

УДК 531.53

© 2002 г. С.В. ВОЛКОВ

УПРАВЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ МАЯТНИКА, УСТАНОВЛЕННОГО НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАТФОРМЕ

Рассмотрена задача составления кинематических уравнений программного относительного движения двух твердых тел, образующих механическую систему с двумя степенями свободы, и использования этих уравнений для синтеза программного управления. Свойства движения формализуются в виде системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = u$, $\dot{y} = Y(x, y)$ класса C_1 , которые имеют данную совокупность особых траекторий и данную структуру разбиения на траектории в целом. В частности, решена задача определения момента, который приложен к оси вращающейся платформы и обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом программного колебательного движения маятника, установленного на этой платформе.

1. Введение. Целесообразность использования дифференциальных уравнений для задания программных свойств движений управляемых механических систем обусловлено тем, что они несравненно богаче по разнообразию отображаемых ими свойств, чем уравнения конечные [1]. Развитие методов построения систем дифференциальных уравнений, решения которых обладают наперед заданными свойствами, тесно связано с историей изучения обратных задач динамики [2, 3]. В ранних работах этого направления такие свойства описывались конечными соотношениями. Позже эти свойства задавались частными или первыми интегралами механических систем. В дальнейшем набор программных свойств был расширен требованиями к устойчивости интегральных многообразий уравнений движения. В последние десятилетия наиболее важные результаты в этой области получены в [4–8]. Существенное влияние на развитие методов решения обратных задач динамики оказала идея Еругина Н.П. о возможности использования произвольных функций, входящих в дифференциальные уравнения, которые имеют данные интегральные кривые [9]. Реализация этой идеи позволила, в частности, обобщить результаты [10, 11] и решить задачу построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих на плоскости конечное число данных интегральных (сепаратрисных) кривых, изолированных состояний равновесия указанных типов (седло, узел, фокус) и предельных циклов [12]. Однако, наиболее полно свойства поведения динамической системы отражаются структурой разбиения на траектории соответствующего конфигурационного пространства в целом. В связи с этим представляют интерес разработка и обоснование методов построения дифференциальных операторов динамических систем, которые имеют данную совокупность особых траекторий и данную структуру фазового портрета. В данной работе изложены результаты применения одного из таких методов [13] для решения задачи

об управлении относительным движением маятника, установленного на вращающейся платформе.

2. Общие положения. Программные связи, выраженные дифференциальными уравнениями, позволяют отразить достаточно широкий спектр свойств движения управляемого тела, а также найти силы, обеспечивающие выполнение этих свойств. В качестве примера рассмотрим в общем виде задачу об управлении относительными движениями твердых тел.

Пусть механическая система состоит из двух твердых тел P_1 (несомого) и P_2 (носителя), связанных друг с другом в точке O_1 . Взаимное положение этих тел определяется переменной q_1 , а положение тела P_2 относительно неподвижной (абсолютной) системы отсчета – координатой q_2 . Будем полагать, что в точке O_2 носителя осуществляется сервосвязь контактного типа, сообщающая этому телу некоторое движение.

Изложенный в [13] метод позволяет составить уравнение сервосвязи в виде дифференциального уравнения вида

$$\ddot{q}_1 - Q(q_1, \dot{q}_1) = 0 \quad (2.1)$$

определяющего такое разбиение на траектории фазовой плоскости (q_1, \dot{q}_1) , которое отражает требуемые свойства относительного движения тела P_1 . Уравнение (2.1) можно рассматривать как уравнение программного движения тела P_1 относительно тела P_2 . Будем полагать, что сервосвязь (2.1) физически реализуема, а ее выполнение обеспечивается внешним источником энергии, действующим на тело P_2 в точке O_2 с обобщенной силой U , отнесенной к координате q_2 . Для нахождения реакции U сервосвязи составим уравнения Лагранжа 2-го рода движения данной механической системы в виде

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + a_1 = Q_1 \quad (2.2)$$

$$a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + a_2 = Q_2 + U \quad (2.3)$$

где a_{jk} , a_r , Q_r ($j, k, r = 1, 2$) являются функциями переменных $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$. Систему уравнений (2.1) и (2.2) решим относительно \ddot{q}_1 и \ddot{q}_2 , а полученные для них выражения подставим в (2.3). В результате получим равенство

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})Q + a_1a_2 - a_2a_{12} + Q_1a_{22} - Q_2a_{12} - Ua_{12} = 0$$

для нахождения искомой реакции $U = U(q, \dot{q}, t)$ сервосвязи.

