

УДК 539.37

© 2002 г. В.Л. ДИЛЬМАН, А.А. ОСТСЕМИН

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Исследуется напряженно-деформированное состояние (НДС) осесимметричного пластического слоя полого цилиндра (трубы), имеющего в сечении, ортогональном оси, форму кругового кольца, и симметричного относительно одного из таких сечений; кроме того, предполагается, что компоненты связности осевого сечения слоя имеют вторую ось симметрии, параллельную оси трубы. Труба или другая оболочечная конструкция, в состав которой входит слой, находится под действием растягивающей осевой нагрузки. Такую форму могут иметь поперечные сварные швы труб, цилиндрических резервуаров и других конструкций, в частности, швы прямоугольного или X-образного сечения с усилением или без. Толщина слоя не ограничивается, но предполагается, что для внутренних областей сечения слоя, НДС которых не определяется формой свободных поверхностей, допустима гипотеза плоских сечений, ортогональных оси трубы. В работе найдено новое приближенное решение полной системы уравнений, описывающей НДС пластической среды в слое. Анализ полученных формул для вычисления компонент тензора напряжений показывает, что нормальные напряжения убывают от центра сечения слоя к контактными поверхностям, т.е. вязкое разрушение должно происходить по поверхности, отклоняющейся от центральной зоны слоя. Эти формулы позволяют вычислить растягивающую нагрузку, приводящую к разрушению слоя.

Форму кругового кольца имеют поперечные сварные швы оболочечных конструкций цилиндрической формы, а также цилиндрические заготовки с осевым отверстием, обрабатываемые осадкой. НДС таких заготовок исследовалось обычно вариационными (экстремальными) методами и методом верхней оценки [1, 2]. Изучение сварных швов проводилось экспериментально [3]. В [4] сделана попытка теоретического исследования НДС тонкого кольцевого пластического слоя на основе подходов, изложенных в [5, 6, 7] для сплошного цилиндрического образца кругового сечения. Заметим, что двусвязность контура кольцевой пластической прослойки существенно увеличивает математические трудности решаемой задачи. В работе предлагается новое приближенное решение полной системы уравнений, описывающих НДС пластического слоя двусвязного контура в осесимметричном случае, на основании которого определяется растягивающая нагрузка, приводящая к разрушению слоя и соединения, содержащего этот слой.

Одной из трудностей при изучении данной проблемы является недостаточность обычных краевых условий, вытекающих из существования свободных поверхностей и симметричности слоя, для однозначного определения НДС внутренних точек слоя, так как распределение напряжений на контактной поверхности между мягким слоем и основным металлом неизвестно. Приходится использовать дополнительные гипотезы, предугадывающие внутреннее состояние материала слоя.

1. Основные допущения. Математическая постановка задачи. Предполагается, что более прочный основной металл соединения, содержащего пластический слой, деформируется упруго, а при значительных напряжениях вовлекается в пластическую де-

формацию, но имеет более высокие предел текучести и временное сопротивление. При выводе основных формул материал пластического слоя предполагается идеально жесткопластическим и удовлетворяющим обычным в таких случаях допущениям [7]. В качестве уравнения пластичности принято условие Мизеса. Полученные результаты переносятся на упрочняемые материалы (считается, что упрочнение носит изотропный характер) заменой в условии полной пластичности предела текучести слоя σ_r на другую пластическую постоянную, характеризующую момент потери пластической устойчивости материалом слоя. Ниже более подробно будет дано пояснение возможности использовать гипотезу идеальной пластичности в изучаемой ситуации. НДС пластической среды при осесимметрической деформации определяется, как известно [7], системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (1.1)$$

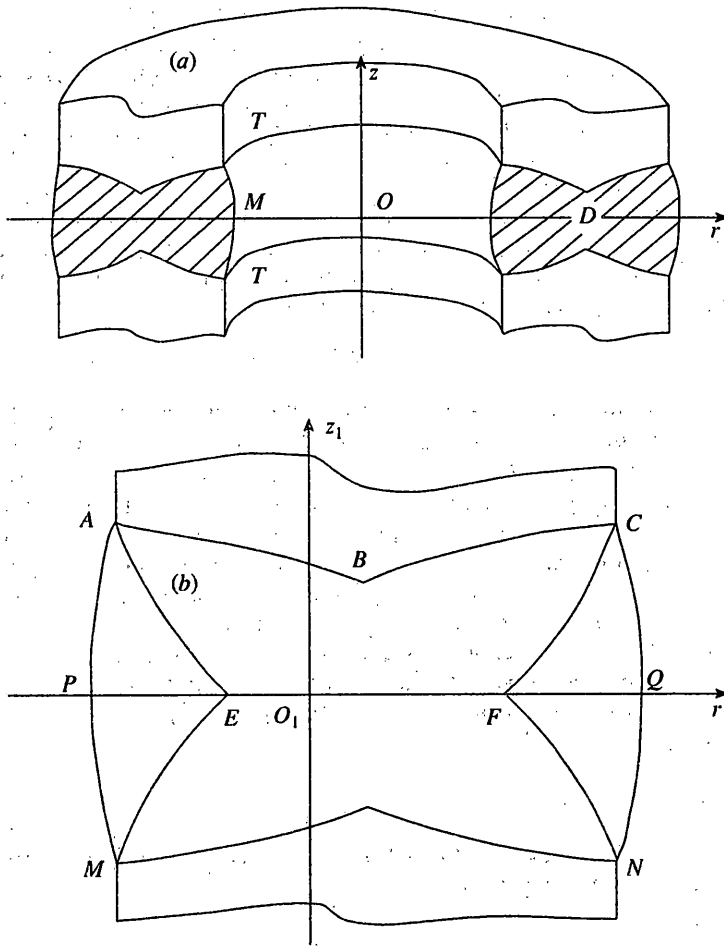
$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 6k^2 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial v_r / \partial r - v_r / r}{\sigma_r - \sigma_\varphi} = \frac{v_r / r - \partial v_z / \partial z}{\sigma_\varphi - \sigma_z} = \frac{\partial v_z / \partial z - \partial v_r / \partial r}{\sigma_z - \sigma_r} = \frac{(\partial v_r / \partial z + \partial v_z / \partial r)}{2\tau_{rz}} \quad (1.4)$$

