МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2002

УДК 539.4 + 539.376

© 2002 г. А.И. ИСКАКБАЕВ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КИНЕТИКИ ПОВРЕЖДЕНИЙ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается влияние начального повреждения, режима нагружения, траектории накопления повреждений, температуры и знака напряжения на скорость накопления повреждений изотропных материалов. Кинетические уравнения накопления повреждений силового и деформационного типов представлены в виде интегральных уравнений Вольтерра второго рода, позволяющих установить вид ядра поврежденности через закономерности длительной прочности материала. Предложен способ определения оптимальных параметров ползучести и длительной прочности материалов. Показано, что найденные условия суммирования повреждений наследственного типа более достоверны для прогнозирования долговечности материалов, чем подход Бейли – Робинсона.

В современной механике разрушения особая роль отводится феноменологическому подходу, распространяемому не только на постановку прикладных задач, но и решение теоретических проблем, в частности, относящихся к оценкам ресурса конструкций при заданной истории нагружения и процесса накопления повреждений в реальном теле [1]. Для решения этих задач наряду с уравнениями, описывающими кинетику напряженно-деформированного состояния тела, привлекаются кинетические уравнения накопления повреждений и критерий разрушения [2–13].

Существующие формулировки процесса накопления повреждений при помощи меры поврежденности ω имеют либо вид интегральных операторов наследственного типа [6], либо вид кинетических уравнений для скорости изменения меры поврежденности [2–5], в каждом из уравнений для накопления поврежденности число независимых констант изменяется от двух до трех (и более). В общем случае задача становится слабо корректной и возможно множество комбинаций коэффициентов, которые могут удовлетворить уравнениям с тремя и более коэффициентами при условии $\omega = 1$ [4].

Действительный характер накопления повреждений в рамках феноменологического подхода затруднительно установить, поскольку в кинетических уравнениях в качестве ω используется неизмеряемая в эксперименте величина. Поэтому корректное введение параметра состояния материала остается актуальной проблемой механики континуального разрушения твердых тел. В работах [3, 7, 8] в качестве параметра поврежденности материала приняты следующие величины: величина относительного изменения прочности материала, величина относительного изменения деформации материала, величина относительного изменения удельной энергии рассеяния материала. Целью настоящей работы является применение идеи отмеченных работ к исследованию закономерности рассеянного разрушения материала, обладающего различным сопротивлением растяжению и сжатию.

1. Кинетические уравнения повреждений силового типа. Пусть σ_+ и σ_- обозначают пределы мгновенной прочности материала на растяжение и сжатие соответственно. Для склерономного случая параметр поврежденности может быть определен следующим образом:

$$\omega = \sigma/\sigma_* \tag{1.1}$$

где σ – напряжение, $\sigma_* = \sigma_+$,если $\sigma > 0$; при $\sigma < 0$, $\sigma_* = \sigma_-$.

Если $\sigma_+ < |\sigma_-|$, то считается, что материал при больших уровнях напряжений обладает различным сопротивлением при растяжении и сжатии, при этом он практически одинаково деформируется при малых уровнях напряжений. Для реономного случая параметр поврежденности удовлетворяет условиям

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \omega(t_*) = 1 \tag{1.2}$$

здесь ω_0 – начальное повреждение материала [1], t_* – время разрушения. В работах [2–6] материал в момент загружения считается неповрежденным.

Согласно [7] кинетическое уравнение для повреждений записывается в виде

$$\omega(t) = \frac{1}{\sigma_*}\left[\sigma(t) + \int_0^t \Pi_*(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau\right] \tag{1.3}$$

где Π_* – ядро поврежденности материала ($\Pi_* > 0$), $\Pi_* = \Pi_+$ при $\sigma > 0$; $\Pi_* = \Pi_-$ при $\sigma < 0$.

