

УДК 624.072.21/23

© 2002 г. Ю.И. БУТЕНКО

**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО  
ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ  
ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА. Ч. 3.**

В работах [1, 2] рассмотрены вопросы построения внутренней задачи и задачи погранслоя с точностью  $\varepsilon^2$  для стержней из ортотропного материала. Открытым остался вопрос формулировки краевых условий для каждой из этих задач, что является предметом обсуждения в данной работе.

**5. Краевые условия внутренней задачи.** В [1] показано, что внутренняя задача при симметричной нагрузке для полосы из ортотропного материала сводится к дифференциальному уравнению растяжения – сжатия (2.3):

$$E_1 d^2 u_0^s / d\xi^2 = p^s$$

а при кососимметричной нагрузке к уравнению изгиба полосы (2.19):

$$E_1 d^4 v_0^s / d\xi^4 = q^s$$

Эти уравнения имеют рекуррентный характер и должны быть проинтегрированы с соблюдением соответствующих краевых условий при любом  $s$ . Остановимся на получении краевых условий с учетом условий существования затухающих решений погранслоя [2]. Условия существования затухающих решений для полосы с краевыми условиями (1.31) – (1.33) позволяют довольно просто получить краевые условия внутренней задачи если учитывать, что  $R_p^1 = I_\Sigma - Q$ , где  $I_\Sigma$  – краевое условие на кромке  $\Sigma$ ,  $Q$ ,  $R_p^1$  – соответствующие величины внутренней задачи и задачи погранслоя, которые имеют место и на границе. Рассмотрим все возможные варианты краевых условий.

*Статические краевые условия (заданы  $p_x, p_y$ ).* Для симметричной задачи имеем выражение (4.4):

$$\sigma_{x,0} + \frac{1}{3} \varepsilon^2 \sigma_{x,2} + \frac{1}{5} \varepsilon^4 \sigma_{x,4} + \dots = \int_0^1 p_x(\zeta) d\zeta$$

асимптотический анализ которого приводит к соотношению

$$\sigma_{x,0}^s + \frac{1}{3} \sigma_{x,2}^{s-2} + \frac{1}{5} \sigma_{x,4}^{s-4} + \dots = p_\Sigma^s \tag{5.1}$$

$$p_\Sigma^0 = \int_0^1 p_x(\zeta) d\zeta, \quad p_\Sigma^s = 0 \quad \text{при } s \geq 1$$

Из (5.1) следует краевое условие, справедливое при любом  $s$ :

$$E_1 \frac{du_0^s}{d\xi} = p_\Sigma^s - \nu_{12} \frac{E_1}{E_2} \sigma_{y,0}^s - \frac{1}{3} \sigma_{x,2}^{s-2} - \frac{1}{5} \sigma_{x,4}^{s-4} - \dots \quad (5.2)$$

Для  $s = 2\bar{s}$  ( $\bar{s} = 0, 1$ ) имеем условия

$$E_1 \frac{du_0^0}{d\xi} = p_\Sigma^0 - \nu_{12} \frac{E_1}{E_2} p_1^0 \quad (5.3)$$

$$E_1 \frac{du_0^2}{d\xi} = -\frac{1}{6} \left[ \left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} + 3\nu_{12} \frac{E_1}{E_2} \right) \frac{dp_2^0}{d\xi} - \frac{E_1}{E_2} \frac{d^2 p_1^0}{d\xi^2} \right] \quad (5.4)$$

С точностью  $E_1 / G_{12} \gg \nu_{12}$ ,  $E_1 / G_{12} \gg E_1 / E_2$  получаем из условия (5.4) выражение

$$E_1 \frac{du_0^2}{d\xi} = -\frac{1}{6} \frac{E_1}{G_{12}} \frac{dp_2^0}{d\xi}, \quad p_1^0 = Y_1, \quad p_2^0 = X_1 / \varepsilon$$

При  $s = 2\bar{s} + 1$  ( $\bar{s} = 0, 1, \dots$ ) имеем однородное краевое условие

$$E_1 du_0^s / d\xi = 0 \quad (5.5)$$

Для задачи изгиба из (4.5), (4.6) следуют два условия при любом  $s$ :

$$\frac{1}{3} \sigma_{x,1}^s + \frac{1}{5} \sigma_{x,3}^{s-2} + \frac{1}{7} \sigma_{x,5}^{s-4} + \dots = M_\Sigma^s \quad (5.6)$$

$$\tau_{xy,0}^s + \frac{1}{3} \tau_{xy,2}^{s-2} + \frac{1}{5} \tau_{xy,4}^{s-4} + \dots = Q_\Sigma^s \quad (5.7)$$

$$M_\Sigma^0 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 p_x(\zeta) \zeta d\zeta, \quad M_\Sigma^s = 0 \quad \text{при } s \geq 1$$

$$Q_\Sigma^s = 0 \quad \text{при } s = 0, 1, \quad Q_\Sigma^2 = \int_0^1 p_y(\zeta) d\zeta, \quad Q_\Sigma^s = 0 \quad \text{при } s \geq 3$$

Из (5.6), (5.7) получаем окончательно краевые статические условия задачи изгиба

$$\frac{1}{3} E_1 \frac{d^2 v_0^s}{d\xi^2} = -M_\Sigma^s + \frac{1}{3} \nu_{12} \frac{E_1}{E_2} \sigma_{y,1}^s + \frac{1}{3} \frac{E_1}{G_{12}} \frac{d\tau_{xy,0}^s}{d\xi} + \frac{1}{5} \sigma_{x,3}^{s-2} + \frac{1}{7} \sigma_{x,5}^{s-4} + \dots \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{3} E_1 \frac{d^3 v_0^s}{d\xi^3} = -Q_\Sigma^{s+2} + \frac{1}{3} \nu_{12} \frac{E_1}{E_2} \frac{d\sigma_{y,1}^s}{d\xi} + \frac{1}{3} \frac{E_1}{G_{12}} \frac{d^2 \tau_{xy,0}^s}{d\xi^2} + \frac{1}{5} \tau_{xy,4}^{s-2} + \frac{1}{7} \tau_{x,6}^{s-4} + \dots \quad (5.9)$$

Характер асимптотики кососимметричной задачи таков, что краевые условия (5.8) и (5.9) получаются при разных  $\varepsilon$ , что связано с выражением  $\tau_{xy,0}^0 = \tau_{xy,0}^1 = 0$ . При  $s = 2\bar{s}$  ( $\bar{s} = 0, 1$ ) имеем краевые условия

$$E_1 \frac{d^2 v_0^0}{d\xi^2} = -3M_\Sigma^0, \quad E_1 \frac{d^3 v_0^0}{d\xi^3} = -3Q_\Sigma^2 \quad (5.10)$$

$$E_1 \frac{d^2 v_0^2}{d\xi^2} = \left( -\frac{2}{5} \frac{E_1}{G_{12}} + \frac{3}{10} \nu_{21} \right) q_y^0 - \left( \frac{1}{15} \frac{E_1}{G_{12}} + \frac{1}{30} \nu_{21} \right) \frac{dq_x^0}{d\xi} \quad (5.11)$$

$$E_1 \frac{d^3 v_0^2}{d\xi^3} = \left( -\frac{2}{5} \frac{E_1}{G_{12}} + \frac{3}{10} \nu_{21} \right) \frac{dq_y^0}{d\xi} - \left( \frac{1}{15} \frac{E_1}{G_{12}} + \frac{1}{30} \nu_{21} \right) \frac{d^2 q_x^0}{d\xi^2}$$

$$q_y^0 = q / J, \quad q_x^0 = m / J, \quad J = 1.2h^3 / 3$$

В краевых условиях для  $\nu_0^2$  возможны упрощения, связанные с отношением величин  $E_1 / G_{12}$ ,  $E_1 / E_2$ .