$$\partial v_r / \partial r + v_r / r + \partial v_z / \partial z = 0 \quad (1.5)$$

Здесь σ_r – радиальное, σ_φ – кольцевое, σ_z – осевое нормальные напряжения, τ_{rz} – радиально-осевое касательное напряжение; v_r , v_φ и v_z – соответствующие (условные) скорости перемещений; (1.1) и (1.2) – уравнения равновесия (касательные напряжения $\tau_{\varphi r}$ и $\tau_{\varphi z}$ тождественно равны нулю, так как изгиб и кручение отсутствуют); (1.3) – условие текучести Мизеса, k – постоянная пластичности; (1.4) – закон пропорциональности девиаторов скорости деформаций и напряжений; (1.5) – условие несжимаемости. Если опираться не на теорию пластического течения, а на деформационную теорию, в (1.4) вместо скоростей деформаций следует использовать деформации [7]. Величины v_r , v_φ и v_z определяются с точностью до постоянного множителя. Система (1.1)–(1.5) содержит шесть независимых уравнений относительно шести неизвестных и, в этом смысле, полна. Ее носителем является сечение кольцевого слоя плоскостью, содержащей ось соединения (трубы или другой полый цилиндрической конструкции). Достаточно рассматривать одну из двух компонент связности этого сечения. Обозначим ее D . На фиг. 1 (а) изображено осевое сечение из двух компонент связности соединения с осесимметрическим кольцевым слоем; на фиг. 1 (б) – компонента осевого сечения слоя; Ox – ось симметрии; O_1 – точка раздела течения; ось Oz параллельна оси соединения. Обозначения: $\tilde{r}_* = 0.5(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2)$, \tilde{r}_2 и \tilde{r}_1 – внутренний и наружный радиусы трубы, \tilde{t} – толщина трубы по оси \tilde{r} , т.е. $\tilde{t} = \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2$, $2\tilde{h}$ – толщина слоя по поверхности трубы, $\kappa = 2\tilde{h}/\tilde{t}$ – относительная толщина слоя. Все неизвестные функции системы (1.1)–(1.5) зависят от двух переменных r и z , где r изменяется в радиальном, а z – в осевом направлении (фиг. 1). Ось r совпадает с горизонтальной осью симметрии области D , ось z – с осью трубы. Переменные r и z считаются безразмерными и пронормированными величиной \tilde{r}_* . Соответственно, вместо линейных величин \tilde{r}_* , \tilde{r}_1 , \tilde{r}_2 , \tilde{t} , \tilde{h} используются более удобные безразмерные: $r_* = 1$, $r_1 = \tilde{r}_1/\tilde{r}_*$, $r_2 = \tilde{r}_2/\tilde{r}_*$, $t = \tilde{t}/\tilde{r}_*$, $h = \tilde{h}/\tilde{r}_*$. Ось r является линией раздела течения; другая линия раздела течения – прямая $r = r_0$ (на фиг. 1 ось z_1), параллельная оси z . Также для удобства в работе используются безразмерные напряжения σ_r/k , σ_φ/k , σ_z/k и τ_{rz}/k . Для их записи



Фиг. 1

применяются прежние символы, т.е. σ_r/k обозначается через σ_r , σ_φ/k через σ_φ , σ_z/k через σ_z , а τ_{rz}/k — через τ . В этих обозначениях уравнение (1.3) приобретает вид $(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau^2 = 6$. На линиях раздела течения

$$\tau(r, 0) = 0, \tau(r_0, z) = 0 \quad (1.6)$$

Пусть на контактной линии ABC (фиг. 1):

$$\max|\tau| = \alpha, r \in (r_0, r_1], 0 < \alpha \leq 1 \quad (1.7)$$

где α — коэффициент, характеризующий вовлечение твердой части соединения в пластическую деформацию, зависящий от ряда физических и геометрических характеристик задачи: степени механической неоднородности соединения, формы сечения, относительной толщины слоя κ и др. В случае сжатия α существенно зависит от величины трения между обрабатываемой заготовкой и инструментом [2]. На неконтактных границах области D (линиях APM и CQN на фиг. 1) нормальное давление σ_n отсутствует:

$$\sigma_n = 0 \quad (1.8)$$

Распределение напряжений на контактной линии ABC неизвестно (кроме условий (1.7)). Краевых условий (1.6)–(1.8) недостаточно для однозначного решения. Это приводит к необходимости наложения каких-то априорных ограничений на класс решений, основанных на опытных данных, соображениях симметрии, аналогиях. Обычно в качестве таких ограничений используются предположения о виде касательных напряжений, например, о независимости τ от какой-либо переменной (гипотеза Л. Прандтля) или о линейности τ по какой-либо переменной [1, 5, 6, 8], или о виде функций перемещений или скоростей перемещений (гипотезы плоских [4–7] или параболических [1] сечений). Краевые условия (1.8) определяют решение в околোগраничных зонах АЕМ и CFN (фиг. 1). В остальной части слоя – обозначим ее D_1 – предполагается в данной работе выполнение гипотезы плоских сечений (ГПС):

