

УДК 539.374

© 2002 г. М.В. МИХАЙЛОВА

СДАВЛИВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ИСКРИВЛЕННЫМИ И НАКЛОННЫМИ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Решение плоской задачи о сжатии идеального жесткопластического слоя шероховатыми плитами исследовал Л. Прандтль [1]. Надаи [2] обобщил решение Прандтля на случай сжатия слоя наклонными шероховатыми плитами, а также плитами, изогнутыми в виде концентрических окружностей. Хилл [3] предложил решение задачи о вдавливании стержня из сжимающейся шероховатой втулки. Некоторые обобщения решения Прандтля на случай осесимметрического и пространственного течения приведены в работах [4–7]. Проблема течения пластического слоя между шероховатыми поверхностями исследовалась А.А. Ильюшиным в [8, 9]. В работе [10] рассмотрена задача о сдавливании круглого в плане пластического слоя шероховатыми плитами.

В данной работе рассматривается задача о сдавливании пластического слоя искривленными и наклонными шероховатыми плитами. Все величины, имеющие размерность длины, соотнесены к характерной длине величины слоя h . В качестве малого параметра, относительно которого проводится линеаризация, берется безразмерная величина δ обратная радиусу кривизны $\delta = 1/R$.

Уравнения равновесия в сферической системе координат имеют вид

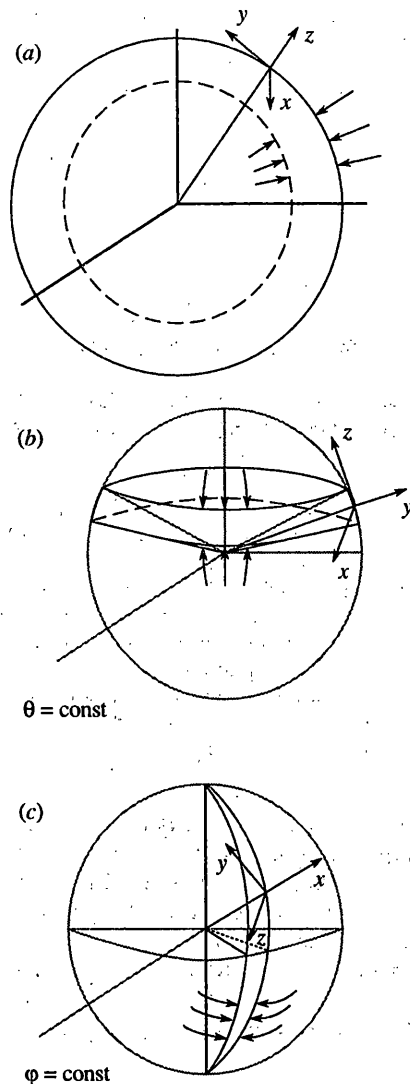
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (3\tau_{\rho\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} (3\tau_{\rho\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений.

Соотношения, определяющие условие полной пластичности, согласно [6], запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma - \frac{2k}{3} + \frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho\varphi}}{\tau_{\theta\varphi}}, \quad \sigma_\theta = \sigma - \frac{2k}{3} + \frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\varphi}}, \quad \sigma_\varphi = \sigma - \frac{2k}{3} + \frac{\tau_{\rho\varphi}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\theta}} \\ \frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\rho\varphi}}{\tau_{\theta\varphi}} + \frac{\tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\varphi}} + \frac{\tau_{\rho\varphi}\tau_{\theta\varphi}}{\tau_{\rho\theta}} &= 2k \end{aligned} \quad (2)$$

где k – предел текучести на сдвиг, $\sigma = (\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_\varphi)/3$.



В дальнейшем компоненты напряжения отнесем к величине предела текучести на сдвиг k .

Решение ищется в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta \sigma_{ij}^I \quad (3)$$

Рассмотрим задачу о сдавливании пластического слоя двумя концентрическими сферическими поверхностями (фигура). В этом случае внешние усилия будут направлены вдоль оси ρ .

