\upsilon^* = \mathbf{q}_\upsilon^* = 0 \tag{2.10}$$

эти законы формирования стабилизирующих угловых ускорений с учетом соотношений (4.10) [1] принимают вид

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_x = (\nu_0^*)^{-1}((1/2)|\delta\boldsymbol{\omega}|^2 - 2q_0)\boldsymbol{\nu}_\upsilon^* - p_0\delta\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \times \delta\boldsymbol{\omega}_x =$$
$$= ((1/2)|\delta\boldsymbol{\omega}|^2 - 2q_0)\boldsymbol{\Theta}_x - p_0\delta\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \times \delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.11}$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = (\nu_0^*)^{-1}((1/2)|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2 - 2q_0^*)\boldsymbol{\nu}_\upsilon^* - p_0^*\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x =$$
$$= ((1/2)|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2 - 2q_0^*)\boldsymbol{\Theta}_x - p_0^*\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.12}$$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_x = -2q_0(1+\boldsymbol{\Theta}^2)^{-1}\boldsymbol{\Theta}_x - (p_0 + \boldsymbol{\Theta}_x \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_x)\delta\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x =$$
$$= -2q_0\nu_0^*\boldsymbol{\nu}_\upsilon^* - [p_0 + (\nu_0^*)^{-1}(\boldsymbol{\nu}_\upsilon^* \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_x)]\delta\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \times \delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.13}$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = -2q_0^*(1+\boldsymbol{\Theta}^2)^{-1}\boldsymbol{\Theta}_x - (p_0^* + \boldsymbol{\Theta}_x \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x)\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x =$$
$$= -2q_0^*\nu_0^*\boldsymbol{\nu}_\upsilon^* - [p_0^* + (\nu_0^*)^{-1}(\boldsymbol{\nu}_\upsilon^* \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x)]\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.14}$$

Закон (2.11) совпадает с законом, установленным в работе [4] (соотношение (3.9) этой работы). Законы (2.13) и (2.14) в случае, когда программное движение описывается соотношениями $\boldsymbol{\lambda}^0(t) = 1$, $\boldsymbol{\omega}_z^0(t) = 0$, совпадают, а также совпадают с законом, получающимся из соотношения (2.20) (или (2.23)) работы [5], если фигурирующую в нем величину $\mathbf{U}_{\upsilon y}$ положить равной нулю.

Выражая из уравнений (1.3), (1.4) вторые производные $\mathbf{N}^{\cdot\cdot}$, $\mathbf{N}^{*\cdot\cdot}$ и подставляя их в кватернионные соотношения (4.17), (4.18) [1], получаем следующие выражения для управлений $\delta\mathbf{U}_\xi$, $\Delta\mathbf{U}_x$:

$$\delta\mathbf{U}_\xi = -2\mathbf{q}\circ(1 - \mathbf{N}^{-1}) - \mathbf{p}\circ\delta\boldsymbol{\Omega}_\xi + (1/2)(|\delta\boldsymbol{\omega}|^2 - \omega_0^2) \tag{2.15}$$

$$\Delta\mathbf{U}_x = -2(1 - (\mathbf{N}^*)^{-1})\circ\mathbf{q}^* - \Delta\boldsymbol{\Omega}_x \circ \mathbf{p}^* + (1/2)(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2 - \omega_0^2) \tag{2.16}$$

Подставляя (2.15), (2.16) в (4.19), (4.20) [1], получаем формулы для формирования четырехмерных стабилизирующих управлений $\delta\mathbf{E}_x$ и $\Delta\mathbf{E}_x$:

$$\delta\mathbf{E}_x = -2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\circ\mathbf{q}\circ(\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{\lambda}^0(t)) - \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\circ\mathbf{p}\circ\boldsymbol{\Lambda}\circ\delta\boldsymbol{\Omega}_x + (1/2)(|\delta\boldsymbol{\omega}|^2 - \omega_0^2) - \omega_0\delta\boldsymbol{\omega}_x -$$
$$- \boldsymbol{\omega}_x \times \delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.17}$$

$$\Delta\mathbf{E}_x = -2(1 - (\mathbf{N}^*)^{-1})\circ\mathbf{q}^* - \Delta\boldsymbol{\Omega}_x\circ\mathbf{p}^* + (1/2)(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2 - \omega_0^2) -$$
$$- \omega_0\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.18}$$

В случае скалярных $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^*$ (в случае, когда выполняются условия (2.10)) соотношения (2.17) и (2.18) принимают вид

$$\delta\mathbf{E}_x = -2q_0(1 - (\mathbf{N}^*)^{-1}) - p_0\delta\boldsymbol{\Omega}_x + (1/2)(|\delta\boldsymbol{\omega}|^2 - \omega_0^2) - \omega_0\delta\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \times \delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.19}$$

$$\Delta\mathbf{E}_x = -2q_0^*(1 - (\mathbf{N}^*)^{-1}) - p_0^*\Delta\boldsymbol{\Omega}_x + (1/2)(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2 - \omega_0^2) - \omega_0\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.20}$$

Законы (2.17) и (2.19) формирования четырехмерного стабилизирующего углового ускорения совпадают с законами, полученными в работе [6] (соотношения (2.6) и (2.14) этой работы). В работе [7] эти законы предложено использовать для формирования управляющих моментов в системах управления ориентацией космических аппаратов (к сожалению, в статье содержится большое количество ошибок набора). Законы (2.18) и (2.20) совпадают с соотношениями, полученными в [6] при анализе построенных в этой работе законов формирования четырехмерного стабилизирующего углового ускорения твердого тела, использующих проекции векторов угловых скоростей и ускорений твердого тела (действительных и программных) на оси инерциальной системы координат.

Построенные законы формирования четырехмерных стабилизирующих угловых ускорений $\delta\mathbf{E}_x$ и $\Delta\mathbf{E}_x$ (2.17)–(2.20) – нелинейные кватернионные функции ошибок по угловому положению и угловой скорости твердого тела. Нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного движения твердого тела (3.35), (3.36) или (3.37), (3.38) [1], замкнутые этими законами управления, принимают вид эталонной дифференциальной линейной стационарной формы (1.3) или (1.4), инвариантной относительно любого выбранного программного углового движения.