Из (1.2)–(1.3) при постоянном напряжении получается следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt_*}\left[\frac{1}{\sigma(t_*)}\right] = \frac{1}{\sigma_*}\Pi_*(t_*) \tag{1.4}$$

позволяющее установить вид ядра поврежденности материала через закономерность длительной прочности $\sigma = \sigma(t_*)$. В работе [7] в качестве ядер поврежденности использованы закономерности

$$\Pi_*(t) = \frac{|\sigma_*|}{n}[A(n+1)]^{1/n} t^{1/n-1} \tag{1.5}$$

$$\Pi_*(t) = \alpha|\sigma_*|\left[t^{1/2}\ln\frac{B}{t}\right]^{-2} \tag{1.6}$$

Здесь A, B, n, α – коэффициенты длительной прочности материала; $A > 0$, $B > 0$, $n > 1$, $\alpha > 0$.

Из (1.5) и (1.2)–(1.3) при постоянном напряжении следует

$$t_* = (1-\sigma/\sigma_*)^n [A(n+1)|\sigma|^n]^{-1} \tag{1.7}$$

где коэффициенты n и A зависят от величины приложенного напряжения и от температуры [7]. При $n = n(\sigma, T)$ и $A = A(\sigma, T)$ (T – температура, $T = T(t)$) уравнение (1.3) с учетом (1.2) и (1.5) приводит к нелинейной гипотезе суммирования повреждений

$$\sigma_* = \sigma(t_*) + \int_0^{t_*} k(t_*-\tau)^{1/n-1}\sigma(\tau)d\tau, \quad k = \frac{|\sigma_*|}{n}[A(n+1)]^{1/n} \tag{1.8}$$

При $|\sigma_*| = \infty$ и $A(\sigma, T) = A$, $n(\sigma, T) = n$ (A, n – постоянные) из (1.7) следует формула Качанова – Работнова [2, 5]. В общем случае соотношение (1.7) идентично формулам Шестерикова и Юмашевой [9, 11].

Подстановка (1.6) в (1.2)–(1.3) приводит при постоянном напряжении к следующему соотношению:

$$t_* = B\exp\left(-\frac{\alpha\sigma_*\sigma}{|\sigma_*|-|\sigma|}\right) \tag{1.9}$$

Здесь $0 < |\sigma| < |\sigma_*|$, коэффициенты $\alpha = \alpha(\sigma, T) > 0$, $B = B(\sigma, T) > 0$ [7].

При выборе ядра поврежденности в виде (1.6) вместо (1.8) имеем

$$\sigma_* = \sigma(t_*) + |\sigma_*| \int_0^{t_*} \alpha(t_* - \tau)^{-1} [\ln B - \ln(t_* - \tau)]^{-2} \sigma(\tau) d\tau \quad (1.10)$$

При $|\sigma_*| = \infty$ и $B(\sigma, T) = B$, $\alpha(\sigma, T) = \alpha$ (B, α – постоянные) из (1.9) следует формула Журкова [10].

При напряжениях ниже предела ползучести r_* (минимальное напряжение, при котором наблюдается нарастание деформаций ползучести во времени) можно считать, что материал не разрушается, поскольку в этом случае заметного роста деформаций ползучести не происходит [11], однако использование ядер поврежденности (1.5) и (1.6) не позволяет учитывать данный фактор. В связи с этим рассматривается следующее ядро:

$$\Pi_* = \lambda \exp(-\beta t), \quad \lambda > 0, \quad \beta > 0 \quad (1.11)$$

Из (1.2)–(1.3) с учетом (1.11) при постоянном напряжении получено следующее соотношение:

$$t_* = \frac{1}{\beta} \ln\left[1 - \frac{\beta}{\lambda}\left(\frac{\sigma_*}{\sigma} - 1\right)\right]^{-1}, \quad \beta = \beta(\sigma, T), \quad \lambda = \lambda(\sigma, T). \quad (1.12)$$

Коэффициент λ определяется соотношением

$$\lambda = \beta(\sigma_*/r_* - 1) \quad (1.13)$$

где r_* – предел ползучести образца ($r_* = r_+$, если образец разрушается растяжением; $r_* = r_-$ – при сжатии).