Введем замену переменных

$$\rho = R + z, \quad R(\theta - \pi/2) = y, \quad R\phi = x, \quad R = \text{const} \quad (4)$$

Выражения (4) представим в виде

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\delta}{1 + \delta z}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \delta y, \quad \phi = \delta x, \quad \delta = \frac{1}{R} \quad (5)$$

Используя соотношения (5), перейдем в уравнения равновесия (1) к переменным x_{yz} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{(1+\delta z)} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{1}{(1+\delta z) \cos(\delta y)} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\delta}{(1+\delta z)} (2\sigma_z - \sigma_y - \sigma_x - \tau_{yz} \operatorname{tg}(\delta y)) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{1}{(1+\delta z)} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{1}{(1+\delta z) \cos(\delta y)} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{(1+\delta z)} (3\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{tg}(\delta y)) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{1}{(1+\delta z)} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{(1+\delta z) \cos(\delta y)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{(1+\delta z)} (3\tau_{xz} - 2\tau_{xy} \operatorname{tg}(\delta y)) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

При $\delta = 0$ уравнения (6) переходят в уравнения равновесия в декартовой системе координат x_{yz} .

Линеаризованные соотношения (6), (2) согласно (3) примут вид:

(1) в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \partial \sigma_x^0 / \partial x + \partial \tau_{xy}^0 / \partial y + \partial \tau_{xz}^0 / \partial z &= 0 \\ \partial \tau_{xy}^0 / \partial x + \partial \sigma_y^0 / \partial y + \partial \tau_{yz}^0 / \partial z &= 0 \\ \partial \tau_{xz}^0 / \partial x + \partial \tau_{yz}^0 / \partial y + \partial \sigma_z^0 / \partial z &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= \sigma - \frac{2}{3} + \frac{\tau_{xy}^0 \tau_{xz}^0}{\tau_{yz}^0}, \quad \sigma_y^0 = \sigma - \frac{2}{3} + \frac{\tau_{xy}^0 \tau_{yz}^0}{\tau_{xz}^0}, \quad \sigma_z^0 = \sigma - \frac{2}{3} + \frac{\tau_{xz}^0 \tau_{yz}^0}{\tau_{xy}^0} \\ \frac{\tau_{xy}^0 \tau_{xz}^0}{\tau_{yz}^0} + \frac{\tau_{xy}^0 \tau_{yz}^0}{\tau_{xz}^0} + \frac{\tau_{xz}^0 \tau_{yz}^0}{\tau_{xy}^0} &= 2 \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно [6] система уравнений (7), (8) имеет решение следующего вида:

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= -ax - by - \frac{abz^2}{\tau_{xy}^0} + c + \frac{a}{b} \tau_{xy}^0 \\ \sigma_y^0 &= -ax - by - \frac{abz^2}{\tau_{xy}^0} + c + \frac{b}{a} \tau_{xy}^0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sigma_x^0 = -ax - by + c, \quad a, b, c - \text{const}$$

$$\tau_{xy}^0 = \frac{ab}{(a^2 + b^2)} (1 \pm \sqrt{1 - (a^2 + b^2)z^2}) \quad (10)$$

$$\tau_{xz}^0 = az, \quad \tau_{yz}^0 = bz$$

(2) в первом приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^I}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^I}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^I}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_x^0}{\partial x} z - \frac{\partial \tau_{xy}^0}{\partial y} z + 3\tau_{xz}^0 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}^I}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^I}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^I}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xy}^0}{\partial x} z - \frac{\partial \sigma_y^I}{\partial y} z + 3\tau_{yz}^0 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}^I}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^I}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^I}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}^0}{\partial x} z - \frac{\partial \tau_{yz}^I}{\partial y} z + 2\sigma_z^0 - \sigma_x^0 - \sigma_y^0 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^I &= \sigma^I + \frac{(\tau_{xy}^I \tau_{xz}^0 + \tau_{xy}^0 \tau_{xz}^I) \tau_{yz}^0 - \tau_{xy}^0 \tau_{xz}^0 \tau_{yz}^I}{(\tau_{yz}^0)^2} \\ \sigma_y^I &= \sigma^I + \frac{(\tau_{xy}^I \tau_{yz}^0 + \tau_{xy}^0 \tau_{yz}^I) \tau_{xz}^0 - \tau_{xy}^0 \tau_{yz}^0 \tau_{xz}^I}{(\tau_{xz}^0)^2}\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z^I &= \sigma^I + \frac{(\tau_{xz}^I \tau_{yz}^0 + \tau_{xz}^0 \tau_{yz}^I) \tau_{xy}^0 - \tau_{xz}^0 \tau_{yz}^0 \tau_{xy}^I}{(\tau_{xy}^0)^2} \\ &+ \frac{(\tau_{xy}^I \tau_{xz}^0 + \tau_{xy}^0 \tau_{xz}^I) \tau_{yz}^0 - \tau_{xy}^0 \tau_{xz}^0 \tau_{yz}^I}{(\tau_{yz}^0)^2} + \frac{(\tau_{xy}^I \tau_{yz}^0 + \tau_{xy}^0 \tau_{yz}^I) \tau_{xz}^0 - \tau_{xy}^0 \tau_{yz}^0 \tau_{xz}^I}{(\tau_{xz}^0)^2} + \\ &+ \frac{(\tau_{xz}^I \tau_{yz}^0 + \tau_{xz}^0 \tau_{yz}^I) \tau_{xy}^0 - \tau_{xz}^0 \tau_{yz}^0 \tau_{xy}^I}{(\tau_{xy}^0)^2} = 0\end{aligned}\quad (13)$$