Для получения трехмерных стабилизирующих угловых ускорений $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ и $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ необходимо выделить в кватернионных формулах (2.17)–(2.20) скалярные и векторные части. Скалярные части вместе с дифференциальными уравнениями для норм кватернионов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}^*$, аналогичными уравнению (1.8) [1]:

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{N}\|) = \omega_0 \|\mathbf{N}\|, \quad \frac{d}{dt}(\|\mathbf{N}^*\|) = \omega_0 \|\mathbf{N}^*\| \tag{2.21}$$

позволяют построить алгоритмы вычисления скалярной части ω_0 кватернионов $\delta\boldsymbol{\Omega}_x$ и $\Delta\boldsymbol{\Omega}_x$ и норм кватернионов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}^*$. Выражения, получаемые для векторных частей, являются алгоритмами формирования необходимых стабилизирующих угловых ускорений $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ и $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$, сообщение которых твердому телу (вместе с программными угловыми ускорениями) осуществляется за счет приложения к нему управляющего момента, формируемого в соответствии с (2.9), (2.7) или (2.9), (2.8).

Так, выделяя в более простом кватернионном соотношении (2.18) скалярную и векторную части и используя дифференциальное уравнение (2.21) для нормы кватерниона $\mathbf{N}^*$, получаем алгоритм формирования требуемого стабилизирующего углового ускорения $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ в виде соотношений

$$\begin{aligned} &\dot{s} = -(1/2)\omega_0 s, \quad \dot{\omega}_0 = -2q_0^*(1 - s\nu_0^*) + 2(\mathbf{q}_v^* \cdot \boldsymbol{\nu}_v^*)s - p_0^*\omega_0 + \\ &+ (1/2)(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2 - \omega_0^2) + \mathbf{p}_v^* \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} &\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = -2(1 - s\nu_0^*)\mathbf{q}_v^* - 2s(q_0^*\boldsymbol{\nu}_v^* + \boldsymbol{\nu}_v^* \times \mathbf{q}_v^*) - \omega_0\mathbf{p}_v^* - (p_0^* + \omega_0)\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \\ &+ (\mathbf{p}_v^* + \boldsymbol{\omega}_x) \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \end{aligned} \tag{2.23}$$

Выделяя в соотношениях (2.19) и (2.20) скалярные и векторные части, получаем алгоритмы формирования стабилизирующего ускорения $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ или $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ в виде соотношений (2.24), (2.25) или (2.26), (2.27):

$$\dot{s} = -(1/2)\omega_0 s, \quad \dot{\omega}_0 = -2q_0(1 - s\nu_0^*) - p_0\omega_0 + (1/2)(|\delta\boldsymbol{\omega}|^2 - \omega_0^2) \tag{2.24}$$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_x = -2q_0 s\boldsymbol{\nu}_v^* - (p_0 + \omega_0)\delta\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \times \delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.25}$$

$$\dot{s} = -(1/2)\omega_0 s, \quad \dot{\omega}_0 = -2q_0^*(1 - s\nu_0^*) - p_0^*\omega_0 + (1/2)(|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2 - \omega_0^2) \tag{2.26}$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = -2q_0^* s\boldsymbol{\nu}_v^* - (p_0^* + \omega_0)\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{2.27}$$

Соотношения (2.26), (2.27) получаются также из соотношений (2.22), (2.23), если в них положить $\mathbf{p}_{\upsilon}^{*} = \mathbf{q}_{\upsilon}^{*} = 0$. Соотношения (2.24), (2.25) совпадают с соотношениями (6.3), (6.4) работы [7].

Фигурирующая в соотношениях (2.22)–(2.27) новая переменная s определяется соотношением

$$s = \| \mathbf{N}^{*} \|^{-1/2} = (N_0^{*2} + N_1^{*2} + N_2^{*2} + N_3^{*2})^{-1/2} \tag{2.28}$$

и является величиной, обратной тензору кватерниона $\mathbf{N}^{*}$.

Каждый из алгоритмов (2.22), (2.23); (2.24), (2.25); (2.26), (2.27) формирования стабилизирующего углового ускорения $\delta\epsilon_x$ или $\Delta\epsilon_x$ содержит систему двух скалярных нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений относительно вспомогательных переменных s и ω_0 (одну из систем (2.22), (2.24), (2.26)), которая должна интегрироваться на бортовом компьютере в реальном масштабе времени, и конечное соотношение (одно из соотношений (2.23), (2.25), (2.27)) для формирования $\Delta\epsilon_x$ или $\delta\epsilon_x$, использующее переменные s и ω_0.

В случае скалярных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ законы формирования стабилизирующих угловых ускорений (2.11)–(2.14) проще законов (2.24), (2.25); (2.26), (2.27), однако они имеют особую точку $\varphi = 180$ град., в которой они вырождаются. Такую же особую точку имеют и общие векторно-матричные законы управления (2.1)–(2.6) (переменная $\boldsymbol{\Theta}$, фигурирующая в законах (2.3), (2.5) и (2.4), (2.6), в этой точке не определена). Общие кватернионные законы формирования стабилизирующих угловых ускорений (2.17); (2.18); (2.22), (2.23), так же как и частные законы (2.24), (2.25); (2.26), (2.27), особых точек не имеют (регулярны в целом).

3. Динамика управляемого углового движения твердого тела. Выбор коэффициентов законов управления. Построенные в п. 2 законы изменения стабилизирующих угловых ускорений представляют собой нелинейные функции компонент кватерниона (или вектора) ошибки ориентации и компонент вектора ошибки по угловой скорости твердого тела. Эти законы, реализуемые в системах управления угловым движением твердого тела, образуют нелинейные обратные связи по угловому положению и угловой скорости твердого тела со скалярными или матричными, или кватернионными коэффициентами усиления.

Нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного углового движения твердого тела, замкнутые построенными законами управления, принимают вид матричных или кватернионных дифференциальных линейных уравнений второго порядка, инвариантных относительно любого выбранного программного углового движения твердого тела, имеющих постоянные скалярные или матричные, или кватернионные коэффициенты. Эти коэффициенты уравнений являются коэффициентами усиления нелинейных обратных связей (коэффициентами построенных законов стабилизирующего управления). Поэтому динамика управляемого углового движения твердого тела для таких законов управления полностью описывается линейными стационарными дифференциальными уравнениями, приведенными в п. 1, а задача нахождения необходимых значений коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, обеспечивающих асимптотическую устойчивость и другие требуемые качественные и количественные характеристики управляемого углового движения твердого тела, сводится к задаче выбора коэффициентов этих уравнений. Эта задача имеет не единственное решение и может быть решена на основе анализа общих аналитических решений эталонных дифференциальных уравнений исходя из требуемых качественных и количественных характеристик переходных процессов и исходя из имеющихся ограничений на максимально допустимые угловые скорости и ускорения твердого тела. К качественным характеристикам относятся устойчивость (асимптотическая или неасимптотическая), вид процесса (колебательный, колебательный затухающий, апериодический), оптимальность в том или ином смысле. К количественным характеристикам относятся периоды и частоты колебаний, коэффициенты затухания, перерегулирование, запасы устойчивости, время переходного процесса и другие. С точки зрения теории управления задача выбора коэффициентов эталонных линейных стационарных дифференциальных уравнений может рассматриваться как задача параметрического синтеза, модального управления, а также может рассматриваться в других постановках.

