

УДК 539.3

© 2002 г. И.И. АРГАТОВ

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ
ТВЕРДОГО ТЕЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ НА ПЛОСКУЮ
ПОВЕРХНОСТЬ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ
В НЕСКОЛЬКИХ ТОЧКАХ**

Методом сращиваемых асимптотических разложений исследуется контактная задача линейной теории упругости о давлении на упругое полупространство системы жестко соединенных штампов. Диаметры площадок контакта предполагаются малыми в сравнении с расстояниями между штампами. Допускается отрыв штампов от поверхности основания. Строится математическая модель, учитывающая взаимодействие пятен контакта. Результирующая задача включает уравнения статического равновесия и соотношения совместности перемещений.

Известно, что задача расчета равновесия твердого тела на гладкой горизонтальной поверхности становится статически неопределимой, когда число точек опоры превышает три. Поэтому, чтобы найти распределение реакций связей, приходится прибегать к дополнительному предположению об упругости основания. Простейшая математическая модель (см. [1], §112, разд. 4; [2], гл. 13, упр. 26) оперирует понятием так называемого [3] клавишного основания. В настоящей работе уравнения совместности перемещений твердого тела и упругого основания выводятся методом [4–6] асимптотического анализа контактной задачи теории упругости, постановка которой допускает отрыв контактирующей поверхности тела от основания. Строится асимптотически точная математическая модель, учитывающая взаимодействие пятен контакта.

1. Постановка контактной задачи. Выделим на границе полупространства $\mathbf{R}_+^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : x_3 > 0\}$ точки P^1, \dots, P^N с координатами $(x_1^j, x_2^j, 0)$. Для $j \neq k$ определим $d_{jk} = |P^j - P^k|$ и положим $d = \min d_{jk} (j, k = 1, \dots, N)$.

Пусть ω_j – область на плоскости \mathbf{R}^2 , содержащаяся в круге диаметром d ; ε – малый положительный параметр. Обозначим $\omega_j(\varepsilon)$ область, полученную сжатием ω_j в ε^{-1} раз. Пусть еще $\Gamma(\varepsilon)$ – объединение всех замкнутых областей $\overline{\omega_j(\varepsilon)}$.

Рассмотрим задачу о давлении на упругое полупространство системы жестко соединенных штампов (абсолютно жесткого "стола с ножками"):

$$L(\nabla_x) \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) \equiv -\frac{E}{2(1+\nu)} \nabla_x \nabla_x \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) - \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla_x \nabla_x \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^3 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{31}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) = \sigma_{32}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) = 0, \quad \mathbf{x}' = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad (1.2)$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) = 0, \quad \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma(\varepsilon) \quad (1.3)$$

$$u_3(\varepsilon; \mathbf{x}', 0) \geq \delta_0 - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2, \quad \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) \leq 0$$

$$[u_3(\varepsilon; \mathbf{x}', 0) - \delta_0 + \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2] \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) = 0, \quad \mathbf{x}' \in \omega_j(\varepsilon) \quad (j = 1, \dots, N) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = o(1), \quad |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Здесь $L(\nabla_x)$ – оператор Ламе; E – Модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона; $\sigma_{3i}(\mathbf{u})$ – компоненты тензора напряжений, отвечающего вектору $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ перемещений точек полупространства; δ_0 и β_1, β_2 – заданные поступательное смещение тела и углы его поворота относительно координатных осей O_{x_1}, O_{x_2} .

Трением между поверхностями, вступающими в контакт, пренебрегаем (см. (1.2)). Область контакта заранее неизвестна, что формализуется (см. [7, 8] и др.) краевыми условиями (1.4). Там, где окажется отличным от нуля контактное давление

$$p(\mathbf{u}; \mathbf{x}') \equiv -\sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0), \quad \mathbf{x}' \in \omega_j(\varepsilon) \quad (1.6)$$

и будет, собственно, осуществляться контакт тела и основания.