Подставляя соотношения (9), (10) в (11), получим

$$\begin{aligned}\partial \sigma_x^I / \partial x + \partial \tau_{xy}^I / \partial y + \partial \tau_{xz}^I / \partial z &= -4az \\ \partial \tau_{xy}^I / \partial x + \partial \sigma_y^I / \partial y + \partial \tau_{yz}^I / \partial z &= -4bz \\ \frac{\partial \tau_{xz}^I}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^I}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^I}{\partial z} &= -4 + 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \tau_{xy}^0\end{aligned}\quad (14)$$

Следуя идеям Прандтля [1], положим

$$\tau_{xz}^I = \tau_{xz}^I(z), \quad \tau_{yz}^I = \tau_{yz}^I(z) \quad (15)$$

тогда из (15), (13), (10) получим, что $\tau_{xy}^I = \tau_{xy}^I(z)$. Таким образом соотношения (12) примут вид

$$\sigma_x^I = \sigma^I + f_1(z), \quad \sigma_y^I = \sigma^I + f_2(z), \quad \sigma_z^I = \sigma^I + f_3(z) \quad (16)$$

$$\begin{aligned}f_1(z) &= \frac{(\tau_{xy}^I \tau_{xz}^0 + \tau_{xy}^0 \tau_{xz}^I) \tau_{yz}^0 - \tau_{xy}^0 \tau_{xz}^0 \tau_{yz}^I}{(\tau_{yz}^0)^2} \\ f_2(z) &= \frac{(\tau_{xy}^I \tau_{yz}^0 + \tau_{xy}^0 \tau_{yz}^I) \tau_{xz}^0 - \tau_{xy}^0 \tau_{yz}^0 \tau_{xz}^I}{(\tau_{xz}^0)^2} \\ f_3(z) &= \frac{(\tau_{xz}^I \tau_{yz}^0 + \tau_{xz}^0 \tau_{yz}^I) \tau_{xy}^0 - \tau_{xz}^0 \tau_{yz}^0 \tau_{xy}^I}{(\tau_{xy}^0)^2}\end{aligned}\quad (17)$$

Учитывая, что $\tau_{ij}^I = \tau_{ij}^I(z)$, и подставляя выражения (16) в (14), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma^I}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^I}{\partial z} &= -4az, \quad \frac{\partial \sigma^I}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^I}{\partial z} = -4bz \\ \frac{\partial \sigma_z^I}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (\sigma^I + f_3(z)) = F(z)\end{aligned}\quad (18)$$

$$F(z) = -4 + 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \tau_{xy}^0 = -1 \pm 3 \sqrt{1 - (a^2 + b^2)z^2} \quad (19)$$

Из третьего уравнения системы (18) находим

$$\sigma_z^I = \sigma^I + f_3(z) = \int F(z) dz = \bar{F}(z) + f(x, y) \quad (20)$$

С учетом (20) первые два уравнения системы (18) примут вид

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{d\tau'_{xz}(z)}{dz} = -4az, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{d\tau'_{yz}(z)}{dz} = -4bz \quad (21)$$

Следовательно

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -a_1, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -b_1, \quad a_1, b_1 - \text{const} \quad (22)$$

$$\frac{d\tau'_{xz}(z)}{dz} = a_1 - 4az, \quad \frac{d\tau'_{yz}(z)}{dz} = b_1 - 4bz \quad (23)$$

Решая системы (22) и (23), находим

$$f(x, y) = -a_1x - b_1y + c, \quad c - \text{const} \quad (24)$$

$$\tau'_{xz}(z) = a_1z - 2az^2 + c_1, \quad c_1 - \text{const} \quad (25)$$

$$\tau'_{yz}(z) = b_1z - 2bz^2 + c_2, \quad c_2 - \text{const}$$

Величина $\tau'_{xy}(z)$ определяется из (13), (10), (25). Из (24), (20), (16) получаем