3. Колебания маятника на вращающейся платформе. 3.1. Постановка задачи. Рассмотрим маятник, который представляет собой невесомый стержень OM , в конце M которого сосредоточена масса m . Другим концом O стержень шарнирно соединен с горизонтальной планкой рамы, установленной на платформе, вращающейся вокруг вертикальной оси O_1z . Точка O не лежит на оси вращения платформы. Маятник может поворачиваться только вокруг горизонтальной оси подвеса (фиг. 1). Пусть a, b, c – декартовы координаты точки O подвеса маятника в системе координат $O_1\xi_0\eta_0\xi_0$, связанной с платформой так, что ось $O_1\xi_0$ совпадает с осью вращения платформы; l – длина маятника OM , x – угол его отклонения от вертикали; $y = \dot{x}$ – относительная угловая скорость маятника; $M_c = -k\dot{x}$ ($k = \text{const}$) – момент сил сопротивления в подшипнике O ; J – момент инерции платформы относительно оси O_1z ; $U = U(x, y)$ – проекция на ось $O_1\xi_0$ главного момента внешних сил, приложенных к платформе. Найти момент U , обеспечивающий: (а) существование асимптотически устойчивого колебательного движения маятника около положения $x = \pi/6$ с амплитудой, равной $\pi/6$; (б) структуру разбиения на траектории плоскости Oxy , представленную графической

схемой на фиг. 2, где

$$\begin{aligned}\omega_1 &\equiv y^2 + 4(2 + \sqrt{3})\sin^2((x - \pi/6)/2) - 1 = 0 \\ \omega_2 &\equiv y^2 + 4\sin^2((x - \pi/6)/2) = 0, \quad \omega_3 \equiv \cos((x + y)/2) = 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

Будем рассматривать механическую систему, образованную маятником, рамой и платформой, как систему с сервосвязью, реакцией которой является момент сил U , приложенный к оси вращения платформы. Уравнения сервосвязи, реализация которой обеспечивает движение маятника в соответствии с требованиями (а) и (b) условия задачи, составим в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = Y(x, y) \quad (3.2)$$

Уравнения (3.2) являются уравнениями программного движения маятника. Найдем функцию $Y(x, y)$, используя метод построения динамических систем вида $\dot{x} = X(x, y)$, $\dot{y} = Y(x, y)$ по данной совокупности особых траекторий и данной структуре фазового портрета [13]. Этот метод предполагает выполнение следующих действий.

3.2. *Построение векторных полей направлений сравнения.* Используя частные производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} &= 2(2 + \sqrt{3})\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right), & \frac{\partial \omega_2}{\partial x} &= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y} &= 2y, & \frac{\partial \omega_3}{\partial x} = \frac{\partial \omega_3}{\partial y} &= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x + y}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.3)$$

построим, следуя [13], векторы

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 &= \{y(2 + \sqrt{3})\sin(x - \pi/6); y^2\} \\ \mathbf{n}_2 &= \{y\sin(x - \pi/6); y^2\}, \quad \mathbf{n}_3 = \{y^2; y^2\}\end{aligned}\quad (3.4)$$

для каждой из кривых (3.1):

$$\mathbf{m} = \{y\sin x; \sin^2 x\} \quad (3.5)$$

для состояний равновесия $A_k(\pi(2k + 1); 0)$, и введем, учитывая вид искомой системы (3.2), вектор

$$\mathbf{m}_0 = \{0; 1\} \quad (3.6)$$

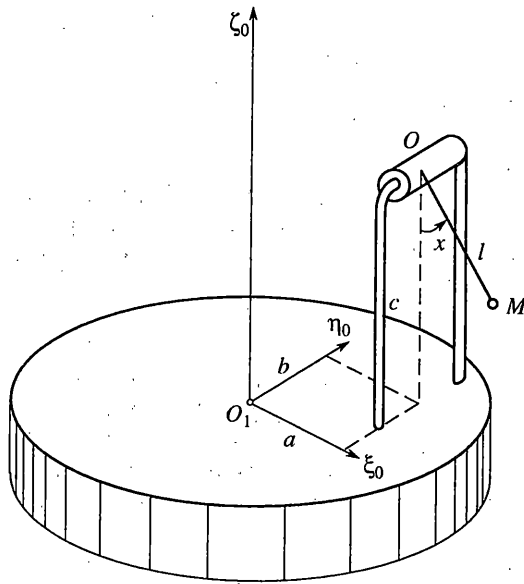
Определим согласно [13] векторные поля направлений сравнения \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \lambda_1 \mathbf{n}_1 \omega_2^2 \omega_3^2 [y^2 + 4\cos^2(x/2)]^3 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 \omega_1^4 \omega_3^2 [y^2 + 4\cos^2(x/2)]^3 + \\ &+ \lambda_3 \mathbf{n}_3 \omega_1^4 \omega_2^2 [y^2 + 4\cos^2(x/2)]^2 + \mu \mathbf{m} \omega_1^6 \omega_2^2 \omega_3^2 + \mu_0 \mathbf{m}_0 \omega_1^2 \omega_2 \omega_3^2 [y^2 + 4\cos^2(x/2)]^3 \\ \boldsymbol{\tau}_x &= n_y, \quad \boldsymbol{\tau}_y = -n_x\end{aligned}\quad (3.7)$$