$$v_z = W(z) \quad (1.9)$$

где $W(z)$ – функция одной переменной z , требующая определения. На фиг. 2 схематически изображен вид координатной сетки $z = \text{const}$ для слоя прямоугольного сечения: недеформированной (ниже оси Or) и деформированной (выше оси Or). Область АСFE – верхняя половина области D_1 . Решение, полученное на основе (1.9), можно еще уточнить (это приводит к существенному усложнению формул), если ГПС (1.9) заменить на более общую зависимость вида $v_z = P(r)W(z)$. В начальной стадии пластического течения возможен некоторый прогиб части стенки трубы, содержащей слой, внутрь трубы. В конечной стадии течения устанавливается симметрия сечения ослабленного участка [9], поэтому можно считать линию раздела течения (т.е. след поверхности раздела течения вдоль оси трубы, на осевом сечении) в этот момент прямой, параллельной оси трубы. Ее уравнение $r = r_0$. Поэтому внутри слоя $u_r(r_0, z) = 0$. Тогда из (1.9) и (1.5) следует

$$v_r = 0.5W'(z)(r_0^2 - r^2)r^{-1} \quad (1.10)$$

2. Вычисление касательных напряжений. Через $Z(z)$, $P(r)$ и $R(r)$ будем обозначать функции, определенные по формулам:

$$Z(z) = W''(z)/W'(z) \quad (2.1)$$

$$P(r) = (r - r_0)R(r) = (r - r_0)r(r_0 + r)/(3r^4 + r_0^4)^{1/2} \quad (2.2)$$

Подставляя выражения для v_z и v_r (формулы (1.9) и (1.10)) в систему (1.4), получаем

$$\frac{\sigma_\phi - \sigma_r}{r_0^2} = \frac{2(\sigma_z - \sigma_\phi)}{3r^2 - r_0^2} = \frac{2(\sigma_z - \sigma_r)}{3r^2 + r_0^2} = \frac{4\tau}{Z(z)r(r_0^2 - r^2)} \quad (2.3)$$

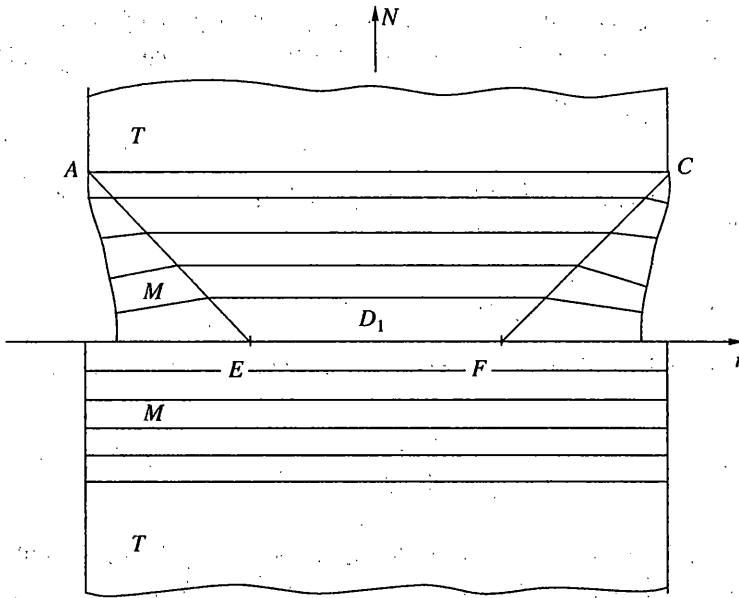
где функция $Z(z)$ определена в (2.1). Решая последнюю систему совместно с (1.3), находим

$$\sigma_\phi - \sigma_r = \frac{2r_0^2}{\sqrt{r_0^4 + 3r^4} \sqrt{1 + 0.25Z^2(z)P^2(r)}} \quad (2.4)$$

$$\sigma_z - \sigma_\phi = \frac{3r^2 - r_0^2}{\sqrt{r_0^4 + 3r^4} \sqrt{1 + 0.25Z^2(z)P^2(r)}} \quad (2.5)$$

$$\sigma_z - \sigma_r = \frac{3r^2 + r_0^2}{\sqrt{r_0^4 + 3r^4} \sqrt{1 + 0.25Z^2(z)P^2(r)}} \quad (2.6)$$

Функция $P(r)$ определена в (2.2). Из системы (2.3) можно также получить зависимость



Фиг. 2

между нормальными компонентами тензора напряжений:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{2r_0^2}{3r^2 + r_0^2} \sigma_z + \frac{3r^2 - r_0^2}{3r^2 + r_0^2} \sigma_r$$

Выражая τ через $\sigma_{\varphi} - \sigma_r$ из равенств (2.3) и подставляя вместо $\sigma_{\varphi} - \sigma_r$ его значение по формуле (2.4), получаем

$$\tau = -\frac{Z(z)P(r)}{\sqrt{4 + Z^2(z)P^2(r)}} \approx -\frac{1}{2}Z(z)P(r) + \frac{1}{16}Z^3(z)P^3(r) + \dots \quad (2.7)$$