Введем интегральные характеристики плотности контактных давлений

$$F_3^{\varepsilon j} = \iint_{\omega_j(\varepsilon)} p(\mathbf{u}; y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad \left\{ \begin{matrix} M_1^{\varepsilon j} \\ M_2^{\varepsilon j} \end{matrix} \right\} = \iint_{\omega_j(\varepsilon)} \left\{ \begin{matrix} y_2 - x_2^j \\ -(y_1 - x_1^j) \end{matrix} \right\} p(\mathbf{u}; \mathbf{y}) dy \quad (1.7)$$

Если считать заданными величину Q прижимающей тело к основанию, и ось $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ ее действия, то уравнения статики

$$\sum_{j=1}^N F_3^{\varepsilon j} = Q, \quad \sum_{j=1}^N M_1^{\varepsilon j} + \sum_{j=1}^N x_2^j F_3^{\varepsilon j} = x_2^* Q, \quad \sum_{j=1}^N M_2^{\varepsilon j} - \sum_{j=1}^N x_1^j F_3^{\varepsilon j} = -x_1^* Q \quad (1.8)$$

будут служить для определения характеристик перемещения тела δ_0, β_1 и β_2 , через которые выражается решение задачи (1.1)–(1.5).

Следуя [4, 5], воспользуемся методом сращиваемых разложений (см. [9–11] и др.) для построения главных членов асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения поставленной конструкционно нелинейной [3] задачи (1.1)–(1.5). Названный метод оказался эффективным при исследовании линейной контактной задачи (см. [12], где для системы эллиптических штампов получены явные формулы). Ранее линейная контактная задача для ансамбля взаимодействующих круговых штампов другим методом изучалась в [13–15].

2. Конструкция асимптотического решения. На удалении от $\Gamma(\varepsilon)$ поле перемещений упругого полупространства аппроксимируется внешним асимптотическим представлением

$$\mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) \approx \mathbf{v}(\varepsilon; \mathbf{x}) \quad (2.1)$$

При уменьшении ε зоны контакта стягиваются в точки. Поэтому воздействие штампов на упругое основание в главном моделируется при помощи сосредоточенных сил, т.е.

$$\mathbf{v}(\varepsilon; \mathbf{x}) = R_1^\varepsilon \mathbf{T}(\mathbf{x} - P^1) + \dots + R_N^\varepsilon \mathbf{T}(\mathbf{x} - P^N) \quad (2.2)$$

Здесь \mathbf{T} – решение задачи Буссинеска (см., например, [16]) о действии на границу упругого полупространства единичной сосредоточенной силы, ориентированной вдоль оси Ox_3 :

$$2\pi E(1+\nu)^{-1} T_i(\mathbf{x}) = x_i x_3 |\mathbf{x}|^{-3} - (1-2\nu)x_i |\mathbf{x}|^{-1} (|\mathbf{x}|^{-3} + x_3)^{-1} \quad (i = 1, 2)$$

$$2\pi E(1+\nu)^{-1} T_3(\mathbf{x}) = x_3^2 |\mathbf{x}|^{-3} + 2(1-\nu) |\mathbf{x}|^{-1} \quad (2.3)$$

Вблизи $\Gamma(\varepsilon)$ возникает явление пограничного слоя, для описания которого вводим "растянутые" координаты

$$\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^j), \quad \xi^j = \varepsilon^{-1}(x - P^j) \quad (2.4)$$

Для внутренних асимптотических представлений

$$u(\varepsilon; \varepsilon(x - P^j)) \approx w^j(\varepsilon; \xi^j) \quad (j = 1, \dots, N) \quad (2.5)$$