3.1. Случай скалярных коэффициентов усиления обратных связей. В этом случае матричные и кватернионные эталонные дифференциальные уравнения распадаются на отдельные независимые скалярные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $p_0 = p_0^* = p$, $q_0 = q_0^* = q$. Полагая $p > 0$, $q > 0$, запишем общее решение кватернионного дифференциального уравнения (1.7) (уравнение (1.8) совпадает в этом случае по форме с уравнением (1.7)) для различных значений p и q

$$(1)\ \ p/2 < q^{1/2} \quad (p^2 < 4q) \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\mu} = e^{-kt}(\mathbf{c}_1 \cos(lt) + \mathbf{c}_2 \sin(lt)) \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\mu}^{\cdot} = -k\boldsymbol{\mu} + le^{-kt}(\mathbf{c}_2 \cos(lt) - \mathbf{c}_1 \sin(lt))$$

$$\mathbf{c}_1 = \boldsymbol{\mu}(0), \quad \mathbf{c}_2 = l^{-1}(\boldsymbol{\mu}^{\cdot}(0) + k\boldsymbol{\mu}(0))$$

$$(2)\ \ p/2 = q^{1/2} \quad (p^2 = 4q) \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{\mu} = e^{-kt}(\mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2), \quad \boldsymbol{\mu}^{\cdot} = -k\boldsymbol{\mu} + e^{-kt}\mathbf{c}_1 \tag{3.4}$$

$$\mathbf{c}_1 = \boldsymbol{\mu}^{\cdot}(0) + k\boldsymbol{\mu}(0), \quad \mathbf{c}_2 = \boldsymbol{\mu}(0)$$

$$(3)\ \ p/2 > q^{1/2} \quad (p^2 > 4q) \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\mu} = e^{-kt}(\mathbf{c}_1 e^{l^* t} + \mathbf{c}_2 e^{-l^* t}), \quad \boldsymbol{\mu}^{\cdot} = -k\boldsymbol{\mu} + l^* e^{-kt}(\mathbf{c}_1 e^{l^* t} - \mathbf{c}_2 e^{-l^* t}) \tag{3.6}$$

$$\mathbf{c}_1 = (2l^*)^{-1}[(l^* + k)\boldsymbol{\mu}(0) + \boldsymbol{\mu}^{\cdot}(0)]$$

$$\mathbf{c}_2 = \boldsymbol{\mu}(0) - \mathbf{c}_1 = (2l^*)^{-1}[(l^* - k)\boldsymbol{\mu}(0) - \boldsymbol{\mu}^{\cdot}(0)]$$

Здесь $k = p/2$, $l = (q - (p/2)^2)^{1/2}$, $l^* = ((p/2)^2 - q)^{1/2}$; $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ – произвольные кватернионные постоянные интегрирования, определяемые начальными (для момента времени $t = t_0 = 0$) значениями $\boldsymbol{\mu}(0)$, $\boldsymbol{\mu}^{\cdot}(0)$ кватернионов $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\mu}^{\cdot}$, связанными с начальными значениями $\boldsymbol{\Lambda}(0)$, $\boldsymbol{\omega}_x(0)$ искомых переменных $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\boldsymbol{\omega}_x$ соотношениями

$$\boldsymbol{\mu}(0) = \boldsymbol{\Lambda}(0) \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ}(0) - 1, \quad \boldsymbol{\mu}^{\cdot}(0) = (\tfrac{1}{2})\boldsymbol{\Lambda}(0) \circ \delta\boldsymbol{\Omega}_x(0) \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ}(0)$$

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_x(0) = \boldsymbol{\Omega}_x(0) - \overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}}_z(0) = \omega_0(0) + \boldsymbol{\omega}_x(0) - \overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}}_z(0) \tag{3.7}$$

Как видно из (3.2), (3.4), (3.6), для скалярных $p > 0$ и $q > 0$, удовлетворяющих условиям (3.1), (3.3), (3.5), значения кватерниона ошибки ориентации $\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} + 1$ и его первой производной по времени $\mathbf{N}^{\cdot} = \boldsymbol{\mu}^{\cdot}$ в процессе управления стремятся асимптотически соответственно к единице и нулю, что соответствует переводу твердого тела, имеющего произвольную начальную угловую скорость, из произвольного начального углового положения на любую заданную программную траекторию и дальнейшему асимптотически устойчивому движению твердого тела по программной траектории с требуемой программной угловой скоростью и программным угловым ускорением. При этом законы изменения всех переменных μ_j и $\mu_j^{\cdot}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) в процессе управления для скалярных p и q носят качественно одинаковый характер и имеют такие одинаковые количественные характеристики, как частоты (периоды) колебаний, коэффициенты затухания.

Анализ (3.2), (3.4), (3.6) показывает, что управляемое движение носит характер плоского эйлерова вращения твердого тела в случае, когда кватернион $\mathbf{N}^{\cdot}(0) = \boldsymbol{\mu}^{\cdot}(0) = 0$, а также в случае, когда векторные части $\mathbf{N}_v(0) = \boldsymbol{\mu}_v(0)$ и $\mathbf{N}_v^{\cdot}(0) = \boldsymbol{\mu}_v^{\cdot}(0)$ кватернионов $\mathbf{N}(0) = \boldsymbol{\mu}(0) + 1$ и $\mathbf{N}^{\cdot}(0) = \boldsymbol{\mu}^{\cdot}(0)$ параллельны, что означает равенство нулю для начального момента времени ошибки по угловой скорости твердого тела или (во втором случае) параллельность для этого момента времени вектора $\boldsymbol{\delta\omega}$ ошибки по угловой скорости твердого тела и вектора $\mathbf{N}_v(0) = \boldsymbol{\mu}_v(0)$ ошибки по угловому положению.

Соотношения (3.1)–(3.7) позволяют определить необходимые значения скалярных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей p и q исходя из требуемых качественных и количественных характеристик переходного процесса и исходя из имеющихся ограничений на максимально допустимые угловые скорости и ускорения твердого тела.