Для нахождения функции $Z(z)$ воспользуемся уравнениями равновесия (1.1), (1.2). Дифференцируя первое уравнение по z , а второе – по r , и вычитая один результат из другого, найдем

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} (\sigma_{\varphi} - \sigma_z) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau}{r} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Подставив в это уравнение выражения для τ , $\sigma_r - \sigma_z$ и $\sigma_{\varphi} - \sigma_z$, вычисленные по формулам (2.7), (2.6) и (2.5) соответственно, получим после упрощений и отбрасывания слагаемых, имеющих относительно $r - r_0$ порядок выше первого, приближенное уравнение

$$-\frac{Z''}{Z} + \frac{P''}{P} - 3Z^2 P'^2 - 8Z' P' + \left(\frac{P}{r} \right)' \frac{1}{P} = 0 \quad (2.9)$$

где функция $P = P(r)$ введена в (2.2). Задача заключается в том, чтобы найти функции P и Z , удовлетворяющие уравнению (2.9) хотя бы приближенно, причем так, чтобы функция P мало отличалась от $R(r)(r - r_0)$, где R определена в (2.2). Ряд Тейлора для R имеет вид

$$R(r) = 1 - \frac{5}{8} \left(\frac{r - r_0}{r_0} \right)^2 + \dots \quad (2.10)$$

поэтому с точностью до слагаемых второго порядка относительно $(r - r_0)$ $P'(r) = (R(r - r_0))' \approx 1$, и задача сводится к решению вместо уравнения (2.9) уравнения

$$-\frac{Z''}{Z} + \frac{P''}{P} - 3Z^2 - 8Z' + \left(\frac{P}{r}\right)' \frac{1}{P} = 0$$

полученного из (2.9) заменой P' на 1. В последнем уравнении можно выполнить разделение переменных. Тогда получится

$$\frac{Z''}{Z} + 8Z' + 3Z^2 = \frac{P''}{P} + \left(\frac{P}{r}\right)' \frac{1}{P} = \lambda \quad (2.11)$$

где λ – постоянная. При $\lambda = 0$ функция P легко находится. Так как очевидно $P(r_0) = 0$, то

$$P = \frac{C(r^2 - r_0^2)}{r} = C(r - r_0) \left(2 - \frac{r - r_0}{r_0} + \left(\frac{r - r_0}{r_0}\right)^2 - \dots \right)$$

Сравнивая с выражением $P = (r - r_0) [1 - \frac{5}{8}((r - r_0)/r_0) + \dots]$, следующим из (2.10), видим, что при $C = \frac{1}{2}$ они отличаются менее чем на $(r - r_0)^2/(2r_0)$, т.е. примерно равны. Таким образом, при $\lambda = 0$ удается найти подходящую функцию P :

$$P = R(r)(r - r_0) = (r^2 - r_0^2)/(2r) \approx r - r_0 \quad (2.12)$$

Тогда из (2.11) получается уравнение для нахождения функции Z :

$$Z'' + 8Z'Z + 3Z^3 = 0 \quad (2.13)$$

Вместо этого уравнения удобнее рассматривать уравнение

$$U'' + 2U'U + \frac{3}{16}U^3 = 0 \quad (2.14)$$

полученное из (2.13) заменой искомой функции по формуле $U(z) = 4Z(z)$. Наряду с (2.14) рассмотрим уравнение

$$U'' + 2U'U = 0 \quad (2.15)$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что при условиях

$$U(0) = 0, U'(0) = \pm A^2 \quad (2.16)$$

уравнение (2.15) имеет единственное решение, которое, в зависимости от знака перед A^2 в (2.16), имеет вид:

$$U(z) = A \operatorname{th}(Az), \text{ если } U'(0) > 0 \quad (2.17)$$

$$U(z) = -A \operatorname{tg}(Az), \text{ если } U'(0) < 0 \quad (2.18)$$

Сравнивая решения уравнений (2.14) и (2.15), полученные в форме степенных рядов для начальных условий (2.16), можно заметить, что они различаются начиная лишь с пятой степени – на величину $\delta = A \times 0.0094(Az)^5(1 + 0.755(Az)^2 + \dots)$. Для наиболее интересных с точки зрения приложений случаев $\kappa < 0.6$, $\alpha < 0.3$, соответствующих не "толстым" прослойкам, когда контактное упрочнение реально проявляется, и малой механической неоднородности, характерной для сварных соединений, Az заведомо меньше единицы (это следует из полученной ниже формулы (2.24)), т.е. δ мала по сравнению с (2.18). Впрочем, во всех случаях, исследуя на экстремум функцию $x^5 \operatorname{tg}^{-1}x$ (максимум достигается при $x = 1.297$ и равен 1.0308), можно заметить, что величина $\delta/\operatorname{Atg}(Az)$ имеет порядок 1 – 2%. Поэтому в качестве решения уравнения (2.14) можно без существенной ошибки принять решение задачи (2.15), (2.16), имеющее вид

(2.17) или (2.18). Ниже будет показано, что рассматриваемой физической модели соответствует решение (2.18) (формула (2.17) относится к случаю сжатия по оси Oz), и будет найдена, на основании (1.7), величина параметра A . Условие (2.16) следует из (1.6). Таким образом, функция $Z(z)$, введенная равенством (2.1), выражается в виде

$$Z(z) = -\frac{1}{4} A \operatorname{tg}(Az) \quad (2.19)$$

Тогда из (2.4) и (2.6), применив соответствующие степенные разложения, получим

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = -(1 - \frac{3}{2}(r - r_0) + \frac{9}{8}(r - r_0)^2 - \dots)(1 - \frac{1}{32} A^2 \operatorname{tg}^2(Az)(r - r_0)^2 + \dots) \quad (2.20)$$

$$\sigma_r - \sigma_z = -2(1 + \frac{9}{8}(r - r_0)^2)(1 - \frac{1}{32} A^2 \operatorname{tg}^2(Az)(r - r_0)^2 + \dots) \quad (2.21)$$