Для  $s = 2\bar{s} + 1$  ( $\bar{s} = 0, 1, \dots$ ) имеем однородные краевые условия

$$E_1 d^2 \nu_0^s / d\xi^2 = 0, \quad E_1 d^3 \nu_0^s / d\xi^3 = 0 \quad (5.12)$$

*Смешанные краевые условия (заданы  $u_\Sigma, p_y$ ).* Для симметричной задачи имеем одно кинематическое краевое условие, следующее из условия существования затухающего решения (4.10):

$$u_0 + \frac{1}{3} \varepsilon^2 u_2 + \dots + \varepsilon \frac{\nu_{12}}{E_2} \left( \frac{1}{3} \varepsilon \tau_{xy,1} + \frac{1}{5} \varepsilon^3 \tau_{xy,3} + \dots \right) = \int_0^1 u_\Sigma d\xi + \frac{\nu_{12}}{E_2} \int_0^1 \zeta p_y d\xi \quad (5.13)$$

асимптотический анализ которого приводит к выражению

$$u_0^s = u_\Sigma^s + \tau_\Sigma^{s-2} - \frac{1}{3} u_2^{s-2} - \frac{1}{5} u_4^{s-4} - \dots - \frac{\nu_{12}}{E_2} \left( \frac{1}{3} \tau_{xy,1}^{s-2} + \frac{1}{5} \tau_{xy,3}^{s-4} + \dots \right) \quad (5.14)$$

$$u_\Sigma^0 = \int_0^1 u_\Sigma d\xi, \quad u_\Sigma^s = 0 \quad \text{при } s \geq 1, \quad \tau_\Sigma^0 = \frac{\nu_{12}}{\varepsilon E_2} \int_0^1 \zeta p_y d\xi, \quad \tau_\Sigma^s = 0 \quad \text{при } s \geq 1$$

Для нескольких первых приближений из (5.14) имеем

$$u_0^0 = u_\Sigma^0, \quad u_0^1 = 0, \quad u_0^2 = \tau_\Sigma^0 - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{G_{12}} + \frac{\nu_{21}}{E_1} \right) p_2^0 + \frac{1}{6E_2} \frac{dp_1^0}{d\xi} \quad (5.15)$$

Последнее соотношение можно упростить с учетом отношения упругих характеристик.

Анализ краевого условия (5.14) показывает, что при  $s = 2$  статическое условие  $p_y$  влияет на кинематическое условие и, если  $u_\Sigma^0 = 0$ , с этого приближения начинаются неоднородные краевые условия. В то же время кинематические краевые условия при нечетных  $s$  являются однородными.

Для задачи изгиба имеем одно статическое краевое условие (5.9), накладываемое на  $\tau_{xy}$ , рассмотренное выше, и одно кинематическое условие, следующее из условия существования затухающего решения (4.13):

$$\begin{aligned} & 2 \left( \frac{1}{3} \varepsilon u_1 + \frac{1}{5} \varepsilon^3 u_3 + \dots \right) + \varepsilon \frac{\nu_{12}}{E_2} \left( \frac{1}{3} \tau_{xy,0} + \frac{1}{5} \varepsilon^2 \tau_{xy,2} + \frac{1}{7} \varepsilon^4 \tau_{xy,4} + \dots \right) = \\ & = 2 \int_0^1 u_\Sigma \zeta d\xi + \varepsilon \frac{\nu_{12}}{E_2} \int_0^1 p_y \zeta^2 d\xi \end{aligned} \quad (5.16)$$

Асимптотический анализ соотношения (5.16) приводит при любом  $s$  к зависимости

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_0^s}{d\xi} &= \frac{\tau_{xy,0}^s}{G_{12}} + 3 \left( \frac{1}{5} u_3^{s-2} + \frac{1}{7} u_5^{s-4} + \dots \right) + \\ &+ \frac{3\nu_{12}}{2E_2} \left( \frac{1}{3} \tau_{xy,0}^s + \frac{1}{5} \tau_{xy,2}^{s-2} + \frac{1}{7} \tau_{xy,4}^{s-4} + \dots \right) + u_\Sigma^s + \tau_\Sigma^{s-2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$u_\Sigma^0 = -\frac{3}{\varepsilon} \int_0^1 u_\Sigma \zeta d\xi, \quad u_\Sigma^s = 0 \quad \text{при } s \geq 1$$

$$\tau_\Sigma^0 = -\frac{3\nu_{12}}{\varepsilon^2 2E_2} \int_0^1 \zeta^2 p_y d\xi, \quad \tau_\Sigma^s = 0 \quad \text{при } s \geq 1$$

Из (5.17) в первых приближениях имеем

$$dv_0^0 / d\xi = u_\Sigma^0 \text{ и, если } u_\Sigma = 0, \text{ то } dv_0^0 / d\xi = 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{dv_0^1}{d\xi} = 0; \quad \frac{dv_0^2}{d\xi} = \tau_\Sigma^0 + \frac{1}{5} \left( \frac{v_{12}}{E_2} + \frac{2}{G_{12}} \right) \frac{d\sigma_{x,1}^0}{d\xi}$$

Здесь влияние краевой нагрузки на кинематическое краевое условие также начинается при  $s = 2$ .

*Смешанные краевые условия (заданы  $p_x, v_\Sigma$ ).* Для задачи растяжения – сжатия в этом случае имеем одно статическое краевое условие (5.1) и нет никакого взаимного влияния  $p_x$  и  $v_\Sigma$ .

Для задачи изгиба имеем два краевых условия: одно статическое и одно геометрическое. Статическое краевое условие имеет вид (5.6) и на него не влияет перемещение  $v$ . На геометрическое условие влияет нагрузка  $p_x$ , что следует из условия согласования краевых условий (4.18), которое имеет вид

$$\begin{aligned} & 6 \left( \frac{1}{1.3} v_0 + \frac{1}{3.5} \varepsilon^2 v_2 + \dots \right) + \varepsilon \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{v_{12}}{E_2} \right) \left( \frac{1}{5} \varepsilon \sigma_{x,1} + \frac{1}{7} \varepsilon^3 \sigma_{x,3} + \dots \right) = \\ & = 3 \int_0^1 (1 - \zeta^2) v_\Sigma d\zeta + \varepsilon \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{v_{12}}{E_2} \right) \int_0^1 \zeta^3 p_x d\zeta \end{aligned} \quad (5.19)$$

Асимптотический анализ выражения (5.19) приводит к соотношению

$$v_0^s = -3 \left( \frac{1}{3.5} v_2^{s-2} + \frac{1}{5.7} v_4^{s-4} + \dots \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{v_{12}}{E_2} \right) \left( \frac{1}{5} \sigma_{x,1}^{s-2} + \frac{1}{7} \sigma_{x,3}^{s-4} + \dots \right) + v_\Sigma^s + p_\Sigma^{s-2} \quad (5.20)$$

$$v_\Sigma^0 = \frac{3}{2} \int_0^1 (1 - \zeta^2) v_\Sigma, \quad v_\Sigma^s = 0 \text{ при } s \geq 1$$

$$p_\Sigma^0 = \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{v_{12}}{E_2} \right) \int_0^1 \zeta^3 p_x d\zeta, \quad p_\Sigma^s = 0 \text{ при } s \geq 1$$

Задача шарнирного опирания при изгибе сводится к следующим геометрическим краевым условиям, налагаемым на прогиб

$$v_0^0 = v_\Sigma^0, \quad v_0^1 = 0, \quad v_0^2 = \frac{1}{10} \left( 2 \frac{v_{12}}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sigma_{x,1}^0 + p_\Sigma^0 \quad (5.21)$$

Влияние статического краевого условия сказывается на геометрические краевые условия при высоких приближениях  $s \geq 2$ . Однако значения  $v_0^s$  на границе определяется не из простого интеграла от перемещения  $v$ , а из интеграла с весом  $(1 - \zeta^2)$ . Это показывает, что даже в самом грубом приближении нельзя принцип Сен-Венена формально перенести на перемещение. При постоянном по  $\zeta$  прогибе из (5.21) получаем  $v_0^0 = v_\Sigma$ , что полностью совпадает с классическим краевым условием.