после замены (2.4) в соотношениях (1.1)–(1.4) имеем:

$$L(\nabla_{\xi})w^j(\varepsilon; \xi) = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}_+^3 \quad (2.6)$$

$$\sigma_{31}(w^j; \xi', 0) = \sigma_{32}(w^j; \xi', 0) = 0, \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2 \quad (2.7)$$

$$\sigma_{33}(w^j; \xi', 0) = 0, \quad \xi' \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\omega}_j \quad (2.8)$$

$$w_3^j(\varepsilon; \xi', 0) \geq \delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j + \varepsilon(-\beta_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2), \quad \sigma_{33}(w^j; \xi', 0) \leq 0$$

$$[w_3^j(\varepsilon; \xi', 0) - \delta_0 + \beta_2 x_1^j - \beta_1 x_2^j - \varepsilon(-\beta_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2)]\sigma_{33}(w^j; \xi', 0) = 0, \quad \xi' \in \omega_j \quad (2.9)$$

Влияние других пятен контакта учитывается при постановке асимптотических условий на бесконечности (при $|\xi| \rightarrow \infty$). Здесь и далее индекс в символе ξ^j для упрощения формул не пишется.

Производя в (1.6) замену координат (2.4) (при учете $\partial/\partial x_i = \varepsilon^{-1}\partial/\partial \xi_i$), согласно (2.5) находим

$$p(u; x') \equiv -\varepsilon^{-1}\sigma_{33}(w^j; \xi', 0), \quad \xi' \in \omega_j \quad (2.10)$$

3. Сращивание асимптотических представлений. В окрестности точки P^j для вектор-функции (2.2) верна формула

$$v(\varepsilon; x) = R_j^{\varepsilon}T(x - P^j) + \sum_{k \neq j} R_k^{\varepsilon}T(P^j - P^k) + O(|x - P^j|) \quad (3.1)$$

Используя (3.1), замыкаем соотношения (2.6)–(2.9) следующим условием:

$$w^j(\varepsilon; \xi) = \varepsilon^{-1}R_j^{\varepsilon}T(\xi) + \sum_{k \neq j} R_k^{\varepsilon}T(P^j - P^k) + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

Решение задачи (2.6)–(2.9), (3.2) назовем в форме

$$w^j(\varepsilon; \xi) = \sum_{k \neq j} R_k^{\varepsilon}T(P^j - P^k) + W^j(\varepsilon; \xi) \quad (3.3)$$

здесь W^j – исчезающая на бесконечности вектор-функция, удовлетворяющая (2.6)–(2.8) и краевому условию (см. (2.3), (2.9)):

$$W_3^j(\varepsilon; \xi', 0) = \delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j - \sum_{k \neq j} \tilde{R}_k^{\varepsilon} d_{ji}^{-1} + \varepsilon(-\beta_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2), \quad \xi' \in \omega_j \quad (3.4)$$

$$\tilde{R}_j^{\varepsilon} = (1 - \nu^2)(\pi E)^{-1} R_j^{\varepsilon} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (3.5)$$

При этом поведение $W^j(\varepsilon; \xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ должно быть согласовано с (3.2), т.е.

$$W^j(\varepsilon; \xi) = \varepsilon^{-1}R_j^{\varepsilon}T(\xi) + O(|\xi|^{-2}) \quad (3.6)$$

Вектор W^j является решением контактной задачи о вдавлении с перекосом в упругое полупространство штампа с плоским основанием (см., например, [13, 17]).

Видно, что правая часть (3.4) изменяется при смене расположения точки P^j относительно фигуры $\omega_j(\epsilon)$. Если ω_j имеет центр симметрии, то с ним разумно связать и начало локальной системы координат. В общей ситуации будем считать, что точка P^j совмещена с так называемым [6] центром давления фигуры $\omega_j(\epsilon)$. При этом коэффициент в (3.6) зависит от правой части так:

$$\tilde{R}_j^\epsilon = \epsilon C_j \left[\delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j - \sum_{k \neq j} \tilde{R}_k^\epsilon d_{jk}^{-1} \right] \quad (3.7)$$

где C_j – поступательная емкость штампа с плоским гладким основанием в форме области ω_j (см. в [13], гл. 2, § 11 электростатическую аналогию). Величина C_j равна (гармонической) емкости множества $\bar{\omega}_j = \{\xi: \xi' \in \omega_j, \xi_3 = 0\}$ (см. [18] и др.).