При вычислении параметра A заметим, что $|\tau|$ монотонно возрастает при удалении от линии $O_1 Z_1$, поэтому точкой максимума $|\tau|$ можно (приближенно) взять точку C на фиг. 1. Поэтому из (1.7) и (2.7) следует, что

$$|Z(h)P(r_1)| = \beta, \quad \beta = 2\alpha(1 - \alpha^2)^{-1/2} \quad (2.22)$$

Тогда из (2.19) и (2.12):

$$Ah \operatorname{tg}(Ah) = 4h\beta(r_1 - r_0)^{-1} \approx 4\beta\kappa, \quad \kappa = 2h/t \quad (2.23)$$

Чтобы найти формулу для A , обозначим через $y = d(x)$ зависимость $y \operatorname{tg} y = x$, $y \in [0; \pi/2)$. Тогда

$$A \approx h^{-1} d(4\beta\kappa) \quad (2.24)$$

Функцию $y = d(x)$ можно табулировать или для вычисления ее приближенных значений использовать график обратной к ней функции $y = x \operatorname{tg} x$. Рассмотрим частный случай. Используя приближенную формулу $x \operatorname{tg} x \approx x(\pi/2 - x)^{-1}$, следующую из асимптотического разложения ее левой части в окрестности точки $x = \pi/2$, которую можно считать приближенно верной для $x \in (5\pi/12; \pi/2)$, из (2.23) получаем

$$A \approx 2\pi\beta\kappa h^{-1}(1 + 4\beta\kappa)^{-1} \quad (2.25)$$

Если основной материал соединения работает жестко, и касательные напряжения на контактной поверхности достигают значения пластической постоянной k , то, в силу принятых здесь безразмерных обозначений, $\alpha = 1$ по условию (1.7); тогда $\beta = \infty$, и по формуле (2.25):

$$A = 0.5\pi h^{-1} \quad (2.26)$$

Формулу (2.25) можно применять при высокой степени механической неоднородности соединения, когда $\beta > 1.25\kappa$. Пример. Пусть $\kappa = 0.5$, $\alpha = 0.8$. Тогда $\beta = 8/3$, и равенство выполняется, т.е. формула (2.25) применима.

Для малых значений аргумента функции d можно воспользоваться приближенным равенством $\operatorname{tg} x \approx x$; тогда $d^2 \approx 4\beta\kappa$, а постоянная β определена в (2.22).

3. Вычисление нормальных напряжений и предельного усилия. Запишем уравнения (1.1) и (1.2) в форме

$$\sigma_r = -\int_{r_0}^r \frac{\partial \tau}{\partial z} dr - \int_{r_0}^r \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} dr + \varphi(z) \quad (3.1)$$

$$\sigma_z = -\int_0^z \frac{\partial \tau}{\partial r} dz - \frac{1}{r} \int_0^z \tau dz + \psi(r) \quad (3.2)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(r)$ – функции одной переменной. После подстановки сюда выражений для τ из (2.19) и для $\sigma_r - \sigma_\varphi$ из (2.20) разность между правыми частями первого и второго из

этих уравнений приравняем выражению для $\sigma_r - \sigma_z$ из (2.21). Этого достаточно для определения функций ϕ и ψ с точностью до общего для них постоянного слагаемого. Так как получающиеся выражения труднообозримы, проведем некоторые упрощения. На основании (2.4) и (2.6) представим приближенно выражения для разностей нормальных напряжений в виде

$$\sigma_r - \sigma_\phi \approx \frac{1}{8} Z^2 P^2 - 1 \quad (3.3)$$

$$\sigma_r - \sigma_z \approx \frac{1}{4} Z^2 P^2 - 2 \quad (3.4)$$

а для τ воспользуемся вторым выражением из формулы (2.7). Заметим, что если воспользоваться формулами (3.3) и (3.4) и (2.7) при подстановке в уравнение (2.8), результат получится тот же, т.е. система уравнений (2.11). Другими словами, напряжения, найденные с помощью соотношений (3.3), (3.4) и (2.7), также являются (приближенными) решениями системы (1.1)–(1.5). Более того, если формулу (2.7) еще более упростить, считая

$$\tau = -\frac{1}{2} Z(z)P(r) \quad (3.5)$$

при подстановке в (2.8) получится вместо (2.14) уравнение (2.15), т.е. замена (2.7) на (3.5) в процессе использования уравнений (1.1) и (1.2), в том числе в форме (3.1) и (3.2), не приводит к существенным ошибкам в результате, что подтверждается прямыми выкладками при вычислении интегралов в (3.1) и (3.2). Эти соображения позволяют получить удовлетворительные по точности обозримые формулы для вычисления нормальных напряжений, годные для инженерных расчетов. Представление τ в виде (3.5), т.е. в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, использовалось (постулировалось) и в работах [4–8]. Однако формула (3.5) дает заметную ошибку для значений τ в точках, далеких от линий раздела течения, в которых τ "не очень мало".