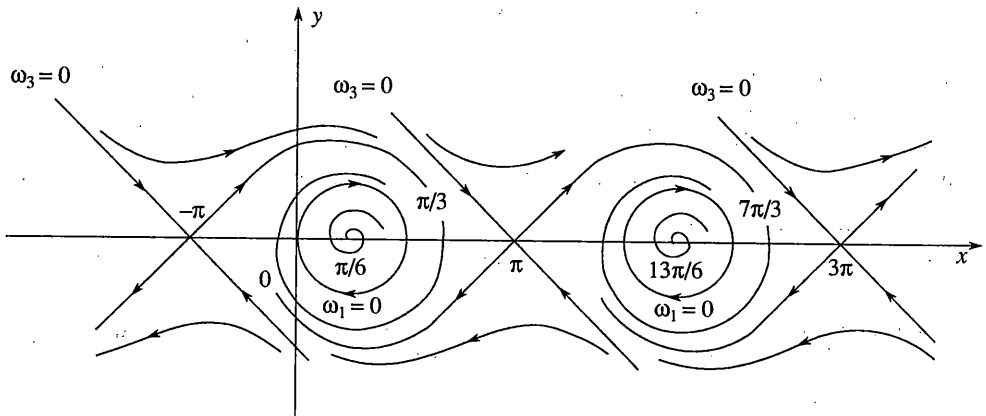
где λ_i ($i = 0, 1, 2, 3$), μ , μ_0 – произвольные неотрицательные функции переменных x и y , при которых в (3.7) главным членом в окрестностях точек A_k является слагаемое $\mu \mathbf{m} \omega_1^6 \omega_2^2 \omega_3^2$, а вблизи каждой из кривых ω_i главным является слагаемое, содержащее множителем соответствующий вектор \mathbf{n}_i ($i = 1, 2, 3$).

Векторы \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ используются для математической формализации посредством скалярных произведений

$$F_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = n_x X + n_y Y, \quad F_2 = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P} = \tau_x X + \tau_y Y \quad (3.8)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

свойств (a) и (b) условия задачи соответствующей системы уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \frac{F_1 n_y - F_2 n_x}{F_1 n_x^* + F_2 n_y^*}, \quad n_x = y n_x^*, \quad F_2 = y F_2^* \quad (3.9)$$

Функции F_1 и F_2 , соответствующие фазовым траекториям (3.1) и структуре данного фазового портрета (фиг. 2), представим в виде

$$F_1 = \xi_1 \prod_{i \in I} \omega_i^{\alpha_i}, \quad F_2 = \xi_2 \prod_{j \in J} \bar{\omega}_j^{\bar{\alpha}_j}$$

где $\alpha_i, \bar{\alpha}_j$ – произвольные натуральные числа; $\xi_1 = \xi_1(x, y), \xi_2 = \xi_2(x, y), \bar{\omega}_j = \bar{\omega}_j(x, y)$ – произвольные функции; $F_1^2 + F_2^2 \neq 0$ в точках области $\Omega \setminus (\bigcup_k A_k)$.

Построение функций F_1 и F_2 осуществляется в два этапа. На первом этапе устанавливается их строение в окрестностях особых траекторий (3.1) и точек $Q_l(\pi/6 + (-1)^{(l+1)}\pi/6 + 2\pi l; 0)$ ($l \in Z$), в которых $\omega_1 = 0$ и $d\omega_1/du = 0$. При этом используются теоремы [13], которые содержат условия, достаточные для обеспечения данной локальной структуры как состояний равновесия A_k , так и точек Q_l . Основу доказательства этих теорем составляет метод Фроммера [14]. На втором этапе решается проблема согласования и составляются окончательные выражения функций F_1 и F_2 , соответствующие структуре данного фазового портрета (фиг. 2) в целом.

3.3. *Построение F-функций состояний равновесия.* (1) В окрестности состояния равновесия $A_k((2k+1)\pi; 0)$. Из теоремы 1 (с. 80, [13]), и следствия из теоремы 6 (с. 98, [13]) следует, что функциям

$$F_1 = \xi_{11}(y+x)(y - \zeta_{1A}x)(x + \zeta_{2A}y^3), \quad F_2 = \xi_{21}y(x^2 + y^4)$$

при $\xi_{11} < 0$, $\xi_{21} > 0$, $\zeta_{1A} > 0$ и $\zeta_{2A} = -a/c < 0$ (значения a и c вычисляются ниже) соответствует состояние равновесия $(0; 0)$, локальная структура которого эквивалентна структуре точек A_k (фиг. 2). Следовательно, функции

$$F_1 = (-1)^k \xi_{1k} \cos((x+y)/2) \cos((x - \zeta_{1A})/2) \cos((x + \zeta_{2A}y^3)/2) \quad (3.10)$$

$$F_2 = \xi_{2k}y[y^4 + \cos^2(x/2)] \quad (3.11)$$

соответствуют данным локальным структурам состояний равновесия A_k , поскольку в их окрестностях главными в (3.7) могут быть только слагаемые $\lambda_3 n_3 \omega_1^4 \omega_2^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^2$ и $\mu \omega_1^6 \omega_2^2 \omega_3^2$. В этом случае направления $u_1 = -1$ и $u_2 = 1$ в точках A_k (где $u = y/(x - x_k)$) являются исключительными направлениями гиперболического типа, если $\xi_{1k} \xi_{2k} < 0$, а $v = 0$ исключительным направлением не является при условии $(a - cv)(v + \zeta_{2A} \xi_{11} + b \xi_{21}) \neq 0$, где $v = (x - x_k)/y$. Это неравенство выполняется, если положить, в частности