Подчиним теперь вектор-функцию (3.3) краевым условиям одностороннего контакта (2.9). Благодаря второму неравенству в (2.9), возникает условие

$$R_j^\epsilon \geq 0 \quad (j = 1, \dots, N) \quad (3.8)$$

Рассматривая по отдельности случаи $R_j^\epsilon > 0$ и $R_j^\epsilon = 0$, приходим к соотношениям:

$$\tilde{R}_j^\epsilon > 0 \Rightarrow \tilde{R}_j^\epsilon = \epsilon C_j \left[\delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j - \sum_{k \neq j} \tilde{R}_k^\epsilon d_{jk}^{-1} \right] \quad (3.9)$$

$$\tilde{R}_j^\epsilon = 0 \Rightarrow \delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j - \sum_{k \neq j} \tilde{R}_k^\epsilon d_{jk}^{-1} \leq 0 \quad (3.10)$$

Сопоставляя (2.10) и (3.6), заключаем, что (см. (3.4), (3.7)):

$$F_3^{ej} \approx R_j^\epsilon; \quad R_j^\epsilon = O(\epsilon), \quad M_j^{ej} = O(\epsilon^3) \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

Заметим, что вопрос соблюдения для вектор-функции (3.3) второго неравенства в (2.9) решается положительно [6], если в каждой точке P^j отлична от нуля величина

$$\delta_j = \delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j \quad (j = 1, \dots, N) \quad (3.12)$$

Можно показать (см. [12]), что построенное асимптотическое решение и приближенные решения [13–15], полученные для случая $\beta_1 = \beta_2 = 0$, обладают одинаковой асимптотической точностью.

Подчеркнем, что при решении модельной задачи одностороннего контакта неявно предполагалось, что осуществляются только две крайние ситуации из следующих трех возможных: нет контакта, частичный контакт по некоторой подобласти ω_j , полный контакт. Иными словами, случай касания точки опоры с упругим основанием исключается из рассмотрения.

4. Определение реакций по заданной осадке тела. Введем обозначение $c_j = \epsilon C_j$ для поступательной емкости штампа с основанием $\omega_j(\epsilon)$. Соотношения (3.9), (3.10) перепишем в виде (зависимость искомым величин от параметра ϵ уже не указывается):

$$R_j > 0 \Rightarrow R_j + \sum_{k \neq j} R_k c_j d_{jk}^{-1} = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c_j (\delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j) \quad (4.1)$$

$$R_j = 0 \Rightarrow \sum_{k \neq j} R_k c_j d_{jk}^{-1} \leq \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c_j (\delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j) \quad (4.2)$$

Следуя общей схеме вывода вариационных неравенств (см. [8, 19] и др.), соберем формулы (3.8), (4.1), (4.2) в единую задачу для определения реакций $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_N$.

Умножим равенство (4.1) и неравенство (4.2) на произвольное неотрицательное число \tilde{S}_j ($j = 1, \dots, N$). Просуммировав полученные соотношения, имеем

$$a(\tilde{R}, \tilde{S}) \geq \langle \delta, \tilde{S} \rangle \quad (4.3)$$

Здесь δ – вектор-столбец с компонентами δ_j (определение см. (3.12)); $a(\tilde{R}, \tilde{S}) = \langle C, \tilde{R}, \tilde{S} \rangle$ – непрерывная симметричная билинейная форма на \mathbf{R}^N , C – $N \times N$ -матрица с элементами $C_{jj} = c_j^{-1}$ и $C_{jk} = d_{jk}^{-1}$ при $k \neq j$; скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается скалярное произведение.