*Кинематические краевые условия (заданы  $u_\Sigma, v_\Sigma$ ).* Условия согласования краевых условий симметричной задачи (4.21) и задачи изгиба (4.24), (4.25) при кинематических краевых условиях отличаются от всех остальных наличием интегрирования по координате  $t$ . Поэтому применение этих условий невозможно без использования решений задачи погранслоя. Условия существования затухающих решений в этом варианте ис-

пользуются совместно с соответствующими краевыми условиями. Так для симметричной задачи имеем условие (4.21):

$$u_{p,0} + \frac{1}{3}\varepsilon^2 u_{p,2} + \frac{1}{5}\varepsilon^4 u_{p,4} + \dots + v_{12} \int_0^\infty (\varepsilon v_{p,1} + \varepsilon^3 v_{p,3} + \dots) dt = 0 \quad (5.22)$$

и краевые условия в вариационной постановке (1.16):

$$\sum_{k=0} a_{ik} \varepsilon^{2k} u_{2k} = \int_0^1 \zeta^{2i} u_\Sigma(\zeta) d\zeta, \quad \sum_{k=0} b_{ik} \varepsilon^{2k+1} v_{2k+1} = \int_0^1 \zeta^{2i+1} v_\Sigma(\zeta) d\zeta, \quad (i=0, 1, \dots) \quad (5.23)$$

С учетом значения перемещения на границе  $u_p = u_\Sigma - u$  выражение (5.22) преобразуется к виду

$$u_0 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 u_2 + \frac{1}{5}\varepsilon^4 u_4 + \dots - v_{12} \int_0^\infty (\varepsilon v_{p,1} + \varepsilon^3 v_{p,3} + \dots) dt = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta \quad (5.24)$$

в котором компоненты перемещений задачи погранслоя определяются соотношениями

$$u_{p,0} = \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa+1} u_{p,0}^s e^{-\lambda t}, \quad u_{p,2} = \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa-1} u_{p,2}^s e^{-\lambda t}, \quad u_{p,4} = \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa-3} u_{p,4}^s e^{-\lambda t} \dots \\ v_{p,1} = \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa} v_{p,1}^s e^{-\lambda t}, \quad v_{p,3} = \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa-2} v_{p,3}^s e^{-\lambda t} \dots \quad (5.25)$$

где  $\lambda$  – параметр, характеризующий скорость убывания погранслоя;  $\kappa$  – параметр, связывающий внутреннюю задачу и задачу погранслоя через краевые условия.

Решение задачи погранслоя (3.6) растяжения–сжатия с точностью  $\varepsilon^2$  приводит к четырем корням  $\lambda_{ij} > 0$ , которые связаны с затухающим решением. Таким образом решение задачи погранслоя при действительных собственных числах, которые чаще всего имеют место для ортотропных материалов, записываем в виде

$$(u_{p,0}^s, v_{p,1}^s, u_{p,2}^s, v_{p,3}^s, u_{p,4}^s) = \sum_{k=1}^4 (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \alpha_{3k}, \alpha_{4k}, \alpha_{5k}) C_k^s e^{-\lambda_k t} \quad (5.26)$$

Здесь  $\alpha_{ij}$  – обозначение собственных векторов,  $C_j^s$  – постоянные интегрирования задачи.

С учетом (5.25) – (5.26) в условии (5.24) возможно провести интегрирование по  $t$  и оно приобретает вид

$$u_0 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 u_2 + \frac{1}{5}\varepsilon^4 u_4 + \dots - v_{12} \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa+1} \sum_{k=1}^4 \frac{\mu_k}{\lambda_k} C_k^s = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta \quad (5.27) \\ \mu_k = \alpha_{2k} + \alpha_{4k} + \dots \quad (k=1, 2, \dots)$$

Таким образом, условие (5.27) при  $t=0$  содержит решение внутренней задачи и задачи погранслоя  $C_k^s$ . Без дополнительных условий разделить краевые условия в выражении (5.27) не удастся. В данном подходе в качестве дополнительных соотношений можно привлечь краевые условия, полученные вариационным путем (5.23). Для выбранной точности имеем следующие краевые условия (5.23):

$$u_0 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 u_2 + \frac{1}{5}\varepsilon^4 u_4 + \dots + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa+1} \left( u_{p,0}^s + \frac{1}{3} u_{p,2}^s + \frac{1}{5} u_{p,4}^s + \dots \right) = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta \\ \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa+1} \left( \frac{1}{3} u_{p,0}^s + \frac{1}{5} u_{p,2}^s + \frac{1}{7} u_{p,4}^s + \dots \right) = \int_0^1 \zeta^2 u_\Sigma d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^s \left( \frac{1}{3} u_0^s + \frac{1}{5} \varepsilon^2 u_2^s + \frac{1}{7} \varepsilon^4 u_4^s + \dots \right)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+\kappa+1} \left( \frac{1}{5} u_{p,0}^s + \frac{1}{7} u_{p,2}^s + \frac{1}{9} u_{p,4}^s + \dots \right) = \int_0^1 \zeta^4 u_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left( \frac{1}{5} u_0^s + \frac{1}{7} \varepsilon^2 u_2^s + \frac{1}{9} \varepsilon^4 u_4^s + \dots \right)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+\kappa+1} \left( \frac{1}{3} v_{p,1}^s + \frac{1}{5} v_{p,3}^s + \dots \right) = \int_0^1 \zeta v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left( \frac{1}{3} \varepsilon v_1^s + \frac{1}{5} \varepsilon^3 v_3^s + \dots \right)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+\kappa+1} \left( \frac{1}{5} v_{p,1}^s + \frac{1}{7} v_{p,3}^s + \dots \right) = \int_0^1 \zeta^3 v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left( \frac{1}{5} \varepsilon v_1^s + \frac{1}{7} \varepsilon^3 v_3^s + \dots \right)$$

Из сравнения (5.27) и первого условия (5.28) видна их тождественность. Таким образом условие существования затухающих решений является заменой первого вариационного краевого условия [2]. Для получения непротиворечивых решений внутренней задачи и задачи погранслоя принимаем  $\kappa = 0$ , хотя для получения краевых условий только внутренней задачи нет необходимости находить этот параметр. После подстановки (5.26) в (5.28) получим алгебраическую систему уравнений относительно постоянных интегрирования задачи погранслоя  $C_k^s$ :

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} (a_{12} C_1^s + a_{22} C_2^s + a_{23} C_3^s + a_{24} C_4^s + \dots) = \int_0^1 \zeta^2 u_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left( \frac{1}{3} u_0^s + \frac{1}{5} \varepsilon^2 u_2^s + \frac{1}{7} \varepsilon^4 u_4^s + \dots \right)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} (a_{31} C_1^s + a_{32} C_2^s + a_{33} C_3^s + a_{34} C_4^s + \dots) = \int_0^1 \zeta^4 u_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left( \frac{1}{5} u_0^s + \frac{1}{7} \varepsilon^2 u_2^s + \frac{1}{9} \varepsilon^4 u_4^s + \dots \right)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} (b_{11} C_1^s + b_{12} C_2^s + b_{13} C_3^s + b_{14} C_4^s + \dots) = \int_0^1 \zeta v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} \left( \frac{1}{3} v_1^s + \frac{1}{5} \varepsilon^2 v_3^s + \dots \right)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} (b_{21} C_1^s + b_{22} C_2^s + b_{23} C_3^s + b_{24} C_4^s + \dots) = \int_0^1 \zeta^3 v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} \left( \frac{1}{5} v_1^s + \frac{1}{7} \varepsilon^2 v_3^s + \dots \right)$$

$$a_{2k} = \frac{1}{3} \alpha_{1k} + \frac{1}{5} \alpha_{3k} + \frac{1}{7} \alpha_{5k} + \dots, \quad a_{3k} = \frac{1}{5} \alpha_{1k} + \frac{1}{7} \alpha_{3k} + \frac{1}{9} \alpha_{5k} + \dots$$

$$b_{1k} = \frac{1}{3} \alpha_{2k} + \frac{1}{5} \alpha_{4k} + \dots, \quad b_{2k} = \frac{1}{5} \alpha_{2k} + \frac{1}{7} \alpha_{4k} + \dots \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Система уравнений (5.29) решается многократно при различных правых частях. Матрица коэффициентов алгебраической системы уравнений и ее правой части таковы, что они могут быть разрешены один раз для любого приближения.