3.2. *Случай кватернионных коэффициентов усиления обратных связей.* Общее решение кватернионного дифференциального уравнения (1.7) в случае различных корней кватернионного характеристического уравнения построено в работе [8] в виде композиции кватернионных экспонент:

$$\boldsymbol{\mu} = e^{\mathbf{z}_1 t} \circ \mathbf{c}_1 + e^{\mathbf{z}_2 t} \circ \mathbf{c}_2 \tag{3.8}$$

где $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ – кватернионные постоянные интегрирования, определяемые начальными значениями переменных $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\mu}^{\cdot}$: $\mathbf{c}_1 = (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)^{-1} \circ [\mathbf{z}_2 \circ \boldsymbol{\mu}(0) - \boldsymbol{\mu}^{\cdot}(0)]$, $\mathbf{c}_2 = -(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)^{-1} \circ [\mathbf{z}_1 \circ \boldsymbol{\mu}(0) - \boldsymbol{\mu}^{\cdot}(0)]$, а $\mathbf{z}_i = z_{i0} + z_{i1}\mathbf{i}_1 + z_{i2}\mathbf{i}_2 + z_{i3}\mathbf{i}_3 = z_{i0} + \mathbf{z}_{iv}$ ($i = 1, 2$) – различные корни кватернионного характеристического уравнения

$$\mathbf{z}^2 + \mathbf{p} \circ \mathbf{z} + \mathbf{q} = 0 \tag{3.9}$$

Корни $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ находятся через кватернионные коэффициенты $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ уравнения (1.7) по формулам (знак плюс соответствует $i = 1$, знак минус – $i = 2$):

$$z_{i0} = \pm r^{1/2} - p_0/2$$

$$z_{i1} = -[(\pm r^{1/2} - p_0/2)a + c]/(\pm 2r^{1/2}) \tag{3.10}$$

$$z_{i2} = -2(\pm r^{1/2})b/(4r + a^2), \quad z_{i3} = ab/(4r + a^2) \quad (i = 1, 2)$$

где r – положительный корень кубического уравнения

$$f(r) = 16r^3 + 4(4a_1 + a^2)r^2 + 4(a_1a^2 - b^2 - a_2)r - a_2a^2 = 0 \tag{3.11}$$

$$a_1 = q_0 + \tfrac{1}{4}(a^2 - p_0^2), \quad a_2 = (c - \tfrac{1}{2}p_0 a)^2 \tag{3.12}$$

$$a = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}$$

$$c = (\mathbf{q}_v \cdot \mathbf{p}_v)/a = (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)/a \tag{3.13}$$

$$b = (\mathbf{q}_v^2 - c^2)^{1/2} = [q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - ((p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)/a)^2]^{1/2}$$

в которых $\mathbf{p}_v$, $\mathbf{q}_v$ – векторные части кватернионов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$.

Отметим, что условие существования различных корней $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ кватернионного характеристического уравнения (3.9) имеет вид неравенства

$$a(c - p_0a/2) \neq 0 \tag{3.14}$$

а также то, что условие существования положительного корня уравнения (3.11), имеющее вид $f(0) = -a_2a^2 < 0$, выполняется в силу (3.14) и второго равенства (3.12).

В этой же работе установлены две формы необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости нулевого частного решения $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{\cdot} = 0$ уравнения (1.7), соответствующего любому выбранному программному движению твердого тела $\boldsymbol{\lambda}^{\circ} = \boldsymbol{\lambda}^{\circ}(t)$, $\boldsymbol{\omega}_z^{\circ} = \boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t)$.

Первая форма этих условий имеет вид неравенств $z_{i0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < 0$ ($i = 1, 2$), означающих требование отрицательности скалярных частей кватернионных корней $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ уравнения (3.9). Эта форма вытекает из тригонометрического представления кватернионной экспоненты

$$e^{\mathbf{z}t} = e^{z_0 t}[\cos(|\mathbf{z}_v|t) + |\mathbf{z}_v|^{-1}(z_1\mathbf{i}_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3)\sin(|\mathbf{z}_v|t)]$$

где z_j – компонента кватерниона $\mathbf{z}$, $|\mathbf{z}_v| = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^{1/2}$, и вида общего решения (3.8) уравнения (1.7).

Вторая форма необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости получена в форме критериев Рауса – Гурвица для характеристического уравнения

$$[s^4 + 2p_0 s^3 + (2q_0 + \overline{\mathbf{p}} \circ \mathbf{p})s^2 + (\mathbf{p} \circ \overline{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \circ \overline{\mathbf{p}})s + \mathbf{q} \circ \overline{\mathbf{q}}]^2 = 0$$

полученного при рассмотрении кватернионного уравнения (1.7) как линейной системы дифференциальных уравнений восьмого порядка, и имеет вид

$$p_0 > 0, \quad 2p_0(2q_0 + \mathbf{p} \circ \overline{\mathbf{p}}) - (\mathbf{p} \circ \overline{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \circ \overline{\mathbf{p}}) > 0$$

$$2p_0(2q_0 + \mathbf{p} \circ \overline{\mathbf{p}})(\mathbf{p} \circ \overline{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \circ \overline{\mathbf{p}}) - 4p_0^2 \mathbf{q} \circ \overline{\mathbf{q}} - (\mathbf{p} \circ \overline{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \circ \overline{\mathbf{p}})^2 > 0$$

$$\mathbf{p} \circ \overline{\mathbf{p}} = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad \mathbf{q} \circ \overline{\mathbf{q}} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

$$\mathbf{p} \circ \overline{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \circ \overline{\mathbf{p}} = 2(p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3)$$

Укажем достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.7). Из формул (3.10) следует, что z_{10}, z_{20} будут отрицательными, если $p_0 > 0$ и $p_0/2 > r^{1/2}$ или $p_0^2/4 > r$. Так как $f(0) = -a_2 a^2 < 0$, то для выполнения неравенства $r < p_0^2/4$ достаточно потребовать, чтобы $f(p_0^2/4) > 0$. Последнее условие может быть записано в виде

$$q_0 p_0^4 + acp_0^3 + (a^2 q_0 - b^2 - c^2)p_0^2 + a^3 cp_0 - a^2 c^2 > 0 \tag{3.15}$$

Неравенство (3.15), дополненное соотношениями (3.13), и неравенство $p_0 > 0$ являются достаточными условиями асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.7) или решения $\mathbf{N} = 1$, $\mathbf{N}^{\cdot} = 0$ уравнения возмущенного движения (1.3), накладываемыми на компоненты кватернионных коэффициентов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$.

Приведенные соотношения позволяют определить необходимые значения кватернионных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ исходя из желаемой динамики переходного процесса и исходя из имеющихся ограничений на максимально допустимые угловые скорости и ускорения твердого тела.