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= -a_1x - b_1y + c - f_3(z) + f_1(z) + \bar{F}(z) \\ \sigma'_y &= -a_1x - b_1y + c - f_3(z) + f_2(z) + \bar{F}(z) \\ \sigma'_z &= -a_1x - b_1y + c + \bar{F}(z) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\bar{F}(z) = -z \pm 3\sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{z}{2} \sqrt{\frac{1}{(a^2 + b^2)} - z^2} \pm \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \arcsin(z\sqrt{a^2 + b^2}) \right] \quad (27)$$

Согласно (25), (26) при искривлении плит сдвигивающее давление σ_z при $z = \pm 1$ в первом приближении сохраняет линейный характер, распределение касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} по толщине слоя становится нелинейным. В первом приближении для искривленных плит сохраняется песчаная аналогия, установленная в [9].

В случае плиты, образованной коническими сечениями при $\theta = \text{const}$ (фигура), введем замену переменных

$$\rho = R + y, \quad R(\theta - \pi/2) = z, \quad R\varphi = x, \quad R - \text{const} \quad (28)$$

Выражения (28) представим в виде

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\delta}{1 + \delta y}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \delta z, \quad \varphi = \delta x, \quad \delta = \frac{1}{R} \quad (29)$$

Линеаризированные соотношения (1), (2) согласно (3), (29) примут вид: (1) в нулевом приближении сохраняются выражения (7), (8) и решения (9), (10); (2) в первом приближении имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} y - \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} y + 3\tau^0_{xy} &= 0 \\ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} y - \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} y + 2\sigma^0_y - \sigma^0_z - \sigma^0_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} y - \frac{\partial \sigma^0_z}{\partial z} y + 3\tau^0_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

соотношения (12), (13) сохраняются.

Подставляя соотношения (9), (10) в (30), получим

$$\begin{aligned} \partial \sigma'_x / \partial x + \partial \tau'_{xy} / \partial y + \partial \tau'_{xz} / \partial z &= -3\tau_{xy}^0 \\ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} &= by + 2 - \frac{3b}{a} \tau_{xy}^0 \\ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} &= -3bz \end{aligned} \quad (31)$$

Используя тот же прием, что и выше, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} &= -3\tau_{xy}^0, \quad \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} = by + 2 - \frac{3b}{a} \tau_{xy}^0 \\ \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (\sigma'_z + f_3(z)) = -3bz \end{aligned} \quad (32)$$

Из третьего уравнения системы (32) находим

$$\sigma'_z = \sigma'_z + f_3(z) = -\frac{3}{2}bz^2 + f(z, y) \quad (33)$$

С учетом (33) первые два уравнения системы (32) примут вид

$$\begin{aligned} \partial f(x, y) / \partial x + d\tau'_{xz}(z) / dz &= -3\tau_{xy}^0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{d\tau'_{yz}(z)}{dz} &= by + 2 - \frac{3b}{a} \tau_{xy}^0 \end{aligned} \quad (34)$$

Следовательно

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -a_1, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = by - b_1, \quad a_1, b_1 - \text{const} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \tau'_{xz}(z)}{\partial z} = a_1 - 3\tau_{xy}^0, \quad \frac{\partial \tau'_{yz}(z)}{\partial z} = b_1 + 2 - \frac{3b}{a} \tau_{xy}^0 \quad (36)$$

Решая системы (35), (36), находим

$$f(x, y) = -a_1x - b_1y + \frac{b}{2}y^2 + c, \quad c - \text{const} \quad (37)$$

$$\tau'_{xz}(z) = a_1z - 3 \int \tau_{xy}^0 dz + c_1, \quad c_1 - \text{const} \quad (38)$$

$$\tau'_{yz}(z) = b_1z + 2z - \frac{3b}{a} \int \tau_{xy}^0 dz + c_2, \quad c_2 - \text{const}$$

Величина $\tau'_{xy}(z)$ определяется из (13), (10), (38). Из (37), (33), (16) получаем

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= -a_1x - b_1y + \frac{b}{2}y^2 + c - \frac{3b}{2}z^2 - f_3(z) + f_1(z) \\ \sigma'_y &= -a_1x - b_1y + \frac{b}{2}y^2 + c - \frac{3b}{2}z^2 - f_3(z) + f_2(z) \\ \sigma'_z &= -a_1x - b_1y + \frac{b}{2}y^2 + c - \frac{3b}{2}z^2 \end{aligned} \quad (39)$$

Согласно (39), влияние искривления в первом приближении приводит к появлению

слагаемого $by^2/2$, характеризующего отклонение сдвигающего напряжения σ_z от линейной зависимости, определяемой песчаной аналогией [9].