$$\zeta_{2A} = -\frac{4\lambda_3}{\mu[(2 + \sqrt{3})^2 - 1]^2} \quad (3.12)$$

$$b > 0, \quad a = \lambda_3[(2 + \sqrt{3})^2 - 1]^4(2 + \sqrt{3})^2$$

$$c = 0.25\mu[(2 + \sqrt{3})^2 - 1]^6(2 + \sqrt{3})^2$$

где a, c — коэффициенты при главных членах в разложении в ряд Тейлора координат вектора n из (3.7) в точках A_k (с. 95, [13]). Значение коэффициента ξ_{2A} не влияет на структуру точки A_k вблизи направления $x - x_k = 0$ и может быть выбрано произвольно, но так, чтобы кривые $\cos[(x + \zeta_{2A}y^3)/2] = 0$ не имели общих точек с предельными циклами $\omega_1 = 0$.

(2) В окрестности состояния равновесия $\Gamma_i(\pi/6 + 2\pi i; 0)$. Неустойчивым фокусом Γ_i соответствуют согласно [13] (с. 125) функции

$$F_1 = \eta n_x + [2\zeta_{2\Gamma}y - \sin(x - \pi/6)]n_y, \quad \zeta_{2\Gamma} > 0 \quad (3.13)$$

$$F_2 = -[2\zeta_{2\Gamma}y - \sin(x - \pi/6)]n_x + \eta n_y \quad (3.14)$$

Координаты вектора (3.7) перепишем, учитывая (3.4) — (3.6), следующим образом:

$$\begin{aligned} n_x &= \lambda_2 y \omega_1^4 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3 \sin(x - \pi/6) + \\ &+ \omega_2 \{\lambda_1 y (2 + \sqrt{3}) \omega_2 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3 \sin(x - \pi/6) + \\ &+ \lambda_3 y^2 \omega_1^4 \omega_2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^2 + \mu y \omega_1^6 \omega_2 \omega_3^2 \sin x\} \end{aligned}$$

$$n_y = \lambda_2 y^2 \omega_1^4 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3 + \omega_2 \{ \mu_0 \omega_1^2 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3 + \\ + \lambda_1 y^2 \omega_2 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3 + \lambda_3 y^2 \omega_1^4 \omega_2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^2 + \mu \omega_1^6 \omega_2 \omega_3^2 \sin^2 x \}$$

а затем представим их в виде

$$n_x = c_y \sin(x - \pi/6) + c_x^0 y \omega_2^2, \quad n_y = c y^2 + c_y \omega_2 \quad (3.15)$$

$$c = \lambda_2 \omega_1^4 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3, \quad c_y = \mu_0 \omega_1^2 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3$$

Из (3.13) – (3.15) следует, что

$$F_1 = 2\zeta_{2\Gamma} c y^3 + c_y \omega_2 [2\zeta_{2\Gamma} y - \sin(x - \pi/6)] \quad (3.16)$$

$$F_2 = y [c [y^2 - 2\zeta_{2\Gamma} y \sin(x - \pi/6) + \sin^2(x - \pi/6)] + c_y \omega_2] \quad (3.17)$$

где множители c и c_y можно заменить (теорема 14 [13]) их значениями в точке Γ_i . Выполнив необходимые вычисления

$$\omega_1^2 |_{\Gamma_i} = 1, \quad \omega_3^2 |_{\Gamma_i} = 0.25(2 + \sqrt{3}), \quad [y^2 + 4 \cos^2(x/2)] |_{\Gamma_i} = 2 + \sqrt{3}$$

$$c_0 = [\lambda_2 \omega_1^2 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3] |_{\Gamma_i} = 0.25 \lambda_2 (2 + \sqrt{3})^4$$

$$c_{y0} = [\mu_0 \omega_1^2 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3] |_{\Gamma_i} = 0.25 \mu_0 (2 + \sqrt{3})^4$$

перепишем (3.16) и (3.17) следующим образом:

$$F_1 = c_{y0} \left[\frac{2\zeta_{2\Gamma} \lambda_2}{\mu_0} y^3 + 2\zeta_{2\Gamma} \omega_2 y - \omega_2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$F_2 = y c_{y0} \left\{ \frac{\lambda_2}{\mu_0} \left[y^2 - 2\zeta_{2\Gamma} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \right] + \omega_2 \right\}$$

Полагая в этих выражениях $\zeta_{2\Gamma} = 0.25$, $\lambda_2/\mu_0 = 2$ и учитывая, что $c_0 = (\lambda_2 c_{y0})/\mu_0$, а также то, что в окрестностях точек Γ_i $4\sin^2[(x - \pi/6)/2] = \sin^2(x - \pi/6) + o(\rho_\Gamma^2)$, окончательно получим

$$F_1 = 0.5[3y^2 + y \sin(x - \pi/6) + 2 \sin^2(x - \pi/6)] \times [y - \sin(x - \pi/6)] \quad (3.18)$$

$$F_2 = y[3y^2 - y \sin(x - \pi/6) + 2 \sin^2(x - \pi/6) + 4 \sin^2(x - \pi/6)] \quad (3.19)$$

Далее, при решении проблемы согласования следует учесть, что на локальную структуру состояний равновесия Γ_i могут влиять только те члены из (3.18) и (3.19), порядки которых относительно $x - \pi/6$ и y не выше второго. Отметим также, что в выражении F_2 из (3.19) множитель, заключенный в квадратные скобки, положителен во всех точках, отличных от точек $\Gamma_i(\pi/6 + 2\pi i; 0)$.