Отметим следующую особенность кватернионного метода описания углового движения, представляющую интерес с точки зрения теории устойчивости управления движением. В соответствии с известной теоремой Ляпунова об устойчивости и установившегося движения по уравнениям первого приближения в случае использования для описания вращательного движения твердого тела угловых переменных (углов Эйлера или Крылова) для асимптотической устойчивости установившегося углового движения твердого тела необходимо и достаточно, чтобы все шесть корней характеристического уравнения системы уравнений первого приближения имели отрицательные вещественные части, в то время как в случае использования для описания вращательного движения кватернионов поворотов для асимптотической устойчивости установившегося углового движения твердого тела необходимо и достаточно, чтобы скалярные части двух кватернионных корней уравнения (3.9) имели отрицательные части. Таким образом, в случае использования кватернионного метода описания углового движения твердого тела вместо требования отрицательности шести скалярных величин имеет место требование отрицательности двух скалярных величин, имеющих смысл скалярных частей двух корней кватернионного характеристического уравнения. Эта особенность использования кватернионов может быть полезной как при изучении устойчивости движения, так и при изучении управления движением твердого тела (в особенности с использованием методов теории модального управления, когда целенаправленно изменяется расположение корней характеристического уравнения).

Указанная особенность кватернионного метода описания углового движения твердого тела отвечает эйлерову описанию пространственного углового движения, в соответствии с которым для асимптотической устойчивости установившегося движения твердого тела необходимо и достаточно асимптотической устойчивости движения по двум переменным: эйлерову углу поворота φ и его первой производной по времени $\varphi^{\cdot}$. В кватернионных уравнениях возмущенного движения твердого тела содержатся переменные ν_0 и $\nu_0^{\cdot}$, однозначно связанные с переменными φ и $\varphi^{\cdot}$: $\nu_0 = \cos(\varphi/2)$, $\nu_0^{\cdot} = -(\varphi^{\cdot}/2)\sin(\varphi/2)$. Эти переменные являются скалярными частями кватернионных переменных $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\nu}^{\cdot}$, что и находит отражение в требовании отрицательности скалярных частей двух кватернионных корней характеристического уравнения.

Отметим, что для определения необходимой структуры управляющих сил и изучения устойчивости управляемого движения твердого тела может быть использован метод исследования устойчивости по математической структуре действующих сил, в том числе известные теоремы Томсона и Тета. При этом необходимо иметь в виду, что если при использовании эталонных дифференциальных уравнений в кватернионных переменных мы имеем дело с четным числом координат изучаемых систем, то при использовании эталонных моделей в векторных переменных – с нечетным, что сказывается на выборе математической структуры используемых управляющих сил. Отметим также, что при изучении движения твердого тела на основе уравнений возмущенного движения в кватернионных переменных могут быть использованы теоремы об устойчивости движения по отношению к части переменных (двум из восьми), так как устойчивость движения твердого тела полностью определяется поведением скалярных частей кватернионных переменных $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\nu}^{\cdot}$.

4. Программное движение и управление. В построенных законах управления содержатся величины $\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(t)$, $\boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t)$, $\boldsymbol{\epsilon}_z^{\circ}(t)$, описывающие собой программное (невозмущенное) угловое движение твердого тела ($\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(t)$ – кватернион программной ориентации, $\boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t)$ – кватернион программной угловой скорости, $\boldsymbol{\epsilon}_z^{\circ}(t)$ – кватернион программного углового ускорения). Их формирование определяется конкретно решаемой задачей.

В случае перевода твердого тела, имеющего произвольную начальную угловую скорость, из произвольного заранее незаданного начального углового положения в заданное ориентированное положение покоя, характеризуемое кватернионом ориентации $\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$, в законах управления следует положить $\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(t) = \boldsymbol{\lambda}^{\circ} = \text{const}$, $\boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t) = 0$, $\boldsymbol{\epsilon}_z^{\circ}(t) = 0$. При этом ошибки по угловой скорости $\delta\boldsymbol{\omega}$ и $\Delta\boldsymbol{\omega}$ будут равны действительной абсолютной угловой скорости твердого тела $\delta\boldsymbol{\omega} = \Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$, а векторные произведения $\boldsymbol{\omega}_x(t) \times \delta\boldsymbol{\omega}_x = 0$, $\boldsymbol{\omega}_x(t) \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x = 0$.

В случае программного разворота твердого тела вокруг эйлеровой оси (когда векторная часть кватерниона ориентации $\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$ и векторы $\boldsymbol{\omega}^{\circ}$ и $\boldsymbol{\epsilon}^{\circ}$ параллельны) формирование величин $\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(t)$, $\boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t)$, $\boldsymbol{\epsilon}_z^{\circ}(t)$ описано в работах [7, 9, 10].

В случае решения задачи стыковки твердого тела с движущимся объектом или задачи обнаружения, наведения и слежения за движущимся объектом $\boldsymbol{\lambda}^\circ$ – кватернион ориентации, а $\boldsymbol{\omega}^\circ$ и $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$ – угловая скорость и угловое ускорение этого объекта (система координат Z в этом случае жестко связывается с движущимся объектом). Эти величины могут передаваться в систему управления движением твердого тела с борта движущегося объекта или формироваться системой наведения твердого тела.

В ряде случаев движущееся твердое тело должно быть ориентировано в пространстве так, чтобы его координатные оси совпадали с координатными осями системы координат Z, одна из осей которой направлена вдоль геоцентрической вертикали. Так, трехгранник Z может быть естественным трехгранником Дарбу, азимутально свободным трехгранником, орбитальным трехгранником. В случае, когда Z – орбитальная система координат, ось Z_3 которой направлена вдоль геоцентрической вертикали, а ось Z_1 – по касательной к орбите в сторону движения твердого тела по эллиптической орбите, величины $\boldsymbol{\lambda}^\circ$, $\boldsymbol{\omega}^\circ$, $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$ определяются соотношениями:

$$\boldsymbol{\lambda}^\circ(t) = \boldsymbol{\lambda}^\circ(t_0) \circ [\cos((\varphi_{tr}(t) - \varphi_{tr}(t_0))/2) + \mathbf{i}_2 \sin((\varphi_{tr}(t) - \varphi_{tr}(t_0))/2)]$$

$$\boldsymbol{\omega}_z^\circ = c^* r^{*-2} \mathbf{i}_2, \quad \boldsymbol{\epsilon}_z^\circ = -2(e^* c^{*2} / p^*) r^{*-3} \sin\varphi_{tr} \mathbf{i}_2$$

$$\dot{\varphi}_{tr} = c^* r^{*-2}, \quad r^* = p^*(1 + e^* \cos\varphi_{tr})^{-1}$$

где p^* и e^* – параметр и эксцентриситет орбиты, c^* – постоянная площадей, φ_{tr} – истинная аномалия твердого тела.