В случае наклонной плиты, образованной сечениями $\varphi = \text{const}$ (фигура), введем замену переменных

$$\rho = R + x, \quad R(\theta - \pi/2) = y, \quad R\varphi = z, \quad R = \text{const} \quad (40)$$

Выражения (40) представим в виде

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\delta}{1 + \delta x}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \delta y, \quad \varphi = \delta z, \quad \delta = \frac{1}{R} \quad (41)$$

Линеаризованные соотношения (1), (2) согласно (3), (41) примут вид: (1) в нулевом приближении сохраняются выражения (7), (8) и решения (9), (10); (2) в первом приближении имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} x - \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} x + 2\sigma_x^0 - \sigma_y^0 - \sigma_z^0 &= 0 \\ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} x - \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} x + 3\tau_{xy}^0 &= 0 \\ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} x - \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} x + 3\tau_{xz}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Соотношения (12), (13) сохраняются.

Подставляя соотношения (9), (10) в (42), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} &= ax + 2 - \frac{3a}{b} \tau_{xy}^0 \\ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} &= -3\tau_{xy}^0 \\ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} &= -3az \end{aligned} \quad (43)$$

Используя тот же прием, что и ранее, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} &= ax + 2 - \frac{3a}{b} \tau_{xy}^0 \\ \frac{\partial \sigma'_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} &= -3\tau_{xy}^0, \quad \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\sigma'_z + f_3(z)) = -3az \end{aligned} \quad (44)$$

Из третьего уравнения системы (44) находим

$$\sigma'_z = \sigma'_z + f_3(z) = -3az^2/2 + f(x, y) \quad (45)$$

С учетом (45) первые два уравнения системы (44) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{d\tau'_{xz}(z)}{dz} &= ax + 2 - \frac{3a}{b} \tau_{xy}^0 \\ \partial f(x, y)/\partial y + d\tau'_{yz}(z)/dz &= -3\tau_{xy}^0 \end{aligned} \quad (46)$$

Следовательно

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = ax - a_1, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -b_1, \quad a_1, b_1 - \text{const} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}^I(z)}{\partial z} = a_1 + 2 - \frac{3a}{b} \tau_{xy}^0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}^I(z)}{\partial z} = b_1 - 3\tau_{xy}^0 \quad (48)$$

Решая системы (47), (48), находим

$$f(x, y) = -a_1 x - b_1 y + \frac{a}{2} x^2 + c, \quad c - \text{const} \quad (49)$$

$$\tau_{xz}^I(z) = a_1 z + 2z - \frac{3a}{b} \int \tau_{xy}^0 dz + c_1, \quad c_1 - \text{const} \quad (50)$$

$$\tau_{yz}^I(z) = b_1 z - 3 \int \tau_{xy}^0 dz + c_2, \quad c_2 - \text{const}$$

Величина $\tau_{xy}^I(z)$ определяется из (13), (10), (50). Из (49), (45), (16) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x^I &= -a_1 x - b_1 y + \frac{a}{2} x^2 + c - \frac{3a}{2} z^2 - f_3(z) + f_1(z) \\ \sigma_y^I &= -a_1 x - b_1 y + \frac{a}{2} x^2 + c - \frac{3a}{2} z^2 - f_3(z) + f_2(z) \\ \sigma_z^I &= -a_1 x - b_1 y + \frac{a}{2} x^2 + c - \frac{3a}{2} z^2 \end{aligned} \quad (51)$$

Согласно (51), влияние искривления в первом приближении приводит к появлению слагаемого $bx^2/2$, характеризующего отклонение сдвигающего напряжения σ_z от линейной зависимости, определяемой песчаной аналогией [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. С. 102–113.
2. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: ИЛ, 1954. 648 с.
3. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
4. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
5. *Ивлев Д.Д.* О пространственном течении идеальнопластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 5–12.
6. *Ивлев Д.Д.* Об обобщении решений Прандтля и Гартмана на случай пространственного состояния идеальнопластических сред // Изв. ИТА ЧР. Чебоксары. 1996–1997. № 3 (4)–2(7). С. 43–54.
7. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384 с.
8. *Ильюшин А.А.* Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 3. С. 265–288.
9. *Ильюшин А.А.* Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 8. С. 693–713.
10. *Григорьев И.П.* Сдавливание круглого в плане пластичного слоя шероховатыми плитами: Препринт. Чебоксары: ЧГПУ, 1998. 23 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
10.12.1999