МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2002

УДК 531.381

© 2002 г. И.А. МУХАМЕТЗЯНОВ

О СТАБИЛИЗАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРЕЦЕССИИ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

В [1] было построено семейство функций Ляпунова для исследования устойчивости невозмущенного движения неавтономных систем по первому приближению. В [2] этот подход был применен для построения механических систем, обладающих асимптотически устойчивым в целом программным движением.

В данной работе эти результаты применяются для стабилизации цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите[1].

1. Метод решения задачи. Рассмотрим механическую систему

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q(q,\dot{q},t)$$

$$T=\tfrac{1}{2}\dot{q}^T A(q,t)\dot{q}+\dot{q}^T a(q,t)+\tfrac{1}{2}a_0(q,t)$$

В [2] показано, что при выборе вектора обобщенных сил Q в виде

$$\begin{gathered}Q=-Dy-Fx+\frac{1}{2}A'y-\frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{\partial T_2'}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial A(q_0+x,t)}{\partial t}y-\\ -GHx+\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial b_0}{\partial x}+\frac{dAHx}{dt}\\ T_2=\tfrac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q},\quad y=\dot{x}-H(t)x\\ b(x,t)=A(q_0+x,t)\dot{q}_0+a(q_0+x,t),\quad b_0=\dot{q}_0^T A\dot{q}_0+2\dot{q}_0^T a+a_0\\ T_2'=\tfrac{1}{2}y^T Ay\end{gathered}\tag{1.1}$$

система обладает программным движением $q_0(t)$, стабилизированным "в целом".

Здесь A' – $(n\times n)$-матрица с элементами $a'_{ij}=x^T H^T \partial a_{ij}/\partial x$; a_{ij} – элемент матрицы A; $H(t)$ – некоторая ограниченная $(n\times n)$-матрица с ограниченной и непрерывной производной по t; G – кососимметрическая матрица с элементами $g_{\nu i}=-\partial b_\nu/\partial x_i+\partial b_i/\partial x_\nu$; b_ν, b_i – элементы вектора b; D и F – определенно-положительные симметрические матрицы.

[1] Ранее эта задача решалась С.А. Агафоновым в случае движения спутника по круговой орбите. (см. Агафонов С.А. Исследование устойчивости движения неконсервативных механических систем: 02.10.92. Дисс. на соискание учен. степени докт. физ.-мат. наук. М., МГУ, 1992. 170 с.)

При этом для отклонений $x = q - q_0(t)$ от программного движения имеет место функция Ляпунова

$$V = T_2' + \tfrac{1}{2} x^T F x \qquad (1.2)$$

с производной по времени

$$\dot{V} = -y^T D y + x^T (H^T F + \tfrac{1}{2} \dot{F}) x \qquad (1.3)$$

где $(H^T F + \tfrac{1}{2} \dot{F})$ – определенно-отрицательная матрица[2].

Следовательно, имеет место следующий показатель качества переходного процесса:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T D y - x^T \left(H^T F + \frac{\dot{F}}{2} \right) x \right] dt = V_0 \qquad (1.4)$$

где V_0 – значение V при $t = t_0$.

Для улучшения качества переходного процесса добавим к вектору Q дополнительную составляющую $M(x, \dot{x}, t)u$, где M – $(n \times r)$-матрица, u – r-мерный вектор управления. Следуя [3], ищем подынтегральное выражение функционала качества оптимального управления в виде $W^0 = F_1(x, \dot{x}, t) + u^T R(x, \dot{x}, t) u$, где R – $(r \times r)$ определенно-положительная ограниченная симметрическая матрица.

Построим функцию [4]:

$$B^0 = \dot{V} + u^T M^T y + F_1 + u^T R u$$

Из условия $\partial B^0 / \partial u = 0$ получим $u^0 = -\tfrac{1}{2} R^{-1} M^T y$, а из условия $B^0 = 0$

$$F_1 = -\dot{V} + \tfrac{1}{4} y^T M R^{-1} M^T y$$

При этом имеем $W^0 = -\dot{V} + \tfrac{1}{2} y^T M R^{-1} M^T y$ и следующий критерий качества переходного процесса:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T D y - x^T \left(H^T F + \frac{\dot{F}}{2} \right) x + \frac{1}{2} y^T M R^{-1} M^T y \right] dt = V_0 \qquad (1.5)$$

где V_0 – значение $V = T_2' + \tfrac{1}{2} x^T F x$ при $t = t_0$.