В ряде других случаев программное движение и управление могут быть построены на основе дифференциальных уравнений программного движения

$$d\boldsymbol{\omega}_z^\circ / dt = \boldsymbol{\epsilon}_z^\circ, \quad 2d\boldsymbol{\lambda}^\circ / dt = \boldsymbol{\lambda}^\circ \circ \boldsymbol{\omega}_z^\circ \tag{4.1}$$

с помощью методов теории оптимального управления.

Отметим однако, что аналитическое решение задачи построения оптимального программного управления и оптимального программного углового движения твердого тела в общем случае (при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости) не найдено.

Опишем другие подходы, позволяющие аналитически построить программную траекторию и программное управление, при которых твердое тело переходит из любого заранее незаданного начального состояния в любое произвольно заданное конечное состояние.

В случае перевода твердого тела из произвольного начального состояния, характеризуемого кватернионом $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$ действительной начальной ориентации и вектором $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ действительной начальной абсолютной угловой скорости твердого тела, в требуемое конечное состояние, характеризуемое кватернионом $\boldsymbol{\lambda}_*^\circ = \boldsymbol{\lambda}^\circ(t_*)$ требуемой конечной ориентации и вектором $\boldsymbol{\omega}_*^\circ = \boldsymbol{\omega}^\circ(t_*)$ требуемой абсолютной угловой скорости твердого тела в качестве программного движения твердого тела может быть выбрано плоское эйлерово вращение, совершаемое с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^\circ = \boldsymbol{\omega}_*^\circ$. Полагая $\boldsymbol{\omega}^\circ = \boldsymbol{\omega}_*^\circ = \text{const}$ и интегрируя второе уравнение системы (4.1), получим

$$\boldsymbol{\lambda}^\circ(t) = \boldsymbol{\lambda}^\circ(t_0) \circ [\cos(\varphi(t)/2) + \mathbf{e}_z \sin(\varphi(t)/2)] = [\cos(\varphi(t)/2) + \mathbf{e}_\xi \sin(\varphi(t)/2)] \circ \boldsymbol{\lambda}^\circ(t_0) \tag{4.2}$$

$$\varphi(t) = |\boldsymbol{\omega}^\circ|(t - t_0), \quad \mathbf{e}_z = \boldsymbol{\omega}_z^\circ / |\boldsymbol{\omega}^\circ|, \quad \mathbf{e}_\xi = \boldsymbol{\omega}_\xi^\circ / |\boldsymbol{\omega}^\circ|$$

Считая время $T = t_* - t_0$ разворота заданным, из (4.2) находим начальное значение кватерниона программной ориентации

$$\boldsymbol{\lambda}^\circ(t_0)=\boldsymbol{\lambda}_*^\circ\circ[\cos(\varphi_*/2)-\mathbf{e}_z\sin(\varphi_*/2)]=$$
$$=[\cos(\varphi_*/2)-\mathbf{e}_\xi\sin(\varphi_*/2)]\circ\boldsymbol{\lambda}_*^\circ;\quad \boldsymbol{\lambda}_*^\circ=\boldsymbol{\lambda}^\circ(t_*),\quad \varphi_*=|\boldsymbol{\omega}^\circ|T \tag{4.3}$$

Формулы (4.2) и (4.3) служат для нахождения кватерниона текущей программной ориентации твердого тела по заданным величинам $\boldsymbol{\lambda}_*^\circ$, $\boldsymbol{\omega}_*^\circ$, T. При этом в зависимости от того, в какой системе координат (Z или ξ) задан вектор $\boldsymbol{\omega}_*^\circ$ используется кватернион $\mathbf{e}_z$ или $\mathbf{e}_\xi$. Текущая программная угловая скорость для выбранного программного движения твердого тела не изменяется с течением времени: $\boldsymbol{\omega}_z^\circ(t)=\boldsymbol{\omega}_{*z}^\circ=$ $=\overline{\boldsymbol{\lambda}}_\circ^*\circ\boldsymbol{\omega}_{*\xi}^\circ\circ\boldsymbol{\lambda}_0^*=\mathrm{const}$, а текущее программное угловое ускорение $\boldsymbol{\epsilon}_z^\circ=0$.

Задача построения программного углового движения и программного управления может быть решена с помощью приведения уравнений (4.1) к эталонным программным дифференциальным уравнениям, аналогичным уравнениям, рассмотренным в п. 1. Например, если потребовать, чтобы программное угловое движение твердого тела удовлетворяло векторному линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(\boldsymbol{\Theta}_z^\circ)^{\cdot\cdot}+p^\circ(\boldsymbol{\Theta}_z^\circ)^{\cdot}+q^\circ\boldsymbol{\Theta}_z^\circ=\mathbf{u}_z^\circ \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{\Theta}_z^\circ$ – вектор конечного поворота программной системы координат Z относительно инерциальной системы координат ξ, определенный своими проекциями в системе координат Z, то закон изменения вектора программного углового ускорения будет иметь вид [5]:

$$\boldsymbol{\epsilon}_z^\circ=-2q^\circ(1+(\boldsymbol{\Theta}_z^\circ)^2)^{-1}\boldsymbol{\Theta}_z^\circ-(p^\circ+\boldsymbol{\Theta}_z^\circ\cdot\boldsymbol{\omega}_z^\circ)\boldsymbol{\omega}_z^\circ+2(1+(\boldsymbol{\Theta}_z^\circ)^2)^{-1}(\mathbf{u}_z^\circ-\boldsymbol{\Theta}_z^\circ\times\mathbf{u}_z^\circ)$$

Здесь p° и q° – некоторые скалярные постоянные, а $\mathbf{u}_z^\circ=\mathbf{u}_z^\circ(t)$ – некоторое новое векторное управление, получаемые в результате решения линейной задачи управления, формулируемой для системы (4.4).

Если же потребовать, чтобы программное угловое движение твердого тела описывалось кватернионным линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\mathbf{N}^{\circ\cdot\cdot}+\mathbf{N}^{\circ\cdot}\circ\mathbf{p}^\circ+(\mathbf{N}^\circ-1)\circ\mathbf{q}^\circ=\mathbf{U}_z^\circ \tag{4.5}$$

то закон изменения кватерниона программного углового ускорения будет иметь вид [5]:

$$\mathbf{E}_z^\circ=\varepsilon_0^\circ+\varepsilon_z^\circ=-2(1-(\mathbf{N}^\circ)^{-1})\circ\mathbf{q}^\circ-\boldsymbol{\Omega}_z^\circ\circ\mathbf{p}^\circ-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_z^\circ\circ\boldsymbol{\Omega}_z^\circ+2(\mathbf{N}^\circ)^{-1}\circ\mathbf{U}_z^\circ$$

где $\boldsymbol{\Omega}_z^\circ=\omega_0^\circ+\boldsymbol{\omega}_z^\circ$; $\mathbf{p}^\circ$ и $\mathbf{q}^\circ$ – некоторые кватернионные постоянные, а $\mathbf{U}_z^\circ=\mathbf{U}_z^\circ(t)$ – некоторое новое четырехмерное управление, получаемые в результате решения линейной задачи управления, формулируемой для системы (4.5).