Если длительная прочность образца описывается формулой (1.7), то β находится по формуле

$$\beta = -[A(n+1)|\sigma|^n]\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^{-n} \ln\left[1 - \left(\frac{\sigma_*}{\sigma} - 1\right)\left(\frac{\sigma_*}{r_*} - 1\right)^{-1}\right] \quad (1.14)$$

Если длительная прочность образца моделируется формулой (1.9), то β определяется по формуле

$$\beta = -B^{-1} \exp\left(\frac{\alpha\sigma_*\sigma}{|\sigma_*| - |\sigma|}\right) \ln\left[1 - \left(\frac{\sigma_*}{\sigma} - 1\right)\left(\frac{\sigma_*}{r_*} - 1\right)^{-1}\right] \quad (1.15)$$

Из (1.13)–(1.15) следует, что при увеличении величины приложенного напряжения коэффициент β монотонно возрастает.

Полученные соотношения были апробированы при анализе экспериментальных данных для боропластика [7, 12]. Для него оказалось возможным в диапазоне напряжений от $r_+ = 75$ до $\sigma_+ = 155$ МПа определить входящие в соотношения (1.13)–(1.14) постоянные $n = 20$, $A = 1.51 \cdot 10^{-52}$ (МПа)$^{-20}$ (час)$^{-1}$.

На примере материала К-18-36 рассмотрено влияние режима нагружения на повреждаемость при одноосном сжатии [13]. В табл. 1 представлены результаты расчета меры повреждений ω композиционных материалов К-18-36 при одноосном сжатии при комнатной температуре (k – ступень нагружения). Здесь ω_1 вычисляется по модели (1.3) и (1.6); ω_2 – по модели (1.3) и (1.11); ω_3 – по интегралу Бейли [13], σ_k – величина напряжений для k-ой ступени, τ_k – время выдержки образца для k-ой ступени, t_k – время отдыха образца для k-ой ступени $\overline{\omega}_i$ – суммарная мера повреждений к моменту разрушения). Анализ данных табл. 1 подтверждает эффективность применения модели наследственного типа для прогнозирования длительной прочности материала при

Таблица 1

k	σ_k	$\tau_k \cdot 10^{-3}$	$t_k \cdot 10^{-3}$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	112.83	6.30	3.90	0.01	0.03	0.26	0.93	1.07	1.46
2	112.83	7.20	4.02	0.01	0.05	0.30			
3	112.83	7.20	3.18	0.02	0.08	0.30			
4	112.83	5.98	–	0.89	0.91	0.24			

Таблица 2

k	σ_1, МПа	τ_1, мин	t_1^*, мин	σ_2, МПа	τ_2, мин	t_2^*, мин	ω_1	ω_2	ω_3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	210	150	384	90	1440	3350	0.821	1.046	1.093
2	210	180	384	90	1080	3350	0.791	1.010	1.051
3	210	180	384	90	900	3350	0.738	0,990	1.020
4	90	1080	3350	210	40.2	384	0.427	1.094	0.876
5	90	1140	3350	210	78	384	0.543	0.954	0.909
6	90	1140	3350	210	80	384	0.548	0.961	0.910

ступенчатых режимах нестационарного нагружения по сравнению с моделью Бейли. В отличие от модели Бейли модель наследственного типа учитывает возможность "отдыха" материала в процессе разгрузки и в те интервалы времени, в течение которых напряжение отсутствовало [14]. Для схемы нагружения образца с полной промежуточной разгрузкой долговечность по условию Бейли равна сумме долговечности при неизменном напряжении и времени t_k, в течение которого напряжение было равно нулю [14]. Следовательно $\omega_3 = 1.10 + 0.36 = 1.46$.

При функции (1.11) из (1.2) и (1.3) найдено

$$\sigma_* = \sigma(t_*) + \int_0^{t_*} \lambda \exp[-\beta(t_* - \tau)]\sigma(\tau)d\tau \tag{1.16}$$

где $\lambda(\sigma, T)$, $\beta(\sigma, T)$ определяются по (1.13)–(1.15). Использование эволюционного уравнения (1.3) для параметра поврежденности $\omega(t)$ с коэффициентами, зависящими от напряжения и температуры, позволяет построить семейство кинетических кривых по параметру σ и T в координатах "$\omega - t/t_*$" и описать ряд эффектов в задачах расчета долговечности, возникающих при догрузках и разгрузках [4]. В качестве примера ниже рассмотрено применение модели (1.3) и (1.6) к оценке долговечности конструкционной стали в жидкой агрессивной среде. Результаты расчета для стали 12Х18НI2М3ТЛ при двухступенчатом испытании приведены в табл. 2. Здесь ω_1 – вычисляется по интегралу Бейли, ω_2 – по формуле автора работы[1]; ω_3 – по модели (1.3) и (1.6), t_k^* – время

[1] *Борисевич В.В.* Кинетика повреждений и оценка длительной прочности конструкционных сталей в жидких агрессивных средах // Автореферат канд. дисс. Алма-Ата. 1987. 20 с.