Решение системы уравнений (5.29) представим в виде

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} C_k^s = P_{uk} + P_{vk} + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s (\beta_{k1} u_0^s + \beta_{k3} \varepsilon^2 u_2^s + \beta_{k5} \varepsilon^4 u_4^s + \dots) + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} (\beta_{k2} v_1^s + \beta_{k4} \varepsilon^2 v_3^s + \dots) \quad (k = 1, \dots, 4)$$

Здесь  $P_{uk}$ ,  $P_{vk}$  – решения от заданных краевых условий  $u_{\Sigma}$ ,  $v_{\Sigma}$ ,  $\beta_{ki}$  – решение от правой части, содержащей  $u_0^s$ ,  $v_1^s$  и т.д.

Из условия существования затухающего решения (5.27) с учетом (5.30) имеем

$$u_0 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 u_2 + \frac{1}{5}\varepsilon^4 u_4 + \dots - v_{12} \left[ P_u + P_v + \sum_{s=0} \varepsilon^s (A_1 u_0^s + A_3 \varepsilon^2 u_2^s + A_5 \varepsilon^4 u_4^s + \dots) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} (A_2 v_1^s + A_4 \varepsilon^2 v_3^s + \dots) \right] = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta \quad (5.31)$$

$$P_u = \sum_{n=1}^4 \frac{\mu_n}{\lambda_n} P_{un}, \quad P_v = \sum_{n=1}^4 \frac{\mu_n}{\lambda_n} P_{vn}, \quad A_k = \sum_{n=1}^4 \frac{\mu_n}{\lambda_n} \beta_{nk} \quad (k=1, 2, \dots, 5)$$

Асимптотический анализ условия (5.31) приводит к выражению

$$u_0^s + \frac{1}{3}u_2^{s-2} + \frac{1}{5}u_4^{s-4} + \dots - v_{12}(P_u^s + P_v^{s-1} + A_1 u_0^s + A_2 v_1^{s-1} + A_3 u_2^{s-2} + A_4 v_3^{s-3} + A_5 u_4^{s-4}) = u_\Sigma^s \quad (5.32)$$

$$P_u^0 = P_u, \quad P_v^0 = P_v / \varepsilon, \quad u_\Sigma^0 = \int_0^1 u_\Sigma d\zeta, \quad P_u^s = P_v^s = u_\Sigma^s = 0 \quad \text{при } s \geq 1$$

Из (5.32) окончательно получаем

$$(1 - v_{12}A_1)u_0^s = u_\Sigma^s + v_{12}P_u^s + \left(v_{12}A_3 - \frac{1}{3}\right)u_2^{s-2} + \left(v_{12}A_5 - \frac{1}{5}\right)u_4^{s-4} + \dots + v_{12}(P_v^{s-1} + A_2 v_1^{s-1} + A_4 v_3^{s-3} + \dots) \quad (5.33)$$

откуда найдем кинематические краевые условия симметричной задачи определения ОНС для первых приближений при  $A = 1 - v_{12}A_1$ :

$$Au_0^0 = u_\Sigma^0 + v_{12}P_u^0, \quad Au_1^0 = v_{12}(P_v^0 + A_2 v_1^0), \\ Au_0^2 = (v_{12}A_3 - 1/3)u_2^0 + v_{12}A_2 v_1^1 \quad (5.34)$$

В данном варианте кинематического краевого условия намечен только путь получения краевого условия защемления при асимптотическом подходе. Для доведения полученных условий до рабочего состояния необходимы коэффициенты  $A_k$ , а для этого надо иметь решение собственной проблемы задачи погранслоя. Однако характер краевых условий определен. При  $s = 0$  краевое условие (5.34) зависит от вида условия  $u_\Sigma$ . Так, для  $u_\Sigma = \text{const}$  и  $v_\Sigma = \varepsilon \zeta \bar{v}_\Sigma$ , что чаще всего имеет место на практике,  $u_0^0 = u_\Sigma^0$ , что совпадает с условием (5.15) и с классическим кинематическим краевым условием. На этом этапе погранслоем не влияет на значения постоянных внутренней задачи. При  $s \geq 1$  решение задачи погранслоя влияет на решение внутренней задачи, и пренебрежение задачей погранслоя в защемлении приводит к большим погрешностям, чем при других краевых условиях. Краевое условие  $v_\Sigma$  влияет на формулировку краевого условия  $u_0^s$  при  $s \geq 1$  (5.34).

Аналогичный путь получения кинематических краевых условий имеет место и для изгиба. В этом случае используем условия согласования (4.22), (4.23), которые с точностью  $\varepsilon^2$  запишем в виде

$$\frac{1}{3}\varepsilon u_1 + \frac{1}{5}\varepsilon^3 u_3 + \dots - v_{12} \int_0^\infty \left( \frac{2}{3}\varepsilon^2 v_{p,2} + \frac{4}{5}\varepsilon^4 v_{p,4} + \dots \right) dt = \int_0^1 u_\Sigma \zeta d\zeta \quad (5.35)$$

$$v_0 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 v_2 + \frac{1}{5}\varepsilon^4 v_4 + \dots - \int_0^\infty (\varepsilon u_{p,1} + \varepsilon^3 u_{p,3} + \dots) dt = \int_0^1 v_\Sigma d\zeta \quad (5.36)$$

краевые условия защемления (1.28) представим в форме

$$\sum_{k=0}^1 b_{ik} \varepsilon^{2k+1} u_{2k+1} = \int_0^1 \zeta^{2i+1} u_{\Sigma} d\zeta, \quad \sum_{k=0}^2 a_{ik} \varepsilon^{2k} v_{2k} = \int_0^1 \zeta^{2i} v_{\Sigma} d\zeta \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad (5.37)$$

Краевые условия (5.37) с учетом разделения параметров внутренней задачи и задачи погранслоя записываем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \varepsilon u_{p,1} + \frac{1}{5} \varepsilon^3 u_{p,3} + \dots &= \int_0^1 \zeta u_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^s \left( \frac{1}{3} \varepsilon u_1^s + \frac{1}{5} \varepsilon^3 u_3^s + \dots \right) \\ \frac{1}{5} \varepsilon u_{p,1} + \frac{1}{7} \varepsilon^3 u_{p,3} + \dots &= \int_0^1 \zeta^3 u_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^s \left( \frac{1}{5} \varepsilon u_1^s + \frac{1}{7} \varepsilon^3 u_3^s + \dots \right) \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} v_{p,0} + \frac{1}{3} \varepsilon^2 v_{p,2} + \frac{1}{5} \varepsilon^4 v_{p,4} + \dots &= \int_0^1 v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^s \left( v_0^s + \frac{1}{3} \varepsilon^2 v_2^s + \frac{1}{5} \varepsilon^4 v_4^s + \dots \right) \\ \frac{1}{3} v_{p,0} + \frac{1}{5} \varepsilon^2 v_{p,2} + \frac{1}{7} \varepsilon^4 v_{p,4} + \dots &= \int_0^1 \zeta^2 v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^s \left( \frac{1}{3} v_0^s + \frac{1}{5} \varepsilon^2 v_2^s + \frac{1}{7} \varepsilon^4 v_4^s + \dots \right) \\ \frac{1}{5} v_{p,0} + \frac{1}{7} \varepsilon^2 v_{p,2} + \frac{1}{9} \varepsilon^4 v_{p,4} + \dots &= \int_0^1 \zeta^4 v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^s \left( \frac{1}{5} v_0^s + \frac{1}{7} \varepsilon^2 v_2^s + \frac{1}{9} \varepsilon^4 v_4^s + \dots \right) \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Система уравнений (5.38) служит для вычисления параметров погранслоя через компоненты внутренней задачи и значения перемещений на границе  $u_{\Sigma}$ ,  $v_{\Sigma}$ , но при этом исключаются первые условия для  $u$  и  $v$ , которые являются аналогом условий существования затухающих решений. Условие существования затухающих решений (5.35) не содержит  $v_{p,0}$ .