Таким образом, добавление к Q оптимального управления u^0 улучшает качество переходного процесса, так как величина функционала качества при $u = 0$:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T D y - x^T \left(H^T F + \frac{\dot{F}}{2} \right) x \right] dt, \text{ равная } V_0 = V(t_0)$$

уменьшается на

$$\tfrac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} y^T M R^{-1} M^T y \, dt$$

что следует из (1.5).

В заключение заметим, что если задачу решать в рамках уравнений первого приближения, то члены $(\tfrac{1}{2} A' y - \partial T_2 / \partial x + \partial T_2' / \partial x)$ второго порядка малости в выражении Q можно приравнять нулю. Если при этом от матриц H, D, F потребовать,

---

[2] Определенная отрицательность этой матрицы достигается подходящим выбором матрицы H.

чтобы $H = H^T$ и матрицы

$$\left(\dot{D} - \frac{1}{2}\frac{\partial A(q_0,t)}{\partial t} + AH\right),\quad \left(F - AH^2 - \frac{dAH}{dt}\right)$$

$$-\left(H^T F' + \frac{\dot{F}'}{2}\right),\quad F' = F - \frac{dAH}{dt} - AH^2$$

были определенно-положительными, то вектор Q можно построить в виде

$$Q = -Dy - Fx + \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_0}{\partial x} - GHx \tag{1.6}$$

2. Построение стабилизирующих моментов. Рассмотрим спутник, состоящий из двух тел, центры масс которых совпадают. Рассмотрим движение центра масс спутника по эллиптической орбите с угловой скоростью $\omega_0(t)$. Положение тел спутника относительно орбитальной системы координат определим углами Эйлера $\psi_i, \theta_i, \varphi_i$ ($i = 1, 2$), при этом $i = 1$ относится к внешнему, а $i = 2$ – к внутреннему телу. Углы ψ_i, θ_i определяют положение осей симметрии тел в орбитальной системе координат [5]. Относительное движение тел происходит под действием силы, обладающей потенциалом [6] $U = -\frac{1}{2}k[(\psi_1 - \psi_2)^2 + (\theta_1 - \theta_2)^2]$. После исключения циклической координаты φ_i ($i = 1, 2$) уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} = M_{\theta_i} + \frac{\partial U}{\partial \theta_i},\quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \psi_i} = M_{\psi_i} + \frac{\partial U}{\partial \psi_i}\quad (i = 1, 2)$$

$$T = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}A_i\dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}A_i \sin^2\theta_i \dot{\psi}_i^2 - \frac{1}{2}A_i\omega_0^2\cos^2\psi_i \sin^2\theta_i + \right.$$

$$+\ A_i\omega_0\dot{\psi}_i \sin\theta_i \cos\theta_i \cos\psi_i + A_i\omega_0\dot{\theta}_i \sin\psi_i -$$

$$\left. -\ C_i r_i \dot{\psi}_i \cos\theta_i + C_i r_i \omega_0 \cos\psi_i \sin\theta_i\right)$$

$$U = -\frac{1}{2}k[(\psi_1 - \psi_2)^2 + (\theta_1 - \theta_2)^2] - \frac{3}{2}\omega_0^2 \sum_{i=1}^{2}(C_i - A_i)\cos^2\theta_i$$

Здесь A_i, C_i – главные центральные моменты инерции тел, M_{θ_i}, M_{ψ_i} – моменты внешних стабилизирующих сил, $C_i r_i$ – постоянные циклических интегралов:

$$C_i\dot{\varphi}_i + C_i\dot{\psi}_i\cos\theta_i - C_i\omega_0\cos\psi_i\sin\theta_i = -C_i r_i\quad (i = 1, 2)$$

Невозмущенным движением, соответствующим цилиндрической прецессии спутника [5, 6] является движение при $\theta_i = \pi/2$, $\psi_i = \pi$, $\dot{\theta}_i = \dot{\psi}_i = 0$ ($i = 1, 2$).