Используя формулы (3.3)–(3.5), получаем после вычисления интегралов в (3.1), (3.2) и отбрасывания заведомо малых слагаемых, что

$$\sigma_r = -\frac{A^2(r-r_0)^2}{16} + \ln \frac{r}{r_0} + \frac{1}{8} \ln |\cos(Az)| - \frac{A^2}{16} \operatorname{tg}^2(Az)(r-r_0)^2 + c \quad (3.6)$$

$$\sigma_z = \frac{2r-r_0}{8r} \ln |\cos(Az)| - \frac{A^2(r-r_0)^2}{16} + \ln \frac{r}{r_0} + 2 + c \quad (3.7)$$

Для вычисления постоянной c заметим, что напряжение σ_r в точках E и F (фиг. 1, 2) полностью определяется контуром свободных поверхностей АРМ и СQN (фиг. 1). Обозначим эти напряжения через q_2 – в точке E и q_1 – в точке F . Координаты точек E и F зависят от формы поверхностей АРМ и СQN в момент определения σ_r и σ_z , т.е. в конечной стадии течения. Положим $PE = QF = \gamma h$ (фиг. 1), где h – половина толщины слоя на свободной поверхности, γ – коэффициент, зависящий от формы этой поверхности. В частности, если АРМ и СQN – прямые, то $q_2 = q_1 = 0$, $\gamma = 1$; если дуги окружностей, то q_2 , q_1 и γ находятся по известным формулам [7]. Из уравнений $\sigma_r(E) = q_2$, $\sigma_r(F) = q_1$ и формулы (3.6) получается система двух уравнений с двумя неизвестными c и r_0 :

$$-\frac{A^2}{16}(r_0 - r_2 - \gamma h)^2 + \ln \frac{r_2 + \gamma h}{r_0} + c = q_2 \quad (3.8)$$

$$-\frac{A^2}{16}(r_1 - r_0 - \gamma h)^2 + \ln \frac{r_1 - \gamma h}{r_0} + c = q_1$$

Введя обозначения $r_* = 0.5(r_2 + r_1)$, $\Delta q = q_2 - q_1$, получаем из (3.8), что

$$r_0 = r_* - \frac{8}{A^2} \left(\frac{1}{r_*} + \frac{\Delta q}{t - 2\gamma h} \right) \quad (3.9)$$

В частности, если формы усиления слоя на наружной и внутренней стенках трубы совпадают, то $\Delta q = 0$ и

$$r_0 = r_* - \frac{8}{A^2 r_*} = r_* - \frac{8h^2}{r_* d^2 (4\beta\kappa)} \quad (3.10)$$

где функция d обратна к функции $y = x \operatorname{tg} x$. Из формул (3.9) и (3.10) следует, что цилиндрическая поверхность раздела течения (ее след на фиг. 1 – ось $O_1 Z_1$) расположена ближе к внутренней поверхности трубы. Этот вывод подтверждается экспериментами работы [3] и хорошо согласуется с явлением, которое происходит при растяжении однородной трубы, ослабленной кольцевым утонением стенки [9], под действием растягивающей осевой нагрузки, когда происходит одновременно два вида пластической деформации – поперечное сжатие образца целиком в области утонения (шейка трубы) и образование шейки стенки. В результате наложения первой деформации на вторую имеет место смещение продольной поверхности раздела течения в направлении внутрь трубы. Так как, хотя бы в первом приближении, ГПС для поперечных сечений внутренних участков шейки применима, напряжения в шейке (в конечной стадии течения) приближенно описываются уравнениями (3.6) и (3.7); различие состоит в том, что в неоднородном соединении с мягкой прослойкой концентратором напряжений является мягкий слой, а в однородной трубе – утонение стенки.

Пример. Пусть слой имеет прямоугольную форму, $t = 0.1$, $\kappa = 2h/t = 0.5$, основной металл идеально жесткий. Тогда, как было отмечено, $A = \pi/(2h)$. Применима формула (3.10). Относительное смещение линии раздела течения $(r_* - r_0)/t \approx 0.02$.

Для нахождения постоянной c надо подставить полученное в (3.9) выражение для r_0 в любое уравнение системы (3.8). После упрощений и отбрасывания малых слагаемых, имеющих порядок t^2 и выше, применив формулу (2.24), найдем

$$c = \frac{d^2(1 - \gamma\kappa)^2}{16\kappa^2} + q_*, \quad q_* = \frac{1}{2}(q_2 + q_1) \quad (3.11)$$

где $d = d(4\beta\kappa)$. Подставив найденное выражение для c в (3.6) и (3.7), окончательно вычислим величину напряжений σ_r и σ_z .

Рассмотрим распределение нормальных напряжений по линии $r = r_0$, лежащей на поверхности раздела течения. Из (3.6) и (3.7) для точек этой линии получим

$$\sigma_z = \frac{1}{8} \ln |\cos(Az)| + 2 + c = 2 + c - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}(Az)^2 + \frac{1}{12}(Az)^4 + \dots \right) \quad (3.12)$$

а $\sigma_r = \sigma_z - 2$. Распределение нормальных напряжений σ_z по любой другой, параллельной оси трубы, линии $r = r_0$ имеет, как видно из (3.7), аналогичный характер – напряжения достигают наибольшего значения на плоскости симметрии слоя $z = 0$ и убывают по параболическому (квадратичному) закону к контактным поверхностям. Примерно так же ведут себя нормальные напряжения, если проследить их изменение в направлении, ортогональном оси трубы $z = \text{const}$. Так при $z = 0$ из (3.7) и (3.6) следует, что

$$\sigma_z = 2 + c - \frac{A^2(r - r_0)^2}{16} + \ln \frac{r}{r_0} \quad (3.13)$$