Для задачи погранслоя перемещения выбираются в виде (3.16):

$$\begin{aligned} v_{p,0} &= \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\alpha+1} v_{p,0}^s e^{-\lambda t}, & v_{p,2} &= \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\alpha-1} v_{p,2}^s e^{-\lambda t}, & v_{p,4} &= \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\alpha-3} v_{p,4}^s e^{-\lambda t}, \dots \\ u_{p,1} &= \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\alpha} u_{p,1}^s e^{-\lambda t}, & u_{p,3} &= \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\alpha-2} u_{p,3}^s e^{-\lambda t}, \dots \end{aligned} \quad (5.39)$$

Решение задачи погранслоя с учетом трех постоянных интегрирования представим в виде

$$(v_{p,0}^s, u_{p,1}^s, v_{p,2}^s, u_{p,3}^s, v_{p,4}^s) = \sum_{k=1}^3 (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \alpha_{3k}, \alpha_{4k}, \alpha_{5k}) C_k^s e^{-\lambda k t} \quad (5.40)$$

Здесь, как и в симметричной задаче,  $C_j^s$  – постоянные интегрирования задачи,  $\alpha_{ij}$  – собственные векторы задачи погранслоя.

С учетом (5.39), (5.40) проведем интегрирование условий существования затухающих решений (5.35), (5.36) которые принимают вид

$$\frac{1}{3} \varepsilon u_1 + \frac{1}{5} \varepsilon^3 u_3 + \dots - v_{12} \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\alpha+1} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k}{\lambda_k} C_k^s = \int_0^1 u_{\Sigma} \zeta d\zeta \quad (5.41)$$

$$v_0 + \frac{1}{3} \varepsilon^2 v_2 + \frac{1}{5} \varepsilon^4 v_4 + \dots - \sum_{s=0} \varepsilon^{s+\alpha+1} \sum_{k=1}^3 \frac{\bar{\mu}_k}{\lambda_k} C_k^s = \int_0^1 v_{\Sigma} d\zeta \quad (5.42)$$

$$\mu_k = \frac{2}{3} \alpha_{3k} + \frac{4}{5} \alpha_{5k} + \dots, \quad \bar{\mu}_k = \alpha_{2k} + \alpha_{4k} + \dots \quad (k=1, 2)$$



Для определения постоянных интегрирования задач погранслоя  $C_k^s$  используем краевые условия (5.38), которые с учетом (5.39) имеют вид

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa+1} \left( \frac{1}{5} u_{p,1}^s + \frac{1}{7} u_{p,3}^s + \dots \right) = \int_0^1 \zeta^3 u_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} \left( \frac{1}{5} u_1^s + \frac{1}{7} \varepsilon^2 u_3^s + \dots \right) \quad (5.43)$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa+1} \left( \frac{1}{3} v_{p,0}^s + \frac{1}{5} v_{p,2}^s + \frac{1}{7} v_{p,4}^s + \dots \right) = \int_0^1 \zeta^2 v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^s \left( \frac{1}{3} v_0^s + \frac{1}{5} \varepsilon^2 v_2^s + \frac{1}{7} \varepsilon^4 v_4^s + \dots \right)$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+\kappa+1} \left( \frac{1}{5} v_{p,0}^s + \frac{1}{7} v_{p,2}^s + \frac{1}{9} v_{p,4}^s + \dots \right) = \int_0^1 \zeta^4 v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^s \left( \frac{1}{5} v_0^s + \frac{1}{7} \varepsilon^2 v_2^s + \frac{1}{9} \varepsilon^4 v_4^s + \dots \right)$$

С учетом (5.40), (5.41), (5.42) и  $\kappa = 1$  имеем

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+2} (a_{21} C_1^s + a_{22} C_2^s + a_{23} C_3^s + \dots) = \int_0^1 \zeta^3 u_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} \left( \frac{1}{5} u_1^s + \frac{1}{7} \varepsilon^2 u_3^s + \dots \right) \quad (5.44)$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+2} (b_{21} C_1^s + b_{22} C_2^s + b_{23} C_3^s + \dots) = \int_0^1 \zeta^2 v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^s \left( \frac{1}{3} v_0^s + \frac{1}{5} \varepsilon^2 v_2^s + \frac{1}{7} \varepsilon^4 v_4^s + \dots \right)$$

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+2} (b_{31} C_1^s + b_{32} C_2^s + b_{33} C_3^s + \dots) = \int_0^1 \zeta^4 v_{\Sigma} d\zeta - \sum_{s=0} \varepsilon^s \left( \frac{1}{5} v_0^s + \frac{1}{7} \varepsilon^2 v_2^s + \frac{1}{9} \varepsilon^4 v_4^s + \dots \right)$$

$$a_{2k} = \frac{1}{5} \alpha_{2k} + \frac{1}{7} \alpha_{4k} + \dots, \quad b_{2k} = \frac{1}{3} \alpha_{1k} + \frac{1}{5} \alpha_{3k} + \frac{1}{7} \alpha_{5k} + \dots,$$

$$b_{3k} = \frac{1}{5} \alpha_{1k} + \frac{1}{7} \alpha_{3k} + \frac{1}{9} \alpha_{5k} + \dots \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Решение системы уравнений (5.44) представим в виде

$$\sum_{s=0} \varepsilon^{s+2} C_k^s = P_{uk} + P_{uk} + \sum_{s=0} \varepsilon^s (\beta_{k1} v_0^s + \beta_{k3} \varepsilon^2 v_2^s + \beta_{k5} \varepsilon^4 v_4^s + \dots) + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} (\beta_{k2} u_1^s + \beta_{k4} \varepsilon^2 u_3^s + \dots) \quad (5.45)$$

где  $P_{uk}, P_{uk}$  – решение систем уравнений от заданных краевых условий  $v_{\Sigma}$  и  $u_{\Sigma}$  соответственно,  $\beta_{k1}, \beta_{k3}, \beta_{k5}$  – решение от  $v_0^s, v_2^s, v_4^s$  и  $\beta_{k2}, \beta_{k4}$  – решение от  $u_1$  и  $u_3$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

С учетом постоянных интегрирования  $C_k^s$  (5.45) условия (5.41) и (5.42) принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \varepsilon u_1 + \frac{1}{5} \varepsilon^3 u_3 + \dots - \left[ P_v + P_u + \sum_{s=0} \varepsilon^s (A_1 v_0^s + A_3 \varepsilon^2 v_2^s + A_5 \varepsilon^4 v_4^s + \dots) + \right. \\ & \left. + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} (A_2 u_1^s + A_4 \varepsilon^2 u_3^s + \dots) \right] = \int_0^1 u_{\Sigma} \zeta d\zeta \\ & v_0 + \frac{1}{3} \varepsilon^2 v_2 + \frac{1}{5} \varepsilon^4 v_4 + \dots - \left[ \bar{P}_v + \bar{P}_u + \sum_{s=0} \varepsilon^s (B_1 v_0^s + B_3 \varepsilon^2 v_2^s + B_5 \varepsilon^4 v_4^s + \dots) + \right. \\ & \left. + \sum_{s=0} \varepsilon^{s+1} (B_2 u_1^s + B_4 \varepsilon^2 u_3^s + \dots) \right] = \int_0^1 v_{\Sigma} d\zeta \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$P_v = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n}{\lambda_n} P_{vn}, \quad P_u = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n}{\lambda_n} P_{un}, \quad A_k = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n}{\lambda_n} \beta_{1n}$$

$$\bar{P}_v = \sum_{n=1}^3 \frac{\bar{\mu}_n}{\lambda_n} P_{vn}, \quad \bar{P}_u = \sum_{n=1}^3 \frac{\bar{\mu}_n}{\lambda_n} P_{un}, \quad B_k = \sum_{n=1}^3 \frac{\bar{\mu}_n}{\lambda_n} \beta_{1n}$$