(3) В окрестностях точек $Q_i(\pi/6 + (-1)^{(l+1)}\pi/6 + 2\pi l; 0)$. В окрестностях точек Q_i (фиг. 2) положим согласно [13] (с. 140)

$$F_1 = y n_x + \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \zeta_Q y \omega_1 \right) n_y,$$

$$F_2 = y n_x \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - \zeta_Q \omega_1 \right) + y n_y$$

и заменим частные производные от ω_1 их явными выражениями

$$F_1 = yn_x + [-(2 + \sqrt{3})\sin(x - \pi/6) + \zeta_Q \omega_1 y] n_y \quad (3.20)$$

$$F_2 = [(2 + \sqrt{3})\sin(x - \pi/6) - \zeta_Q \omega_1 y] n_x + yn_y \quad (3.21)$$

В окрестности точки Q_l координаты вектора \mathbf{n} (3.7) представим, учитывая только те члены, которые влияют на структуру состояний равновесия Q_l , в виде

$$n_x = cy(2 + \sqrt{3})\sin(x - \pi/6), \quad n_y = cy^2 + c_y \omega_1^2 \quad (3.22)$$

$$c = \lambda_1 \omega_2^2 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3 \quad (3.23)$$

$$c_y = \mu_0 \omega_2 \omega_3^2 [y^2 + 4 \cos^2(x/2)]^3 \quad (3.24)$$

Выполним подстановку (3.22) – (3.24) в (3.20) и (3.21) и оставим в полученных таким образом выражениях функций F_1 и F_2 только те слагаемые, которые могут влиять на локальную структуру точки Q_l :

$$F_1 = \omega_1 c_y \left[\frac{\omega_2 \lambda_1}{\mu_0} \zeta_Q y^3 + \zeta_Q y \omega_1^2 - (2 + \sqrt{3}) \omega_1 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \right] \quad (3.25)$$

$$F_2 = uc_y \left\{ \frac{\omega_2 \lambda_1}{\mu_0} \left[(2 + \sqrt{3})^2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \zeta_Q \omega_1 y \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + y^2 \right] + \omega_1^2 \right\} \quad (3.26)$$

где $\zeta_Q < 0$, так как $\omega_1 = 0$ – устойчивый предельный цикл.

Для исследования нулей функции F_1 в окрестностях точек Q_l перепишем (3.25) следующим образом:

$$F_1 = c_y \omega_1 [y \zeta_Q \omega_1 - (2 + \sqrt{3}) \sin(x - \pi/6)] \left\{ \omega_1 + \frac{\zeta_Q \lambda_1 \omega_2 y^3}{\mu_0 [y \zeta_Q \omega_1 - (2 + \sqrt{3}) \sin(x - \pi/6)]} \right\} \quad (3.27)$$

В окрестностях точек $Q_l(\pi/6 + (-1)^{(l+1)}\pi/6 + 2\pi l; 0)$ для четных l получим, полагая $\cos x|_{Q_l} = 1$:

$$F_1 = c_y \omega_1 [y \zeta_Q \omega_1 - (2 + \sqrt{3}) \sin(x - \pi/6)] \left[y^2 - (2 + \sqrt{3}) \sin x + \frac{2 \zeta_Q \lambda_1 \omega_2 y^3}{\mu_0 (2 + \sqrt{3})} \right]$$

Аналогично, в точках Q_l для нечетных l :

$$F_1 = c_y \omega_1 [y \zeta_Q \omega_1 - (2 + \sqrt{3}) \sin(x - \pi/6)] \left[y^2 + (2 + \sqrt{3}) \sin(x - \pi/3) - \frac{2 \zeta_Q \lambda_1 \omega_2 y^3}{\mu_0 (2 + \sqrt{3})} \right]$$

В правой части равенства (3.26) можно добавить к выражению, стоящему в квадратных скобках, слагаемое $\zeta_Q^2 \omega_1^2 y^2$, которое не влияет на структуру точки Q_l и обеспечивает положительность F_2 вне оси x :

$$F_2 = uc_y \left\{ \frac{\omega_2 \lambda_1}{\mu_0} [(2 + \sqrt{3})^2 \sin^2(x - \pi/6) - \zeta_Q \omega_1 y \sin(x - \pi/6) + (1 + \zeta_Q^2 \omega_1^2) y^2] + \omega_1^2 \right\} \quad (3.28)$$

3.4. Построение F -функций в целом. Используя функции F_1 и F_2 из (3.10), (3.11), (3.18), (3.19), (3.25) и (3.28), выполним построение функций F_{1f} и F_{2f} , которые соответствуют системе уравнений (3.9), имеющей данную структуру, фазового портрета в