Предположим, что в возмущенном движении на спутник действуют стабилизирующие моменты следующего вида[3]:

$$M_{\theta_i} = -\mu_i(t)(\dot{\theta}_i + \omega_0\sin\psi_i) - C_i r_i\omega_0\cos\psi_i\cos\theta_i$$

$$M_{\psi_i} = -\mu_i(t)(\dot{\psi}_i\sin\theta_i + \omega_0\cos\psi_i\cos\theta_i) +$$

$$+\ C_i r_i\omega_0\sin\psi_i\sin\theta_i + \lambda_i\cos\psi_i$$

где $\mu_i(t) > 0$, $\lambda_i(t) > 0$ – ограниченные функции.

[3] См. работу, цитируемую на стр. 18.

Полагая $\theta_i = \pi/2 + x_i$ ($i = 1, 2$), $\psi_j = \pi + x_j$ ($j = 3, 4$) и ограничиваясь рассмотрением случая $r_1 = r_2 = r$ (угловые скорости внутреннего и внешнего тел на невозмущенном движении равны), в первом приближении получим следующие уравнения возмущенного движения:

$$A\ddot{x} + D\dot{x} + h(t)G\dot{x} + Fx + Ex = 0$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad A = \mathrm{diag}(A_1^0, A_2^0, A_1^0, A_2^0)$$

$$D = \mathrm{diag}(\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_1^0, \mu_2^0), \quad h(t) = \frac{r}{\omega_0}, \quad \mu_i^0 = \frac{\mu_i}{\omega_0^2} \quad (i = 1, 2)$$

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_2 \\ h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{43} & k_{44} \end{Vmatrix}$$

$$E = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -\mu_1' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_2' \\ \mu_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2' & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$h_i = \frac{C_i}{\omega_0} + \frac{2A_i}{r}, \quad k_{ii} = 3C_i - 4A_i + \frac{k}{\omega_0^2} \quad (i = 1, 2)$$

$$k_{33} = \frac{k}{\omega_0^2} - A_1 + \lambda_1, \quad k_{44} = \frac{k}{\omega_0^2} - A_2 + \lambda_2, \quad k_{12} = k_{21} = k_{34} = k_{43} = -\frac{k}{\omega_0^2}$$

$$\mu_i' = \frac{\mu_i}{\omega_0} + \frac{A_i\dot{\omega}_0}{\omega_0^2}$$

Выберем $y = \dot{x} + \delta x$, где δ – произвольная положительная постоянная. Если уравнение возмущенного движения скалярно умножать на вектор y, то получим [2]:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[y^T A y + x^T(F - \delta^2 A + \delta D)x] = -\dot{x}^T(D - \delta A)\dot{x} -$$

$$-\dot{x}^T(E - \delta G)x - x^T\delta\left(F - \frac{\dot{F} + \dot{D}}{2}\right)x$$

Выберем $\mu_i(t)$ из условия $E–\delta G = 0$, откуда следует

$$\frac{\mu_i}{\omega_0} = \delta h(t)\left(\frac{C_i}{\omega_0} + \frac{2A_i}{r}\right) - \frac{A_i\dot{\omega}_0}{\omega_0^2}$$

Подставив значение $h(t) = r/\omega_0$, получим

$$\mu_i = \delta(C_i r/\omega_0 + 2A_i) - A_i\dot{\omega}_0/\omega_0$$

При этом, добившись определенной положительности матрицы F, выбором достаточно малого δ и достаточно большого r можно добиться определенной положительности функции Ляпунова

$$V = \tfrac{1}{2}[y^T A y + x^T(F - \delta^2 A + \delta D)x]$$

и определенной отрицательности ее производной по времени

$$\dot{V} = -\dot{x}^T(D - \delta A)\dot{x} - x^T\delta[F - \tfrac{1}{2}(\dot{F} + \dot{D})]x$$

Заметим, что для определенной положительности матрицы $[F - \tfrac{1}{2}(\dot{F} + \dot{D})]$ потребуется подходящий выбор коэффициентов λ_i. В частном случае, когда μ_i = const > 0 матрица D становится определенно-положительной и постоянной. Следовательно, при этом остается добиваться лишь положительной определенности матриц F и $(F - \tfrac{1}{2}\dot{F})$. Этот случай возможен при круговой орбите спутника.

Отметим, что при этом качество переходного процесса определится значением функционала $\int -\dot{V}dt$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$, равным величине V при $t = t_0$.