Асимптотический анализ выражений (5.46) приводит к общим кинематическим краевым условиям внутренней задачи изгиба полосы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}u_1^{s-1} + \frac{1}{5}u_3^{s-3} + \dots - v_{12}(P_v^s + P_u^{s-1}) - \\ & -v_{12}(A_1v_0^s + A_2u_1^{s-1} + A_3v_2^{s-2} + A_4u_3^{s-3} + A_5v_4^{s-4} + \dots) = u_\Sigma^{s-1} \\ & v_0^s + \frac{1}{3}v_2^{s-2} + \frac{1}{5}v_4^{s-4} + \dots - \bar{P}_v^s - \bar{P}_u^{s-1} - \\ & -(B_1v_0^s + B_2u_1^{s-1} + B_3v_2^{s-2} + B_4u_3^{s-3} + B_5v_4^{s-4} + \dots) = v_\Sigma^s \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$P_v^0 = P_v, \quad P_u^0 = P_u, \quad \bar{P}_v^0 = \bar{P}_v, \quad \bar{P}_u^0 = \bar{P}_u, \quad P_v^s = P_u^s = \bar{P}_v^s = \bar{P}_u^s = 0 \quad \text{при } s \geq 1$$

$$u_\Sigma^0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \zeta u_\Sigma d\zeta, \quad v_\Sigma^0 = \int v_\Sigma d\zeta, \quad u_\Sigma^s = v_\Sigma^s = 0 \quad \text{при } s \geq 1$$

Из соотношений (5.47) следует система двух линейных алгебраических уравнений относительно  $v_0^s$  и  $u_1^{s-1}$ :

$$\begin{aligned} & -v_{12}A_1v_0^s + (\frac{1}{3} - v_{12}A_2)u_1^{s-1} = u_\Sigma^{s-1} + v_{12}(P_v^s + P_u^{s-1}) + v_{12}(A_3v_2^{s-2} + A_5v_4^{s-4} + \dots) + \\ & + v_{12}(A_4 - \frac{1}{5})u_3^{s-3} \\ & (1 - B_1)v_0^s - B_2u_1^{s-1} = v_\Sigma^s + \bar{P}_v^s + \bar{P}_u^{s-1} + (B_3 - \frac{1}{3})v_2^{s-2} + B_4u_3^{s-3} + (B_5 - \frac{1}{5})v_4^{s-4} + \dots \end{aligned} \quad (5.48)$$

Из системы (5.48) видно, что геометрические краевые условия задачи изгиба при произвольных  $u_\Sigma$  и  $v_\Sigma$  сильно переплетаются. Рассмотрим упрощение этих краевых условий с учетом постоянных по высоте сечения угла поворота  $u_\Sigma$  и прогиба  $v_\Sigma$ . В этом случае имеем  $P_v^0 = -A_1v_\Sigma$ ,  $P_u^0 = -A_2u_\Sigma$ ,  $\bar{P}_v^0 = -B_1v_\Sigma$ ,  $\bar{P}_u^0 = -B_2u_\Sigma$ ,  $P_v^s = P_u^s = \bar{P}_v^s = \bar{P}_u^s = 0$  при  $s \geq 1$ .

Асимптотический анализ (5.48) в этом случае приводит к краевым условиям

$$\begin{aligned} & u_1^0 = \tau_{xy,0}^0 / G_{12} - dv_0^0 / d\xi = u_\Sigma, \quad v_0^0 = v_\Sigma \\ & u_1^1 = \frac{\tau_{xy,0}^1}{G_{12}} - \frac{dv_0^1}{d\xi} = \frac{v_{12}}{A} \left[ A_3(1 - B_1) + A_1 \left( B_3 - \frac{1}{3} \right) \right] v_2^0, \quad v_0^1 = 0 \\ & u_1^2 = \frac{\tau_{xy,0}^2}{G_{12}} - \frac{dv_0^2}{d\xi} = \frac{v_{12}}{A} \left[ A_3(1 - B_1) + A_1 \left( B_3 - \frac{1}{3} \right) \right] v_2^1 + \frac{v_{12}}{A} \left[ \left( A_4 - \frac{1}{5} \right) (1 - B_1) + A_1 B_4 \right] u_3^0 \\ & v_0^2 = \frac{1}{A} \left[ v_{12} A_3 B_2 + \left( \frac{1}{3} - v_{12} A_2 \right) \left( B_3 - \frac{1}{3} \right) \right] v_2^0 \\ & A = \left( \frac{1}{3} - v_{12} A_2 \right) (1 - B_1) - v_{12} A_1 B_2 \end{aligned} \quad (5.49)$$

При необходимости можно из анализа соотношений (5.48) получить краевые условия при  $s \geq 3$ . При этом всегда будет решаться система двух уравнений для  $u_1^{s-1}$  и  $v_0^s$ .

Для получения кинематических краевых условий (5.49) необходимо иметь параметры  $A_k$  и  $B_k$ , которые связаны с решением задачи погранслоя. Условия (5.49) при  $s = 0$  совпадают с краевыми условиями, основанными на гипотезах Бернулли. Если на границе  $v_2^0 \neq 0$ , то уже  $v_0^1$  отлично от нуля и уточнение ОНС начинается с  $s = 1$ .

При комплексных собственных числах характеристического уравнения  $\lambda_n = X_n + iY_n$  решения задачи погранслоя представим в виде

$$u_{p,0}^s = C_n + \sum_{k=1}^2 [C_{2k-1}^s (\alpha_{1k} \cos Y_k t - \bar{\alpha}_{1k} \sin Y_k t) + C_{2k}^s (\bar{\alpha}_{1k} \cos Y_k t + \alpha_{1k} \sin Y_k t)] e^{-X_k t} + \dots$$

$$v_{p,1}^s = \sum_{k=1}^2 [C_{2k-1}^s (\alpha_{2k} \cos Y_k t - \bar{\alpha}_{2k} \sin Y_k t) + C_{2k}^s (\bar{\alpha}_{2k} \cos Y_k t + \alpha_{2k} \sin Y_k t)] e^{-X_k t} + \dots$$

и в решении участвуют собственные векторы, как действительной, так и комплексных частей решения.

Полученные краевые условия внутренней задачи при исследовании плоского напряженного состояния позволяют сделать следующие выводы:

1. При формулировке краевых условий могут использоваться как краевые условия, полученные вариационным путем, так и условия существования затухающих решений. Необходимо учитывать их взаимоотношения.

Статические краевые условия (4.4) симметричной задачи и (4.5), (4.6) задачи изгиба содержат только основное напряженное состояние и являются следствием соответствующих условий существования затухающих решений. При смешанных краевых условиях (1.32), (1.33) условия согласования краевых условий позволяют в общем виде сформулировать краевые условия для ОНС, при этом значение параметра  $k$  роли не играет. Кинематические краевые условия (1.34) требуют совместного использования краевых условий и условий существования затухающих решений. Практически в этом случае не удается разделить плоскую задачу на две самостоятельные задачи по определению основного напряженного состояния и затухающего решения типа погранслоя. Эти две задачи решаются совместно, необходимо знание параметра  $\kappa$ . Во всех остальных случаях, после решения внутренней задачи, оставшиеся пока не востребуемыми краевые условия используются при решении задачи погранслоя.

2. Уточнение основного напряженного состояния идет как за счет уточнения уравнений задачи, так и за счет более аккуратной формулировки краевых условий. В пределе при  $s \rightarrow \infty$  будет получено асимптотически точное решение плоской задачи теории упругости при произвольной внешней нагрузке и любых краевых условиях. На практике же достаточно иметь решение при нескольких первых приближениях.

3. Статические краевые условия ставятся однозначно, и они связаны с условиями самоуравновешенности по высоте сечения напряжений  $\sigma_x$  в задаче растяжения-сжатия и  $\sigma_x, \tau_{xy}$  в задаче изгиба. Перемещения этим свойством не обладают и поэтому краевые условия для них требуют наличия условий существования затухающих решений. Задача осложняется тем, что нулевым вариациям перемещений на границе могут соответствовать различные кинематические краевые условия. В статье рассмотрен вариант условий (1.16) для симметричной задачи и (1.28) для задачи изгиба. В случае задания других кинематических краевых условий следует поступать аналогичным образом. И это будут задачи со своими геометрическими краевыми условиями.