При таком подходе возможно аналитическое построение программных движений и управлений, имеющих нужные свойства, для произвольных граничных условий по угловому положению и угловой скорости твердого тела.

Выход твердого тела на любую выбранную программную траекторию из произвольного начала состояния $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$, $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ и асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории с необходимыми угловыми скоростью и ускорением обеспечивается построенными стабилизирующими управлениями (2.17)–(2.20), обладающими свойством асимптотической устойчивости в целом.

5. Алгоритмы управления. Приведем алгоритмы формирования управляющих моментов для бесплатформенных инерциальных систем управления ориентацией твердого тела в случае, когда коэффициенты усиления нелинейных обратных связей являются скалярными величинами: $\mathbf{p} = p_0$, $\mathbf{q} = q_0$, $\mathbf{p}^* = p_0^*$, $\mathbf{q}^* = q_0^*$.

Алгоритмы, построенные на основе уравнений, использующих ненормированные кватернионы поворотов и кватернионы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения с ненулевыми скалярными частями, образуются соотношениями

$$2\boldsymbol{\lambda}^{\cdot} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x(t) \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{\nu}^* = \nu_0^* + \boldsymbol{\nu}_v^* = \overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ}(t) \circ \boldsymbol{\lambda}, \quad \delta\boldsymbol{\omega}_x = \boldsymbol{\omega}_x(t) - \boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t) \tag{5.2}$$

$$s^{\cdot} = -\tfrac{1}{2}\omega_0 s, \quad \omega_0^{\cdot} = -2q_0(1 - s\nu_0^*) - p_0\omega_0 + \tfrac{1}{2}(|\,\delta\omega(t)|^2 - \omega_0^2) \tag{5.3}$$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_x = -2q_0 s\boldsymbol{\nu}_v^* - (p_0 + \omega_0)\delta\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x(t) \times \delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{5.4}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_x = \boldsymbol{\epsilon}_z^{\circ}(t) + \delta\boldsymbol{\epsilon}_x \tag{5.5}$$

$$U_x = J\varepsilon_x + K(\boldsymbol{\omega}_x(t))J\omega_x(t) - M_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x(t)) \tag{5.6}$$

или соотношениями

$$2\boldsymbol{\lambda}^{\cdot} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x(t) \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{\nu}^* = \nu_0^* + \boldsymbol{\nu}_v^* = \overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ}(t) \circ \boldsymbol{\lambda}, \quad \Delta\boldsymbol{\omega}_x = \boldsymbol{\omega}_x(t) - \overline{\boldsymbol{\nu}}^* \circ \boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t) \circ \boldsymbol{\nu}^* \tag{5.8}$$

$$s^{\cdot} = -\tfrac{1}{2}\omega_0 s, \quad \omega_{\circ}^{\cdot} = -2q_0^*(1 - s\nu_0^*) - p_0^*\omega_0 + \tfrac{1}{2}(|\,\Delta\omega(t)|^2 - \omega_0^2) \tag{5.9}$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = -2q_0^* s\boldsymbol{\nu}_v^* - (p_0^* + \omega_0)\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x(t) \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_x = \overline{\boldsymbol{\nu}}^* \circ \boldsymbol{\epsilon}_z^{\circ}(t) \circ \boldsymbol{\nu}^* + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_x \tag{5.11}$$

$$U_x = J\varepsilon_x + K(\boldsymbol{\omega}_x(t))J\omega_x(t) - M_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x(t)) \tag{5.12}$$

В соответствии с этими алгоритмами нормированный кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ действительной ориентации твердого тела в инерциальной системе координат находится по измеренному вектору $\boldsymbol{\omega}_x(t)$ абсолютной угловой скорости твердого тела в результате численного интегрирования на бортовом вычислителе в реальном масштабе времени кватернионного кинематического дифференциального уравнения (5.1) или (5.7). По формулам (5.2) или (5.8) вычисляются нормированный кватернион $\boldsymbol{\nu}^*$ ошибки ориентации твердого тела, его скалярная ν_0^* и векторная $\boldsymbol{\nu}_v^*$ части, а также вектор $\delta\boldsymbol{\omega}_x$ или $\Delta\boldsymbol{\omega}_x$ ошибки по угловой скорости. Интегрирование в реальном масштабе времени системы двух скалярных дифференциальных уравнений (5.3) или (5.9) (начальные условия интегрирования: $s(0) = 1$, $\omega_0(0) = 0$) позволяет вычислить вспомогательные переменные s и ω_0 (s – величина, обратная тензору ненормированного кватерниона ошибки ориентации $\mathbf{N}^*$, определяемая соотношением (2.28); ω_0 – скалярная часть кватерниона $\delta\boldsymbol{\Omega}_x$ или $\Delta\boldsymbol{\Omega}_x$ ошибки по абсолютной угловой скорости). С помощью соотношений (5.4), (5.5) или (5.10), (5.11) формируются в связанной системе координат векторы стабилизирующего $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ или $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ и полного $\boldsymbol{\epsilon}_x$ абсолютных угловых ускорений твердого тела, а с помощью соотношений (5.6) или (5.12) – вектор управляющего момента U_x. Уравнения (5.1) и (5.7), а также (5.6) и (5.12) в этих алгоритмах являются одинаковыми. Отметим, что интегрирование уравнений (5.3) или (5.9) обеспечивает автоматическую подстройку коэффициентов усиления $(q_0 s)$ или $(q_0^* s)$ и $(p_0 + \omega_0)$ или $(p_0^* + \omega_0)$ в законах управления (5.4) или (5.10).