Повторяя процедуру с $\tilde{S} = \tilde{R}$, получаем

$$a(\tilde{R}, \tilde{R}) \geq \langle \delta, \tilde{R} \rangle \quad (4.4)$$

Вычитая (4.4) из (4.3), находим

$$a(\tilde{R}, \tilde{S} - \tilde{R}) \geq \langle \delta, \tilde{S} - \tilde{R} \rangle, \quad \forall \tilde{S} \geq 0 \quad (4.5)$$

Итак, соотношения (3.8), (4.1), (4.2) сведены к вариационному неравенству (4.5), которое формулируется как задача определения вектора $\tilde{R} \geq 0$, удовлетворяющего (4.5) при любом векторе \tilde{S} с неотрицательными компонентами.

Предложение 4.1. Для любого достаточно малого параметра ε существует один и только один вектор $\tilde{R} \geq 0$, удовлетворяющий вариационному неравенству (4.5). При этом отображение, которое ставит в соответствие вектору δ вектор \tilde{R} , является непрерывным.

Доказательство. Так как область $\omega_j(\varepsilon)$ покрывается кругом диаметром εd , то верна оценка $c_j \leq \varepsilon \pi^{-1} d$ (см. [18, 13]) и, следовательно, $c_j d_{jk}^{-1} \leq \varepsilon \pi^{-1}$. Поэтому найдется такое значение параметра $\varepsilon_0 > 0$ и постоянная $c_0 > 0$, что соотношение

$$\langle C\tilde{S}, \tilde{S} \rangle \geq c_0 \langle \tilde{S}, \tilde{S} \rangle, \quad \forall \tilde{S} \quad (4.6)$$

соблюдается при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Свойство (4.6) коэрцитивности формы $a(\tilde{R}, \tilde{S})$, согласно теореме Лионса–Стампаккьи (см. [20], §3.1), является достаточным для справедливости сформулированных утверждений.

Замечание 4.1. Положим $C_0 = \max\{C_1, \dots, C_N\}$. Пусть $\|\cdot\|$ – спектральная матричная норма, индуцированная евклидовой векторной нормой. Тогда на основании теоремы 7.4.2 [21] для наименьшего собственного числа λ матрицы C можно получить оценку

$$\lambda \geq \varepsilon^{-1} C_0^{-1} - \|D\| \quad (4.7)$$

где D – $N \times N$ -матрица с элементами $D_{jj} = 0$ и $D_{jk} = d_{jk}^{-1}$ при $k \neq j$. Соответственно, в качестве λ_0 , фигурирующей в (4.6), можно выбрать положительное значение правой части неравенства (4.7) для какого-нибудь $\varepsilon_0 < C_0^{-1} \|D\|^{-1}$. Напомним, что $\|D\| \leq \max_j \sum_{k \neq j} d_{jk}^{-1}$ (данная оценка не зависит от нумерации точек опоры).

Замечание 4.2. Вариационное неравенство (4.5) эквивалентно (см., например, [20], §3.1) задаче минимизации

$$\min\{2^{-1} a(\tilde{R}, \tilde{R}), -\langle \delta, \tilde{R} \rangle\} \quad \forall \tilde{R} \geq 0 \quad (4.8)$$

Сведение задачи (3.8), (4.1), (4.2) к задаче квадратичного программирования (4.8) позволяет для ее численного решения использовать уже готовые алгоритмы (см., например, [22]).