разрушения образца для k-ой ступени при напряжении σ_k, τ_k – время выдержки образца для k-ой ступени. Из данных табл. 2 следует, что формулы нелинейного суммирования повреждений лучше описывают влияние истории нагружения на долговечность. Так, при переходе в некоторый момент времени от меньшего напряжения к большему суммарная долговечность будет меньше единицы. При переходе от большего напряжения к меньшему суммарная долговечность становится больше единицы. Полученные оценки качественно согласуются с экспериментальными данными работы [4].

2. Кинетические уравнения повреждений деформационного типа. Вместо (1.1) пусть [8]:

$$\omega = \varepsilon/\varepsilon_* \tag{2.1}$$

где $\varepsilon(t)$ – общая деформация материала $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(\sigma) + p(\sigma, t)$; ε_0 – мгновенная деформация в момент загружения образца; p – деформация ползучести; ε_* – предельная деформация в момент разрушения образца, не зависящая от величины напряжения σ ($\varepsilon_* = \varepsilon_+$ при $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_* = \varepsilon_-$, если $\varepsilon < 0$).

Для горных пород осадочного вида из (2.1) следует [15]:

$$\omega(t) = \frac{1}{\varepsilon_* E}\left[\sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau\right] \tag{2.2}$$

где E – модуль упругости, K – ядро ползучести горных пород при $|\sigma| > |r_*|$.

Из (2.2) и (1.2) при постоянном напряжении следует соотношение

$$\frac{d}{dt_*}\left[\frac{1}{\sigma(t_*)}\right] = \frac{1}{\varepsilon_* E} K(t_*) \tag{2.3}$$

позволяющее установить взаимосвязь между параметрами ползучести и длительной прочности осадочных горных пород. В качестве примера рассмотрено определение параметров ползучести и длительной прочности горных пород Кузнецкого бассейна. Для случая, когда можно принять зависимость $K(t) = \delta t^{-\gamma}$, $\delta > 0$, $0 < \gamma < 1$, имеем

$$A(n+1)|\sigma|^n t_* = 1, \quad n = \frac{1}{1-\gamma}, \quad A = \frac{1}{n+1}\left(\frac{|\varepsilon_*|E}{n\delta}\right)^{-n} \tag{2.4}$$

Были обработаны данные натурных испытаний[2], которые позволили получить следующие результаты для пяти различных шахтных выработок: для пород типа песчаников, алевролитов, аргиллитов и др.; показатель n оказался практически одинаковым для всех рассмотренных пород и равным 11.6, а параметр δ изменяется в диапазоне от 0.0057 до 0.0580 $c^{(\gamma-1)}$.

Для случая $\varepsilon_* = p_*$, кинетические уравнения повреждений можно представить в виде

$$\omega(t) = \frac{1}{p_*}\int_0^t D_*(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \tag{2.5}$$

где $D_*(t)$ – ядро поврежденности ($D_* > 0$; $D_* = D_+$ при $\sigma > 0$; $D_* = D_-$ при $\sigma < 0$) из (2.5) следует

$$\frac{d}{dt_*}\left[\frac{p_*}{\sigma(t_*)}\right] = D_*(t_*) \tag{2.6}$$

Моделирование длительной прочности материала степенной функцией вида (2.4) при

[2] *Журавель А.А.* Лабораторное и натурное исследование реологии вмещающих пород Кузнецкого бассейна // Автореферат канд. дисс. Алма-Ата. 1971. 21 с.