4. Геометрические краевые условия, накладываемые на  $U$  и  $V$  в смешанных краевых условиях и кинематических краевых условиях, различаются, поэтому при  $s \geq 1$  их нельзя отождествлять.

5. Первым уравнением системы уравнений (5.29) симметричной задачи и первым и третьим уравнениями системы (5.44) задачи изгиба фактически являются новые формы записи соответствующих условий существования затухающих решений. Этим по-

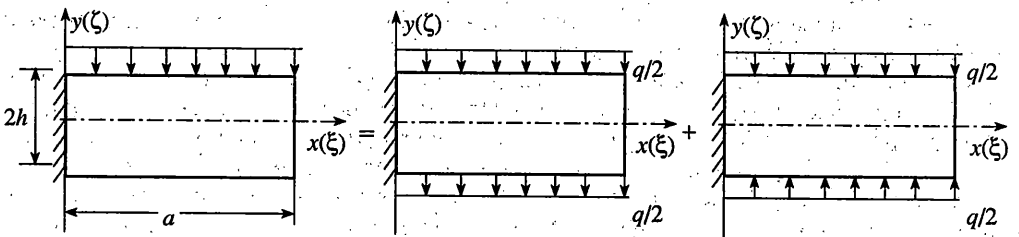
казывается, что условия существования затухающих решений заменяют первое кинематическое краевое условие для  $u$  в симметричной задаче и первые краевые условия для  $u$  и  $v$  в задаче изгиба.

6. При любых вариантах краевых условий при  $s = 0$  они полностью совпадают с краевыми условиями, соответствующими классической теории стержней, основанной на гипотезе Бернулли. Дополнительное требование постоянных по высоте сечения перемещений  $u_x$ ,  $u_y$  требуется для геометрических краевых условий. Уточнение ОНС начинается для некоторых краевых условий с  $s \geq 2$ , для других с  $s \geq 1$ .

7. При симметричных краевых условиях по  $\zeta$  переплетение четных и нечетных приближений по  $s$  происходит только для кинематических краевых условий. В этом случае имеем и наибольшую погрешность при переходе к классическому варианту краевых условий, которое начинается с  $\epsilon^1$ , а не с  $\epsilon^2$ , как во всех остальных случаях.

**6. Пример.** Рассмотрим ортотропную полосу (фигура) с параметрами  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}, a, 2h$ , нагруженную нагрузкой  $q$  при краевых условиях  $dV/dx|_{x=0} = 0, V|_{x=0} = 0, \sigma_x|_{x=a} = 0, \tau_{xy}|_{x=a} = 0$ .

Эта задача сводится к рассмотрению двух задач: изгиба и обжатия полосы, которые решим по различным моделям.



6.1. Задача изгиба (а). Классическое решение ( $V = V_0, U = U_1, y = -y dV_0/dx$ ) с учетом краевых условий имеет вид

$$V_0 = -\frac{qa^2 x^2}{24E_1 J} \left( 6 - 4\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right)$$

$$U_1 = -\frac{dV_0}{dx} = \frac{qa^2 x}{6E_1 J} \left( 3 - 3\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right), \quad \sigma_x = \frac{qa^2}{2J} \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 y$$

$$\tau_{xy} = -\frac{qa}{2J} \left( 1 - \frac{x}{a} \right) (h^2 - y^2), \quad \sigma_y = 0, \quad J = \frac{2h^3}{3}$$

(б). Модель Тимошенко – Рейсснера ( $V = V_0 + V_2 y^2, U = U_1 y$ ) определяется системой уравнений

$$E_1 J \frac{d^2 U_1}{dx^2} - 2hG_{12} \left( \frac{dV_0}{dx} + U_1 \right) = 0, \quad 2hG_{12} \frac{d}{dx} \left( \frac{dV_0}{dx} + U_1 \right) - q = 0$$

Краевые условия следуют из соотношений  $M_z \delta U_1 = 0, Q_y \delta V_0 = 0$ . Интегралы этой системы с учетом краевых условий записываются

$$E_1 J V_0 = -\frac{qa^2 x^2}{24} \left( 6 - 4\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right) - \epsilon^2 \frac{E_1}{3G_{12}} qa^3 x \left( 1 - \frac{x}{2a} \right)$$

$$E_1 J U_1 = \frac{q a^2 x}{6} \left( 3 - 3 \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right)$$

$$V_2 = -\frac{v_{21}}{2} \frac{dU_1}{dx}, \quad \sigma_x = \frac{q a^2}{2J} \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 y, \quad \tau_{xy} = -\frac{q a}{2h} (a-x)(h^2 - y^2), \quad \sigma_y = 0$$

В этих соотношениях учтено влияние сдвига с малым множителем  $\varepsilon^2$  за счет более точной записи уравнений равновесия. При  $E_1/G_{12} \approx \varepsilon^{-2}$  это влияние может быть значительным.

(с). Модель с точностью  $\varepsilon^2$  в безразмерных перемещениях ( $u = U/a, v = V/a$ ) и безразмерных координатах ( $\xi = x/a, \zeta = y/h$ ) представляется соотношениями

$$u = \varepsilon \zeta (u_1^0 + \varepsilon u_1^1 + \varepsilon^2 u_1^2) + \varepsilon^3 \zeta^3 u_3^0$$

$$v = v_0^0 + \varepsilon v_0^1 + \varepsilon^2 v_0^2 + \varepsilon^2 \zeta^2 (v_2^0 + \varepsilon v_2^1) + \varepsilon^4 \zeta^4 v_4^0$$

$$\sigma_x = \varepsilon \zeta (\sigma_{x,1}^0 + \varepsilon \sigma_{x,1}^1 + \varepsilon^2 \sigma_{x,1}^2) + \varepsilon^3 \zeta^3 \sigma_{x,3}^0$$

$$\sigma_y = \varepsilon \zeta (\sigma_{y,1}^0 + \varepsilon \sigma_{y,1}^1 + \varepsilon^2 \sigma_{y,1}^2) + \varepsilon^3 \zeta^3 \sigma_{y,3}^0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy,0}^0 + \varepsilon \tau_{xy,0}^1 + \varepsilon^2 \tau_{xy,0}^2 + \varepsilon^2 \zeta^2 \tau_{xy,2}^0$$

При  $s = 0$  имеем обычные классические уравнения и краевые условия, которые дают решение

$$v_0^0 = -\frac{q a^4 \xi^2}{24 E_1 J} (6 - 4\xi + \xi^2)$$

Этим решением согласно асимптотическому методу определяются величины

$$u_1^0 = -\frac{dv_0^0}{d\xi}, \quad v_2^0 = \frac{v_{21}}{2} \frac{d^2 v_0^0}{d\xi^2}$$

$$\sigma_{x,1}^0 = -E_1 \frac{d^2 v_0^0}{d\xi^2}, \quad \tau_{xy,0}^0 = 0, \quad \sigma_{y,1}^0 = 0$$

$$\tau_{xy,0}^2 = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_{x,1}^0}{d\xi}, \quad \tau_{xy,2}^0 = -\frac{1}{2} \frac{d\sigma_{x,1}^0}{d\xi}$$

$$\sigma_{y,1}^2 = \frac{1}{3} \left( -\frac{q}{J} + \frac{d\tau_{xy,2}^0}{d\xi} \right), \quad \sigma_{y,3}^0 = -\frac{1}{3} \frac{d\tau_{xy,2}^0}{d\xi}$$

$$\sigma_{x,3}^0 = -\frac{1}{6} \left( \frac{E_1}{G_{12}} - 2v_{21} \right) \frac{q}{J}, \quad u_3^0 = \frac{1}{3} \left( \frac{\tau_{xy,2}^0}{G_{12}} - \frac{dv_2^0}{d\xi} \right)$$

$$v_4^0 = \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma_{y,3}^0}{E_2} - v_{21} \frac{du_3^0}{d\xi} \right), \quad \bar{E}_2 = \frac{E_2}{1 - v_{12} v_{21}}$$

Этот анализ значительно богаче классического решения.