целом. В частности, положим

$$F_{2f} = \xi_{2y} \{ [y^4 + \cos^2(x/2)] \omega_1^6 \omega_2^2 + \xi_{2\Gamma} [y^2 + \cos^2(x/2)]^3 \omega_1^6 + \xi_{2Q} [y^2 + \cos^2(x/2)]^3 \omega_2^2 \} \quad (3.29)$$

$$\xi_{2\Gamma} = 3y^2 - y \sin(x - \pi/6) + 2 \sin^2(x - \pi/6) + 4 \sin^2((x - \pi/6)/2) \quad (3.30)$$

$$\xi_{2Q} = \frac{\omega_2 \lambda_1}{\mu_0} [(2 + \sqrt{3})^2 \sin^2(x - \pi/6) - \zeta_Q \omega_1 y \sin(x - \pi/6) + (1 + \zeta_Q^2 \omega_1^2) y^2] + \omega_1^2 \quad (3.31)$$

Функцию F_{1f} представим в виде произведения множителей, обращающихся в нуль на кривых, которые в точках A_k , Q_i и Γ_i настолько мало отличаются от соответствующих кривых нулей функций F_1 , что системы уравнений вида (3.9), отвечающие этим функциям, имеют в данных точках эквивалентные структуры. Таковой является, в частности,

$$F_{1f} = \xi_{1\omega_1} \left\{ -\frac{\lambda_1}{\mu_0} y^3 - [(2 + \sqrt{3}) \omega_1 \omega_2^2 + \xi_{1\Gamma}] [y \omega_1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)] - \frac{2^8}{9\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})^2} \sin^5 \frac{x}{2} \sin^5 \left(\frac{x - \pi/3}{2}\right) \sin^4 \left(\frac{x - \pi/6}{2}\right) \right\} \times \\ \times \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{4\lambda_3 y^3}{\mu[(2 + \sqrt{3})^2 - 1]^2}\right)\right] \times G_1 G_2 \left(y^2 + \cos^2 \frac{x}{2}\right)^3 \quad (3.32)$$

$$\xi_{1\Gamma} = 0.5[3y^2 + y \sin(x - \pi/6) + 2 \sin^2(x - \pi/6)] \quad (3.33)$$

где G_1 и G_2 — сглаживающие и нормирующие в точках Q_i и Γ_i множители для функций

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{ и } \cos\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{4\lambda_3 y^3}{\mu[(2 + \sqrt{3})^2 - 1]^2}\right)\right]$$

Для построения сглаживающих множителей воспользуемся следующими разложениями этих функций:

— в окрестностях точек Q_i с четными l :

$$A_{Ql} \left[\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \right] = 1 - 2 \sin^2 \frac{z}{4} + 5 \sin^8 \frac{z}{4}, \quad z = x + y$$

$$A_{Ql} \left[\cos\left(\frac{x + \zeta_{1A} y^3}{2}\right) \right] = 1 - 2 \sin^2 \frac{z}{4} + 5 \sin^8 \frac{z}{4}, \quad z = x + \zeta_{1A} y^3$$

— окрестностях точек Q_i с нечетными l :

$$A_{Ql} \left[\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin^2 \frac{z}{4} + 14\sqrt{3} \sin^8 \frac{z}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{z}{2} + 4\sqrt{3} \sin^8 \frac{z}{2}, \quad z = x - \frac{\pi}{3} + y$$

$$A_{Ql} \left[\cos\left(\frac{x + \zeta_{2A} y^3}{2}\right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin^2 \frac{z}{4} + 14\sqrt{3} \sin^8 \frac{z}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{z}{2} + 4\sqrt{3} \sin^8 \frac{z}{2},$$

$$z = x - \frac{\pi}{3} + \zeta_{2A} y^3$$

– в окрестностях точек Γ_i :

$$A_{\Gamma_i} \left[\cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \right] = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \left[1 - 2 \sin^2 \frac{z}{4} + 4 \sin^4 \frac{z}{4} - (2-\sqrt{3}) \sin \frac{z}{2} + \sin^4 \frac{z}{2} \right],$$

$$z = x - \frac{\pi}{6} + y$$

$$A_{\Gamma_i} \left[\cos \left(\frac{x + \zeta_{2A} y^3}{2} \right) \right] = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \left[1 - 2 \sin^2 \frac{z}{4} + 4 \sin^4 \frac{z}{4} - (2-\sqrt{3}) \sin \frac{z}{2} + \sin^4 \frac{z}{2} \right],$$

$$z = x - \frac{\pi}{6} + \zeta_{2A} y^3$$

Учитывая ранее полученные и принятые отношения

$$\zeta_{2A} = -\frac{4\lambda_3}{\mu[(2-\sqrt{3})^2-1]^2}, \quad \frac{\lambda_2}{\mu_0} = 2, \quad \frac{\lambda_1}{\mu_0} = 100$$

положим, в частности

$$\lambda_1 = 100, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = (3+2\sqrt{3})^2, \quad \mu = 1, \quad \mu_0 = 1 \quad (3.34)$$