Теперь рассмотрим решение задачи о стабилизации спутника при любых начальных возмущениях. Для этого обобщенные силы определим по формуле (1.1), учитывая следующие выражения:

$$y = \dot{x} + x, \quad D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3, d_4), \quad F = \mathrm{diag}(f_1, f_2, f_3, f_4)$$

$$b^T = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_1\sin^2\theta_1, A_2\sin^2\theta_2),$$

$$A' = \mathrm{diag}(0, 0, -x_1\sin 2\theta_1, -x_2\sin 2\theta_2)$$

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)^T = \left(\frac{1}{2}\dot{\psi}_1^2\sin 2\theta_1, \ \frac{1}{2}\dot{\psi}_2^2\sin 2\theta_2, 0, 0\right)$$

$$\left(\frac{\partial T_2'}{\partial x}\right)^T = \left(\frac{1}{2}y_3^2\sin 2\theta_1, \ \frac{1}{2}y_4^2\sin 2\theta_2, 0, 0\right)$$

$$dA/dt = \mathrm{diag}(0, 0, 2\dot{x}_1A_1\sin 2\theta_1, 2\dot{x}_2\sin 2\theta_2)$$

$$b_0 = \sum_{i=1}^{2}(-A_i\omega_0^2\cos^2\psi_i\sin^2\theta_i + 2C_ir_i\omega_0\cos\psi_i\sin\theta_i)$$

$$b_i = A_i\omega_0\sin\psi_i, \quad b_j = A_i\omega_0\sin\theta_i\cos\theta_i\cos\psi_i - C_ir_i\cos\theta_i$$

$$\partial b_i/\partial t = A_i\dot{\omega}_0\sin\psi_i, \quad \partial b_j/\partial t = A_i\dot{\omega}_0\sin\theta_i\cos\theta_i\cos\psi_i$$

$$\frac{\partial b_0}{\partial\theta_i} = \sum_{i=1}^{2}(-2A_i\omega_0^2\sin\theta_i\cos\theta_i\cos^2\psi_i + 2C_ir_i\omega_0\cos\theta_i\cos\psi_i)$$

$$\frac{\partial b_0}{\partial\psi_i} = \sum_{i=1}^{2}(2A_i\omega_0^2\cos\psi_i\sin\psi_i\sin^2\theta_i - 2C_ir_i\omega_0\sin\psi_i\sin\theta_i) \quad (i = 1, 2; j = 3, 4)$$

где d_i, f_i – положительные постоянные.

Элементы кососимметрической матрицы G, вычисляемые по формулам $g_{\nu i} = -\partial b_\nu/\partial q_i + \partial b_i/\partial q_\nu$, имеют следующие значения:

$$g_{13} = -g_{31} = -A_1\omega_0\cos\psi_1 + A_1\omega_0\sin 2\theta_1\cos\psi_1 + C_1r_1\sin\theta_1 \qquad (2.1)$$

$$g_{24} = -g_{41} = -A_2\omega_0\cos\psi_2 + A_2\omega_0\sin 2\theta_2\cos\psi_2 + C_2r_2\sin\theta_2$$

а остальные элементы равны нулю.

Подставляя эти значения в (1.1), получим следующие элементы вектора обобщенной силы Q:

$$Q_1 = -d_1 y_1 - f_1 x_1 - \tfrac{1}{2} A_1 \dot{\psi}_1^2 \sin 2\theta_1 + \tfrac{1}{2} A_1 y_3^2 \sin 2\theta_1 + g_{13} x_3 +$$

$$+ A_1 \dot{\omega}_0 \sin\psi_1 + A_1 \omega_0^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 \cos^2\psi_1 -$$

$$- C_1 r_1 \omega_0 \cos\theta_1 \cos\psi_1 - A_1 \dot{x}_1$$

$$Q_2 = -d_2 y_2 - f_2 x_2 - \tfrac{1}{2} A_1 \dot{\psi}_2^2 \sin 2\theta_2 + \tfrac{1}{2} A_2 y_4^2 \sin 2\theta_2 + g_{24} x_4 +$$

$$+ A_2 \dot{\omega}_0 \sin\psi_2 + A_2 \omega_0^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 \cos^2\psi_2 -$$