Для  $s = 1$  имеем однородное уравнение  $E_1 J d^4 v_0^1 / d\xi^4 = 0$ , интеграл которого

$$E_1 J v_0^1 = A_1 \frac{\xi^3}{6} + B_1 \frac{\xi^2}{2} + C_1 \xi + D_1$$

Постоянные интегрирования находим из краевых условий:

$$\frac{dv_0^1}{d\xi} = -R_1 v_2^0, \quad v_0^1 = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad \sigma_{x,1}^1 = 0, \quad \tau_{xy,0}^1 = 0 \quad \text{при } \xi = 1$$

с учетом краевых условий имеем

$$v_0^1 = -\frac{R_1 v_2^0}{E_1 J} (\xi = 0) \xi, \quad u_1^0 = -\frac{dv_0^1}{d\xi}$$

$$v_2^1 = \sigma_{x,1}^1 = \sigma_{y,1}^1 = \tau_{xy,0}^1 = \tau_{xy,0}^3 = \tau_{xy,2}^1 = \sigma_{y,1}^3 = \sigma_{x,3}^1 = u_3^1 = v_4^1 = 0$$

Для  $s = 2$  имеем аналогичное однородное уравнение и решение

$$E_1 J v_0^2 = A_2 \frac{\xi^3}{6} + B_2 \frac{\xi^2}{2} + C_2 \xi + D_2$$

постоянные которого находятся из граничных условий

$$dv_0^2/d\xi = -R_1 v_2^1 - R_2 u_3^0, \quad v_0^2 = R_3 v_2^0 \quad \text{при } \xi = 0$$

$$\frac{1}{3} \sigma_{x,1}^2 + \frac{1}{5} \sigma_{x,3}^0 = 0, \quad \tau_{xy,0}^4 + \frac{1}{3} \tau_{xy,2}^2 + \frac{1}{5} \tau_{xy,4}^0 = 0 \quad \text{при } \xi = 1$$

Здесь постоянные  $R_k$  определяются решением задачи погранслоя при  $\xi = 0$  (5.49). С учетом предыдущих значений граничные условия принимают вид

$$\frac{dv_0^2}{d\xi} = -R_2 u_3^0, \quad v_0^2 = R_3 v_2^0 \quad \text{при } \xi = 0$$

$$E_1 J \frac{dv_0^2}{d\xi^2} = \left( \frac{2}{5} \frac{E_1}{G_{12}} - \frac{3}{10} v_{21} \right) q, \quad E_1 J \frac{d^3 v_0^2}{d\xi^3} = 0 \quad \text{при } \xi = 1$$

Приведенные выше решения определяют основное напряженное состояние полосы (проникающие решения). При их получении нарушаются поставленные для полосы общие краевые условия, для выполнения которых необходимо использовать решения типа погранслоев (быстро убывающие от края решения). Постоянные задачи погранслоя при  $\xi = 0$  определяются решением (5.46) при  $\kappa = 1$ , а при  $\xi = 1$  из соответствующей системы уравнений, записанной для полных напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$ .

6.2. *Задача обжатия слоя (симметричная задача) (а, в).* Классическая и уточненная модели приводят к дифференциальному уравнению  $E_1 d^2 U_0 / dx^2 = 0$  и краевым условиям  $U|_{x=0} = 0, \sigma_x|_{x=a} = 0$ .

Решение представляется в виде

$$U = v_{12} \frac{q}{2E_2} x, \quad V = -\frac{q}{2E_2} y, \quad \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -\frac{q}{2}, \quad \tau_{xy} = 0$$

(с). Для модели обжатия слоя с точностью  $\varepsilon^2$  получим

$$u = u_0^0 + \varepsilon u_0^1 + \varepsilon^2 u_0^2 + \varepsilon^2 \zeta^2 u_2^0$$

$$v = \varepsilon \zeta (v_1^0 + \varepsilon v_1^1 + \varepsilon^2 v_1^2) + \varepsilon^3 \zeta^3 v_3^0$$

$$\sigma_x = \sigma_{x,0}^0 + \varepsilon \sigma_{x,0}^1 + \varepsilon^2 \sigma_{x,0}^2 + \varepsilon^2 \zeta^2 \sigma_{x,2}^0$$

$$\sigma_y = \sigma_{y,0}^0 + \varepsilon \sigma_{y,0}^1 + \varepsilon^2 \sigma_{y,0}^2 + \varepsilon^2 \zeta^2 \sigma_{y,2}^0$$

$$\tau_{xy} = \varepsilon \zeta (\tau_{xy,1}^0 + \varepsilon \tau_{xy,1}^1 + \varepsilon^2 \tau_{xy,1}^2) + \varepsilon^3 \zeta^3 \tau_{xy,3}^0$$

При  $s = 0$  имеем решение  $E_1 u_0^0 = A_0 \xi + B_0$  при краевых условиях:

$$u_0^0 = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{x,0}^0 = 0 \quad \text{при } \xi = 1$$

Решение приводит к выражениям

$$u_0^0 = \nu_{12} \frac{q}{2E_2} \xi, \quad \nu_1^0 = -\frac{q}{2E_2}, \quad \sigma_{x,0}^0 = 0, \quad \sigma_{y,0}^0 = -\frac{q}{2}, \quad \tau_{xy,1}^0 = 0, \quad u_2^0 = 0$$

На данном этапе фактически имеем классическое решение, которое уточняется в дальнейшем. При  $s = 1$  получим интеграл  $E_1 u_0^1 = A_1 \xi + B_1$ , постоянные которого определяются из краевых условий:

$$u_0^1 = R_4 \nu_1^0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad \sigma_{x,0}^1 = 0 \quad \text{при } \xi = 1$$

С учетом краевых условий имеем

$$u_0^1 = \frac{R_4}{E_1} \nu_1^0, \quad \nu_1^1 = \sigma_{x,0}^1 = \sigma_{y,0}^1 = \tau_{xy,1}^1 = \tau_{xy,3}^0 = \sigma_{y,2}^0 = \nu_3^0 = \sigma_{x,2}^0 = 0$$

При  $s = 2$  постоянные решения  $u_0^2 = A_2 \xi + B_2$  определяются из краевых условий:

$$u_0^2 = R_5 u_2^0 + R_6 \nu_1^1 = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad du_0^2 / d\xi = 0 \quad \text{при } \xi = 1$$

На данном этапе с учетом однородных краевых условий получим только нулевое решение  $u_0^2 = \nu_1^2 = \sigma_{x,0}^2 = \sigma_{y,0}^2 = \tau_{xy,1}^2 = 0$ . Для обжатия слоя при постоянной нагрузке уточнение имеет место только при  $s = 1$ .

Задача погранслоя существует при  $\xi = 0$  и определяется решением (5.30) при  $\kappa = 0$ .

Таким образом на примере показано, что модель Тимошенко – Рейсснера не дает для основного напряженного состояния изгиба компоненты перемещения  $\nu_0^1$ , а для обжатия –  $u_0^1$ , которые находятся за счет уточнения краевых условий и отличны от нуля при защемлении края. Пренебрежение этими параметрами приводит к большей погрешности по сравнению с теми членами, которые учитываются моделью Тимошенко – Рейсснера. Поэтому модель расчета полосы, построенная с точностью  $\varepsilon^2$ , является более последовательной, так как позволяет уточнить и дифференциальное уравнение и краевые условия за счет получения быстрозатухающих решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00410).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенко Ю.И. Модифицированный метод асимптотического интегрирования при построении теории стержней из ортотропного материала. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 4. С. 91–105.
2. Бутенко Ю.И. Модифицированный метод асимптотического интегрирования при построении теории стержней из ортотропного материала. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 177–188.

Казань

Поступила в редакцию  
5.02.1999