а $\sigma_r = \sigma_z - 2$. Из формулы (3.12) видно, что нормальное напряжение σ_z , при котором создаются условия для вязкого разрушения, максимально на плоскости симметрии

$z = 0$ и уменьшается при приближении к контактным поверхностям. Отсюда следует, что в средней части сечения слоя, обозначенной ранее через D_1 , в которой допускается выполнение ГПС (1.9), разрушение не должно проходить через центральную часть слоя, а должно отклоняться к контактной поверхности. Аналогичное явление происходит при разрушении шейки цилиндрического образца и трубы, находящихся под растягивающей нагрузкой. Эксперименты, исследующие этот вопрос для трубы, содержащей кольцевой мягкий слой, авторам неизвестны.

Анализ формулы (3.13) показывает, что с точностью до величины порядка $0.05t^3$ эпюры напряжений σ_z и σ_r на оси Oz можно считать параболами. Тогда, в силу симметрии последних, при $q_2 = q_1$ напряжения σ_z и σ_r достигают своего наибольшего значения в центре слоя, при $r = r_*$. Так как экстремум функции σ_z легко вычисляется из формулы (3.13), имеется еще один способ нахождения величины $r_* - r_0$. Расчеты показывают, что $r_* - r_0 = 8h^2 d^{-2} r_*^{-1}$, что совпадает с формулой (3.10).

4. Вычисление предельной нагрузки. Формулы для вычисления предельных нормальных напряжений (3.6) и (3.7) позволяют находить максимальную осевую нагрузку для слоя с сечением любой формы, имеющим две оси симметрии. Вывод и исследование таких формул связаны со значительными техническими трудностями, и в некоторых важных частных случаях (например, для X -прослойки с усилениями) могут быть предметом отдельной статьи. В данной работе, во избежание чрезмерно громоздких формул, ограничимся случаем слоя прямоугольного сечения. Примерные границы зоны в центральной части слоя, где происходит контактное упрочнение, определяются уравнением $\sigma_z = 2$. Линии уровня $\sigma_z = \text{const}$ являются, как следует из (3.7), простыми замкнутыми кривыми, ограничивающими выпуклую область с двумя ортогональными осями симметрии $r = r_*$ и $z = 0$ и центром в точке $R(r_*, 0)$. Когда свободные поверхности слоя являются плоскими (усиления слоя отсутствуют), формула (3.7) аппроксимируется выражением

$$\sigma_z = -\frac{d^2}{16h^2}(r - r_*)^2 + \sigma_{z \max} \quad (4.1)$$

где $\sigma_{z \max}$ — наибольшее значение σ_z как функции от r для каждого z :

$$\sigma_{z \max} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{8h^2}{d^2 r_*^2} \right) \ln \left| \cos \frac{d}{h} z \right| + 2 + \frac{d^2 (1 - \kappa)^2}{16 \kappa^2} \quad (4.2)$$

Используя разложение $\ln |\cos az| = -\frac{1}{2} a^2 z^2 - \frac{1}{12} a^4 z^4 - \dots$, получаем, что уравнение границы зоны упрочнения $\sigma_z = 2$ имеет вид

$$\frac{(r - r_*)^2}{h^2} + \left(1 + \frac{8h^2}{d^2 r_*^2} \right) \frac{z^2}{h^2} \left(1 + \frac{d^2 z^2}{6h^2} \right) = \frac{(1 - \kappa)^2}{\kappa^2} \quad (4.3)$$

в первом приближении это окружность с центром в точке $(r_*, 0)$ и радиусом $h(1 - \kappa)/\kappa$. Для тонких слоев ($\kappa < 1/3$) упрочнение существенно, что проявляется в большом радиусе области упрочнения (больше $2h$). В этом случае оценкой предельной нагрузки можно считать величину (напомним, что здесь используются безразмерные напряжения):

$$N = 2\pi \int_{r_2}^{\eta} r \sigma_z(r, 0) dr \quad (4.4)$$

т.е. определять предельную нагрузку по срединному сечению слоя $z = 0$. Разобьем отрезок интегрирования $[r_2, r_1]$ на $[r_2, r_2 + h]$, $[r_2 + h, r_2 - h]$ и $[r_1 - h, r_1]$. На первом и третьем из этих отрезков $\sigma_z(r, 0) = 2$, а на втором находится по формулам (4.1), (4.2).

Подставляя эти значения σ_z в (4.4), находим

$$N_{cr} = 2\pi r_* (2 + K_{cl}) \quad (4.5)$$

$$K_{cl} = \left(\frac{\pi \kappa}{d^2} + \frac{d^2(1-\kappa)^2}{16\kappa^2} - \frac{5d^2 t}{48\kappa} \right) (1-\kappa) \quad (4.6)$$

а безразмерная величина t является отношением толщины стенки трубы к среднему радиусу $t = \tilde{t} / \tilde{r}_*$. Среднее осевое напряжение σ_y на этом сечении $\sigma_{z*} = 2 + K_{cl}$.

Например, если $t = 0.1$, $\kappa = 2h/t = 0.3$, $d = 1$, то $\sigma_{z*} = 2.2$, если $t = 0.02$, $\kappa = 0.2$, $d = 0.8$, то $\sigma_{z*} = 2.51$. Чем меньше κ , тем больше упрочнение K_{cl} .