$$- C_2 r_2 \omega_0 \cos\theta_2 \cos\psi_2 - A_2 \dot{x}_2$$

$$Q_3 = -d_3 y_3 - f_3 x_3 - \tfrac{1}{2} A_1 y_3 \sin 2\theta_1 + A_1 \dot{\omega}_0 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\psi_1 -$$

$$- C_1 \dot{r}_1 \cos\theta_1 - A_1 \omega_0^2 \cos\psi_1 \sin\psi_1 \sin\theta_1 + C_1 r_1 \omega_0 \sin\psi_1 \sin\theta_1 -$$

$$- A_1 \dot{x}_3 \sin^2\theta_1 - A_1 \dot{x}_1 x_3 \sin 2\theta_1$$

$$Q_4 = -d_4 y_4 - f_4 x_4 - \tfrac{1}{2} y_4 \sin 2\theta_2 - g_{24} x_2 + A_2 \dot{\omega}_0 \sin\theta_2 \cos\theta_2 \cos\psi_2 -$$

$$- C_2 \dot{r}_2 \cos\theta_2 - A_2 \omega_0^2 \cos\psi_2 \sin\psi_2 \sin^2\theta_2 + C_2 r_2 \omega_0 \sin\psi_2 \sin\theta_2 -$$

$$- A_2 \dot{x}_4 \sin^2\theta_2 - A_2 \dot{x}_2 x_4 \sin 2\theta_2$$

$$x_i = \theta_i - \pi/2, \quad x_j = \psi_i - \pi \quad (i = 1, 2; j = 3, 4)$$

где g_{ij} выражается в виде (2.1). Теперь из равенств

$$Q_i = M_{\theta_i} + \frac{\partial U}{\partial \theta_i}, \quad Q_j = M_{\psi_i} + \frac{\partial U}{\partial \psi_i} \quad (i = 1, 2; j = 3, 4)$$

определим значения стабилизирующих моментов

$$M_{\theta_1} = Q_1 + \tfrac{3}{2} \omega_0^2 (C_1 - A_1) \cos^2\theta_1 + k(\theta_1 - \theta_2)$$

$$M_{\theta_2} = Q_2 + \tfrac{3}{2} \omega_0^2 (C_2 - A_2) \cos^2\theta_2 - k(\theta_1 - \theta_2)$$

$$M_{\psi_1} = Q_3 + k(\psi_1 - \psi_2), \quad M_{\psi_2} = Q_4 - k(\psi_1 - \psi_2)$$

обеспечивающих асимптотическую устойчивость в целом цилиндрической прецессии спутника. Заметим, что при этом качество переходного процесса определяется значением функционала (1.4)

$$\int_{t_0}^{\infty} (y^T D y + x^T F x) dt$$

равным величине функции Ляпунова (1.2): $V = \tfrac{1}{2}(y^T A y + x^T F x)dt$ при $t = t_0$.

Можно поставить вопрос об улучшении качества переходного процесса путем добавления к M_{θ_i}, M_{ψ_i} элементов вектора оптимального управления

$$M(x, \dot{x}, t)u, \quad u = u^0 = -\tfrac{1}{2} R^{-1}(x, \dot{x}, t) M^T(x, \dot{x}, t) y$$

где $M(x, \dot{x}, t)$ – заданная $(4 \times r)$-матрица, $(r \leqslant 4)$, $R(x, \dot{x}, t)$ – заданная определенно-положительная матрица $(r \times r)$.

При этом значение функционала качества уменьшается на величину

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} y^T M R^{-1} M^T y dt$$

тем самым улучшается качества переходного процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантами РФФИ (проект 02-01-00199) и Минобразования РФ (гос. регистрация 01.2.00105250).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мухаметзянов И.А.* Построение одного семейства функций Ляпунова // Вестн. РУДН. Сер. Прикл. математика и информатика. 1995. № 1. С. 9–12.
2. *Мухаметзянов И.А.* Построение систем асимптотически устойчивого в целом программного движения // Вестн. РУДН. Сер. Прикл. математика и информатика. 1998. № 1. С. 16–21.
3. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440–456.
4. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
5. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
6. *Kane T.R., Barba P.M.* Effects of energy dissipation on a spinning satellite // AIAA Journal. 1966. V. 4. № 8. P. 1391–1394.

Москва