Алгоритмы, построенные на основе уравнений, использующих нормированные кватернионы поворотов и кватернионы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения с нулевыми скалярными частями, отличаются от алгоритмов (5.1)–

(5.6) и (5.7)–(5.12) соотношениями для формирования стабилизирующих ускорений. В алгоритме (5.1)–(5.6) вместо уравнений (5.3), (5.4) в этом случае появляется соотношение

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_x = (\tfrac{1}{2}\,|\,\delta\boldsymbol{\omega}(t)\,|^2 - 2q_0)\boldsymbol{\nu}_v^* / \nu_0^* - p_0\delta\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x(t)\times\delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{5.13}$$

а в алгоритме (5.7)–(5.12) вместо уравнений (5.9), (5.10) – соотношение

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = (\tfrac{1}{2}\,|\,\Delta\boldsymbol{\omega}(t)\,|^2 - 2q_0^*)\boldsymbol{\nu}_v^* / \nu_0^* - p_0^*\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x(t)\times\Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{5.14}$$

В случае построения стабилизирующего углового ускорения с помощью эталонных дифференциальных уравнений для вектора конечного поворота $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{e}\,\mathrm{tg}\,(\varphi/2)$, характеризующего положение связанной системы координат X относительно программной Z ($\mathbf{e}$ – единичный вектор эйлеровой оси поворота системы координат X относительно Z, φ – угол этого поворота) в алгоритме (5.1)–(5.6) вместо уравнений (5.3), (5.4) появляются соотношения

$$\boldsymbol{\Theta}_x = \boldsymbol{\nu}_v^* / \nu_0^*, \quad 1+\cos\varphi = 2(\nu_0^*)^2$$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_x = -q_0(1+\cos\varphi)\boldsymbol{\Theta}_x - (p_0 + \boldsymbol{\Theta}_x\cdot\delta\boldsymbol{\omega}_x)\delta\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x(t)\times\delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{5.15}$$

а в алгоритме (5.7)–(5.12) вместо уравнений (5.9), (5.10) – соотношения

$$\boldsymbol{\Theta}_x = \boldsymbol{\nu}_v^* / \nu_0^*, \quad 1+\cos\varphi = 2(\nu_0^*)^2$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = -q_0^*(1+\cos\varphi)\boldsymbol{\Theta}_x - (p_0^* + \boldsymbol{\Theta}_x\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}_x)\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x(t)\times\Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{5.16}$$

Приведенные алгоритмы управления (5.1)–(5.6) или (5.7)–(5.12) обеспечивают (при надлежащем выборе постоянных параметров p_0, q_0 или p_0^*, q_0^*) асимптотически устойчивый в целом перевод твердого тела из любого заранее незаданного начального состояния твердого тела на любую выбранную программную траекторию $\boldsymbol{\lambda}^\circ = \boldsymbol{\lambda}^\circ(t)$, $\boldsymbol{\omega}_z^\circ = \boldsymbol{\omega}_z^\circ(t)$ и дальнейшее асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории. Алгоритмы управления, содержащие соотношения (5.13)–(5.16), проще этих алгоритмов, однако они имеют особую точку $\varphi = 180°$, в которой они вырождаются. Поэтому алгоритмы, использующие соотношения (5.13)–(5.16), обеспечивают лишь асимптотически устойчивое движение твердого тела в большом, но не в целом.

Алгоритм (5.1)–(5.6) управления угловым движением твердого тела был предложен в работе [7] (в несколько измененном виде алгоритм (5.1)–(5.5) формирования требуемого абсолютного углового ускорения твердого тела был также построен в [6]), а алгоритм (5.1), (5.2), (5.13), (5.6) – в работе [4].

Алгоритм (5.7)–(5.12) с вычислительной точки зрения несколько сложнее алгоритма (5.1)–(5.6), еще более сложный вид имеют алгоритмы управления, реализующие матричные или кватернионные коэффициенты усиления нелинейных обратных связей.

Сравнительный анализ построенных законов и алгоритмов управления как со скалярными, так и с матричными или кватернионными коэффициентами усиления обратных связей с точки зрения точности управления, обеспечения желаемой динамики, выполнения тех или иных ограничений на угловую скорость и угловое ускорение твердого тела, грубости (робастности), требуемых вычислительных затрат и других критериев является предметом дальнейших исследований.

6. Заключение. Разработаны теория и методы аналитического построения управлений угловым движением твердого тела, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в большом или в целом любого выбранного программного углового движения и желаемую динамику управляемого углового движения твердого тела. Построены новые векторные, матричные и кватернионные законы и алгоритмы такого управления.

Построенные законы управления реализуют нелинейные обратные связи по угловому положению и угловой скорости твердого тела и обеспечивают асимптотически устойчивый перевод твердого тела, имеющего произвольную начальную угловую скорость, из произвольного заранее незаданного начального углового положения на любую выбранную программную траекторию и дальнейшее асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории с требуемыми угловой скоростью и угловым ускорением. Дифференциальные уравнения возмущенного движения твердого тела, замкнутые этими законами управления, имеют (для любого выбранного программного углового движения) вид линейных стационарных дифференциальных уравнений второго порядка относительно векторной или кватернионной переменной, характеризующей конечную ошибку ориентации твердого тела. Постоянные коэффициенты этих уравнений (скалярные, матричные, кватернионные) имеют смысл коэффициентов усиления построенных нелинейных обратных связей, а сами уравнения описывают эталонную динамику переходных процессов. Это позволяет аналитически точно определять коэффициенты усиления нелинейных обратных связей, обеспечивающие желаемые динамические характеристики управляемого углового движения твердого тела. Большинство известных законов управления угловым движением твердого тела, формируемых по принципу обратной связи, обеспечивают асимптотическую устойчивость перевода твердого тела из одного фиксированного углового положения в другое (при нулевых угловых скоростях твердого тела в начальном и конечном положениях). Методы их построения не позволяют точно определять необходимые коэффициенты усиления обратных связей исходя из желаемых качественных и количественных характеристик переходного процесса.

Полученные законы управления могут быть использованы в системах управления угловым движением космических и других летательных аппаратов, роботов-манипуляторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-00192) и ФЦП "Интеграция" (проект № 96.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Челноков Ю.Н.* Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 2–17.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 352 с.
3. *Плотников П.К., Челноков Ю.Н.* Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела // Сб. научно-метод. статей по теорет. механике. М.: Высш. шк. 1981. Вып. 11. С. 122–129.
4. *Челноков Ю.Н.* Кватернионный синтез нелинейного управления ориентацией движущегося объекта // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 2. С. 145–150.
5. *Челноков Ю.Н.* Кватернионы и динамика управляемого движения твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 13–23.
6. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения ошибок, законы и алгоритмы коррекции (стабилизации) // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 3–12.
7. *Челноков Ю.Н.* Управление ориентацией космического аппарата, использующее кватернионы // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 3. С. 21–32.
8. *Плотников П.К., Сергеев А.Н., Челноков Ю.Н.* Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 9–18.
9. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
10. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 7–14.

Саратов

Поступила в редакцию
8.12.1999