В этом случае $\zeta_{2A} = -1$, а сглаживающие множители имеют вид

$$\begin{aligned} G_1 \left[\cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \right] &= \frac{\rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi/3}^4 \rho_{\pi}^2}{A_{QI} [\cos((x+y)/2)] (\rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi/3}^4 \rho_{\pi}^2 + \rho_0^4)} + \\ &+ \frac{\rho_0^4 \rho_{\pi/3}^4 \rho_{\pi}^2}{A_{\Gamma} [\cos((x+y)/2)] (\rho_0^4 \rho_{\pi/3}^4 \rho_{\pi}^2 + \rho_{\pi/6}^4)} + \frac{\rho_0^4 \rho_{\pi/6}^4 \rho_{\pi}^2}{A_{QI} [\cos((x+y)/2)] (\rho_0^4 \rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi}^2 + \rho_{\pi/3}^4)} + \\ &+ \frac{\rho_0^4 \rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi/3}^4}{\rho_0^4 \rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi/3}^4 + \rho_{\pi}^2} \\ G_2 \left[\cos \left(\frac{x-y^3}{2} \right) \right] &= \frac{\rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi/3}^4 \rho_{\pi}^2}{A_{QI} [\cos((x-y^3)/2)] (\rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi/3}^4 \rho_{\pi}^2 + \rho_0^4)} + \\ &+ \frac{\rho_0^4 \rho_{\pi/3}^4 \rho_{\pi}^2}{A_{\Gamma} [\cos((x-y^3)/2)] (\rho_0^4 \rho_{\pi/3}^4 \rho_{\pi}^2 + \rho_{\pi/6}^4)} + \frac{\rho_0^4 \rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi}^2}{A_{QI} [\cos((x-y^3)/2)] (\rho_0^4 \rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi}^2 + \rho_{\pi/3}^4)} + \\ &+ \frac{\rho_0^4 \rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi/3}^4}{\rho_0^4 \rho_{\pi/6}^3 \rho_{\pi/3}^4 + \rho_{\pi}^2} \\ \rho_{\varphi}^2 &= y^2 + 4 \sin^2 [(x-\varphi)/2] \end{aligned}$$

Таким образом приходим к окончательным выражениям:

– координат вектора \mathbf{n} (3.7), в которых коэффициенты λ_i ($i = 1, 2, 3$), μ и μ_0 заменены их значениями (3.34):

$$\begin{aligned} n_x &= 100y(2+\sqrt{3})\sin(x-\pi/6)\omega_2^2\omega_3^2[y^2+4\cos^2(x/2)]^3 + \\ &+ 2y\sin(x-\pi/6)\omega_1^4\omega_3^2[y^2+4\cos^2(x/2)]^3 + (3+2\sqrt{3})y^2\omega_1^4\omega_2^2 \times \\ &\times [y^2+4\cos^2(x/2)]^2 + y\sin x\omega_1^6\omega_2^2\omega_3^6 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$n_y = 100y^2\omega_2^2\omega_3^2[y^2 + 4\cos^2(x/2)]^3 + 2y^2\omega_1^4\omega_3^2[y^2 + 4\cos^2(x/2)]^3 + \\ + (3 + 2\sqrt{3})y^2\omega_1^4\omega_2^2[y^2 + 4\cos^2(x/2)]^2 + \sin^2 x \omega_1^6\omega_2^2\omega_3^2 + \omega_1^2\omega_2\omega_3^2[y^2 + 4\cos^2(x/2)]^3 \quad (3.36)$$

– функции F_{1f} из (3.32), где выполнены замены (3.33) и (3.34), следующего вида

$$F_{1f} = \xi_1\omega_1\{-100y^3 - [(2 + \sqrt{3})\omega_1\omega_2^2 + 0.5[3y^2 + y\sin(x - \pi/6) + 2\sin^2(x - \pi/6)]\omega_1^5] \times \\ \times \left[y\omega_1 + \sin(x - \pi/6) - \frac{2^8}{9\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})^2} \times \sin^5(x/2)\sin^5((x - \pi/3)/2)\sin^4((x - \pi/6)/2) \right] \times \\ \times \cos((x + y)/2)\cos((x - y^3)/2)G_1G_2 \quad (3.37)$$

– функции F_{2f} , получаемой из равенства (3.29) после подстановок в него ξ_{2r} , ξ_{2Q} из (3.30) и коэффициентов λ_i ($i = 1, 2, 3$) и μ , μ_0 (3.34):

$$F_{2f} = y\xi_2\{[y^4 + \cos^2(x/2)]\omega_1^6\omega_2^2 + [3y^2 - y\sin(x - \pi/6) + 2\sin^2(x - \pi/6) + \\ + 4\sin^2((x - \pi/6)/2)][y^2 + \cos^2(x/2)]^3\omega_1^6 + [100\omega_2[(2 + \sqrt{3})^2\sin^2(x - \pi/6) + \\ + (2 + \sqrt{3})\omega_1 y\sin(x - \pi/6) + (1 + (2 + \sqrt{3})^2\omega_1^2)y^2] + \omega_1^2][y^2 + \cos^2(x/2)]^3\omega_2^2\} \quad (3.38)$$

Функции F_{1f} (3.37) и F_{2f} (3.38) имеют в фазовой плоскости такое распределение нулей и их порядки, которые соответствуют структуре данного фазового портрета в целом (фиг. 2).