использовании (2.5)–(2.6) приводит к следующему уравнению:

$$\omega(t/t_*) = (t/t_*)^{1/n} \tag{2.7}$$

Если принять, что скорость установившейся ползучести и напряжение связаны степенной зависимостью $\dot{p} = C\sigma^n$ (n и C постоянные материала, $p > 0$, $\sigma > 0$), то процесс ползучести с ускоряющейся стадией ползучести при учете (2.7) описывается уравнением типа [2]:

$$p(s) = \frac{C}{A(n+1)} \int_0^s (1 - s^{1/n})^{-m} ds \tag{2.8}$$

где $s = t/t_*$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, m – находится из условия $p(t_*) = p_+$.

В качестве примера рассмотрим ползучесть и длительную прочность нержавеющей стали Х18Н10Т при растяжении [3, 16]. В результате обработки результатов испытаний нержавеющей стали Х18Н10Т для коэффициентов длительной прочности и ползучести получим

$$n = 3.2,\quad A = 3.3 \cdot 10^{-8}\ (\text{МПа})^{-3.2}\ \text{ч}^{-1},\quad p_+ = 0.1,\quad C = 6.3 \cdot 10^{-9}\ (\text{МПа})^{-3.2}\ \text{ч}^{-1};$$
$$m = 0.494 \tag{2.9}$$

Вычисленные по формулам (2.4), (2.8) со значениями постоянных материала Х18Н10Т (2.9) данные о времени разрушения нержавеющей стали сведены в табл. 3. Там же приведены значения этих величин, найденные по модели Шестерикова – Локощенко [16]. Здесь t_*^1 – значения времени разрушения образцов по экспериментальным данным работы [16], t_*^2 – значения времени разрушения образцов, вычисленные по модели [16], t_*^3 – значения времени разрушения образцов по (2.4) и (2.9). Из анализа данных табл. 3 следует, что каждая из двух рассмотренных теоретических моделей достаточно хорошо описывает экспериментальные данные [16].

Таблица 3

σ, МПа	40	50	60	80
t_*^1, ч	54	23.5	15.5	6.0
t_*^2, ч	58	28	16.0	6.3
t_*^3, ч	53.9	26.3	14.4	5.8

4. Заключение. Разработана модель континуального разрушения материалов с учетом поврежденности от величины и знака приложенного напряжения и истории нагружения материала. Установлено, что при напряжениях ниже предела ползучести материал практически не разрушается.

Автор благодарит С.А. Шестерикова за ценное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* О перспективах феноменологического подхода к проблеме разрушения // Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Наука, 1975. С. 349–359.
2. *Работнов Ю.Н.* Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987. 80 с.
3. *Бойцов Ю.И., Данилов В.Л., Локощенко А.М., Шестериков С.А.* Исследование ползучести металлов при растяжении. М.: МГТУ, 1997. 99 с.

4. *Голуб В.П., Романов А.В.* О кинетике поврежденности изотропных материалов в условиях ползучести // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 12. С. 107–115.
5. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
6. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // Инж. ж. МТТ. 1967. № 3. С. 21–35.
7. *Искакбаев А.И.* Об одной модели длительной прочности материалов // Вестн. КазГУ. Сер. Мат., мех., информатика. 1998. № 9. С. 66–77.
8. *Работнов Ю.Н., Милейко С.И.* Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 222 с.
9. *Аршакуни А.Л., Шестериков С.А.* Прогнозирование длительной прочности жаропрочных металлических материалов // Изв. АН. МТТ. 1994. № 3. С. 126–141.
10. *Журков С.Н., Нарзуллаев Б.Н.* Временная зависимость прочности твердых тел // ЖТФ. 1953. Т. 23, Вып. 10. С. 1678–1689.
11. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 86–91.
12. *Суворова Ю.В.* О критерии прочности, основанном на накоплении поврежденности, и его приложении к композитам // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 107–111.
13. *Павлов П.А., Огородов Л.И.* Длительная прочность и оценка поврежденности дисперсно-наполненных композитных материалов на основе фенопласта при одноосном сжатии // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1991. № 6. С. 37–44.
14. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 327 с.
15. Ползучесть осадочных горных пород. Теория и эксперимент // Под ред. Ж.С. Ержанова. Алма-Ата: Наука, 1970. 206 с.
16. *Локощенко А.М., Шестериков С.А.* Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // ПМТФ. 1980. № 3. С. 155–159.

Алматы

Поступила в редакцию
20.10.1999