Из уравнения (4.3) видно, что если $\kappa \geq 0.5$, то контактное упрочнение фактически отсутствует, так как зона упрочнения не перекрывает слой целиком (в его средней части). В диапазоне $0.3 < \kappa < 0.5$ формулы (4.5), (4.6) являются верхней оценкой предельного осевого усилия. Для подсчета более точного значения N_{cr} вместо (4.4) надо использовать формулу

$$N = 2\pi \int_{r_2}^{r_1} r \sigma_z(r, h) dr$$

т.е. считать нагрузку по слабому сечению, расположенному вблизи контактной поверхности. Соответствующие вычисления не представляют принципиальных трудностей, но влекут чрезмерно громоздкие формулы и здесь не приводятся.

5. Вычисление скоростей смещений. Скорости смещений описываются при ГПС формулами (1.9) и (1.10). Перечислим априорно очевидные свойства функции $W(z)$ из (1.9):

(1) на поверхности раздела течения движение в осевом направлении отсутствует, т.е. $W(0) = 0$;

(2) $W(z)$ – нечетная функция, поэтому $W'(z)$ – четная, $Z(z) = W''(z)/W'(z)$ – нечетная; в частности, $Z(0) = 0$;

(3) функция $W(z)$ монотонно возрастает, так как при растяжении слоя отсутствует локальное сжатие; отсюда $W'(z) \geq 0$ для всех точек слоя, $W(z) > 0$ для $z > 0$;

(4) $W'(z)$ при удалении от плоскости раздела течения монотонно убывает ($z > 0$) – чем ближе к контактным границам, тем меньшей деформации подвергается слой.

Выше была найдена формула (2.19) для вычисления функции $Z(z)$. Из (2.19) и (2.1) получаем уравнение

$$W''/W' = -(A/4) \operatorname{tg}(Az) \quad (5.1)$$

где постоянная A зависит от внешних параметров задачи и определена в (2.24). Решая уравнение (5.1), получаем

$$W'(z) = C(\cos(Az))^{1/4}, \quad W(z) = C \int_0^z (\cos(Az))^{1/4} dz \quad (5.2)$$

где C – произвольная постоянная, $C \neq 0$.

Функция $W(z)$, определенная в (5.2), очевидно, удовлетворяет условиям 1) – 4). Из (5.2) и (1.10) находится формула для вычисления скоростей радиальных смещений

$$v_r = C(\cos Az)^{1/4} (r_0^2 - r^2) / (2r) \quad (5.3)$$

из которой видно, что v_r направлена к плоскости раздела течения $r = r_0$ и максимальна на поверхности $z = 0$, а минимальна на контактной поверхности; для слоя прямоугольного сечения на контактной поверхности $v_r = C(\cos d)^{1/4} (r_0^2 - r^2) / (2r)$ – это скорость смещения основного металла соединения, вовлеченного в пластическую дефор-

мацию. При высокой степени механической неоднородности основной металл ведет себя как твердое тело, что точно соответствует полученным результатам. Действительно, по формуле (2.26) $A = \pi(2h)$, тогда $\cos d = \cos Ah = \cos \pi/2 = 0$, и по формуле (5.3) $v_r = 0$.

6. Выводы. 1. Изложена новая методика приближенного решения полной системы уравнений пластического течения в осесимметрическом случае для кольцевого слоя и вычислены компоненты тензоров напряжений в поперечном пластическом слое цилиндрической оболочечной конструкции (трубы); выведены соответствующие приближенные формулы. Получена оценка предельной нагрузки на трубу в осевом направлении, содержащей концентратор напряжения в виде мягкой прослойки (мягкого сварного шва либо зоны термического влияния в околошовной зоне).

2. Показано, что поверхность разрушения должна отклоняться от центральной части слоя в сторону контактных поверхностей.

3. Найдено расположение цилиндрической поверхности раздела течения внутри слоя в зависимости от его геометрических и физических параметров. Показано, что поверхность раздела течения смещена от середины стенки трубы к центру.

4. Выведены формулы для осевой и радиальной скоростей смещений.

Полученные результаты можно использовать для разработки методик оценки прочности и диагностики сварных швов труб магистральных трубопроводов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ – Урал (проект 01-01-96427).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Унксов Е.П., Джонсон У., Колмогоров В.Л. и др. Теория пластических деформаций металлов. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.
2. Тарнавский И.Я., Поздеев А.А., Ганаго О.А. и др. Теория обработки металлов давлением М.: Металлургиздат, 1963. 672 с.
3. Пуйко А.В., Зельман М.Г., Анисимов Ю.И. Экспериментальный анализ пластического деформирования мягких кольцевых прослоек в составе трубы // Экономия материальных, энергетических и трудовых ресурсов в сварочном производстве. Челябинск: О-во "Знание", 1986. С. 271–273.
4. Богомолова А.С. О напряженном состоянии пластической прослойки с двухсвязным контуром при осесимметрической деформации // Сварные металлоконструкции и их производство. Челябинск: 1972. С. 178–183.
5. Качанов Л.М. К задаче о деформации пластического слоя // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96. № 2. С. 249–252.
6. Бакиш О.А., Качанов Л.М. О напряженном состоянии пластичной прослойки при осесимметрической деформации // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 134–137.
7. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
8. Остемин А.А., Дильман В.Л. О сжатию пластического слоя двумя шероховатыми плитами // Проблемы прочности. 1990. № 7. С. 107–113.
9. Бриджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит. 1955. 444 с.

Челябинск

Поступила в редакцию
5.01.2000