Выполнив подстановки (3.35) – (3.38) в

$$Y = (F_{1f}n_y - F_{2f}n_x)/(F_{1f}n_x^0 + F_{2f}n_y^0) \quad (3.39)$$

получим правую часть второго уравнения искомой системы (3.9), где n_x^0 и F_{2f}^0 таковы, что $n_x = yn_x^0$ и $F_{2f} = yF_{2f}^0$.

Выражения n_x , n_y , F_{2f} , F_{1f} из (3.35) – (3.38) использовались для графического построения на компьютере векторного поля соответствующей им системы уравнений (3.9) и графиков ее фазовых кривых с помощью пакета прикладных математических программ Maple V. В связи с этим была составлена на внутреннем языке Maple V программа, реализующая алгоритм метода Рунге – Кутты численного интегрирования дифференциальных уравнений с переменным шагом и выполняющая построение графиков фазовых кривых. Полученные таким образом результаты полностью согласуются с данными свойствами фазового портрета (фиг. 2).

3.5. Построение управляющего момента. Пусть \mathbf{r}_M и \mathbf{r}_O – радиус-векторы точек M и O относительно точки O_1 пересечения плоскости платформы с осью ее вращения: $\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_O + \mathbf{OM}$. В подвижной системе координат $O_1\xi_0\eta_0\zeta_0$, связанной с платформой, $\mathbf{r}_O\{a; b; c\}$, $\mathbf{OM} = \{l \sin x; 0; -l \cos x\}$, $\boldsymbol{\omega} = \{0; 0; \omega\}$ и $\boldsymbol{\omega}_r = \{0; -\dot{x}; 0\}$ (фиг. 1), где ω_e – угловая скорость платформы. Абсолютная скорость точки M

$$\mathbf{v}_{M,a} = \mathbf{v}_{M,r} + \mathbf{v}_{M,e}, \quad \mathbf{v}_{M,r} = \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{OM}, \quad \mathbf{v}_{M,e} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_M$$

откуда следует, что

$$\mathbf{v}_{M,a} = (\dot{x}l \cos x - b\omega)\mathbf{i} + \omega(a + l \sin x)\mathbf{j} + \dot{x}l \sin x \mathbf{k}$$

$$T = (J/2)\omega^2 + (m/2)[l^2\dot{x}^2 + (a^2 + b^2)\omega^2 + 2al\omega^2 \sin x - 2blx\omega \cos x + l^2\omega^2 \sin^2 x]$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – направляющие орты осей ξ_0 , η_0 , ζ_0 соответственно, и T – кинетическая энергия механической системы. Обобщенные силы, соответствующие углу x и углу поворота платформы ψ , равны $Q_x = -mgl \sin x - k\dot{x}$ и $Q_\psi = U$.

Уравнения Лагранжа 2-го рода движения системы "платформа – маятник" имеют вид

$$ml^2\ddot{x} - mbl\dot{\omega} \cos x - ml(a \cos x + l \sin x \cos x)\omega^2 = -mgl \sin x - k\dot{x}$$

$$[J + m(a^2 + b^2) + 2mal \sin x + ml^2 \sin^2 x]\dot{\omega} - mbl\ddot{x} \cos x +$$

$$+ mbl\dot{x}^2 \sin x + 2alm\omega\dot{x} \cos x + ml^2\omega\dot{x} \sin 2x = M$$

Если исключить из этих уравнений угловое ускорение $\dot{\omega}$, а в полученном равенстве заменить угловое ускорение маятника \ddot{x} выражением правой части Y системы уравнений (3.39), то в результате будет получен искомый управляющий момент

$$U = mbl\dot{x}^2 \sin x + 2mal\omega\dot{x} \cos x + ml^2\omega\dot{x} \sin 2x - mblY \cos x +$$

$$+ \frac{J + m(a^2 + b^2) + 2mal \sin x + ml^2 \sin^2 x}{mlb \cos x} \times [ml^2Y - ml(a \cos x + l \sin x \cos x)\omega^2 +$$

$$+ mgl \sin x + k\dot{x}]$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минообразования РФ (тема № 020702-2-075).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнев Г.В. Очерки механики целенаправленного движения. М.: Наука, 1980. 192 с.
2. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 143 с.
3. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986. 224 с.
4. Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение уравнений программного движения управляемых систем. М.: Изд-во УДН, 1969. 194 с.
5. Программное движение механических систем / Под ред. А.С. Галиуллина. М.: Изд-во УДН, 1971. 157 с.
6. Галиуллин А.С. Построение уравнений движения // Дифференц. уравнения. 1977. № 2. С. 195–237.
7. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. М.: Изд-во УДН, 1986. 88 с.
8. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программного движения, оптимизация и оценки. М.: Изд-во УДН, 1986. 88 с.
9. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 6. С. 659–670.
10. Альмухамедов М.И. Обратная задача качественной теории дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1963. № 4. С. 3–6.
11. Альмухамедов М.И. О конструировании дифференциального уравнения, имеющего своими предельными циклами заданные кривые // Изв. вузов. Математика. 1965. № 1. С. 12–16.
12. Мухарлямов Р.Г. К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1967. Т. 3. № 10. С. 1673–1681.
13. Волков С.В. Построение дифференциальных операторов динамических систем. М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1999. 213 с.
14. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // Успехи мат. наук. 1941. Вып. 9. С. 212–253.