5. Определение реакций и осадки по заданной нагрузке, действующей на тело. Обычно параметры осадки тела δ_0 , β_1 и β_2 , как и реакции основания R_1, \dots, R_N , наперед неизвестны. Для их определения имеем в распоряжении соотношения (3.8), (4.1), (4.2) и уравнения равновесия (см. (1.8), (1.9) и (3.12)):

$$\sum_{j=1}^N R_j = Q, \quad \sum_{j=1}^N x_2^j R_j = x_2^* Q, \quad \sum_{j=1}^N x_1^j R_j = x_1^* Q \quad (5.1)$$

Обозначим P выпуклую оболочку точек $(x_1^1, x_2^1), \dots, (x_1^N, x_2^N)$. Справедливо
Предложение 5.1. Пусть среди точек P^1, \dots, P^N ($N \geq 3$) найдутся три, не лежащие на одной прямой. Тогда, если $Q > 0$ и точка (x_1^*, x_2^*) является внутренней для P , то задача (3.8), (4.1), (4.2), (5.1) при любом достаточно малом значении ε имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть $\mathbf{R}^3 \ni \mathbf{a}$ – вектор с компонентами $a_1 = \delta_0$, $a_2 = -\beta_2$, $a_3 = \beta_1$; X – $3 \times N$ -матрица со столбцами $(1, x_1^j, x_2^j)^t$, t – знак транспонирования. Обозначим через $\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{a})$ решение вариационного неравенства (4.5) и, следуя [6], введем непрерывный оператор $\mathbf{N}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, действующий по формуле $\mathbf{N}(\mathbf{a}) = X\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{a})$. Тогда задача (3.8), (4.1), (4.2), (5.1) эквивалентна решению операторного уравнения

$$\mathbf{N}(\mathbf{a}) = \mathbf{Q}^*, \quad \mathbf{Q}^* = (Q, x_1^* Q, x_2^* Q)^t \quad (5.2)$$

Последнее в свою очередь сводится к задаче о минимуме на \mathbf{R}^3 функционала

$$\Phi(\mathbf{a}; \mathbf{Q}^*) = 2^{-1} \langle \mathbf{N}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{Q}^*, \mathbf{a} \rangle$$

Для любого ненулевого $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ точка $\mathbf{e}_a = \|\mathbf{a}\|^{-1} \mathbf{a}$, где $\|\mathbf{a}\| = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2}$, лежит на единичной сфере S . Используя свойство положительной однородности оператора \mathbf{N} (непосредственно из (4.1), (4.2) вытекает, что $\mathbf{N}(t\mathbf{a}) = t\mathbf{N}(\mathbf{a})$ для $t > 0$), выводим представление

$$\Phi(\mathbf{a}; \mathbf{Q}^*) = 2^{-1} \|\mathbf{a}\|^2 \langle \mathbf{N}(\mathbf{e}_a), \mathbf{e}_a \rangle - \|\mathbf{a}\| \langle \mathbf{Q}^*, \mathbf{e}_a \rangle \quad (5.3)$$

Полагая в (4.5) $S = 0$, приходим к соотношению

$$0 \leq a \langle \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_a), \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_a) \rangle \leq \langle \mathbf{N}(\mathbf{e}_a), \mathbf{e}_a \rangle \quad (5.4)$$

Пусть $K_N = \{\mathbf{e} \in S : \mathbf{N}(\mathbf{e}) = 0\}$ – ядро сужения оператора \mathbf{N} на S . Благодаря (5.4), имеем $K_N = \{\mathbf{e} \in S : \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{e}) = 0\}$. Учитывая теперь неравенство (4.2), находим, что включение $\mathbf{e} \in K_N$ эквивалентно системе неравенств

$$e_1 + e_2 x_1^j + e_3 x_2^j \leq 0 \quad (j = 1, \dots, N) \quad (5.5)$$

Условие (5.5) гарантирует попадание всех точек P^j в одну замкнутую полуплоскость $e_1 + e_2 x_1 + e_3 x_2 \leq 0$, которой принадлежит и многоугольник P . По предположению, P не вырождается в отрезок, и, следовательно, внутренность P целиком лежит в открытой полуплоскости $e_1 + e_2 x_1 + e_3 x_2 < 0$. Поэтому, если $Q > 0$, то $-\langle \mathbf{Q}^*, \mathbf{e} \rangle > 0$ для любого $\mathbf{e} \in K_N$. В силу замкнутости K_N найдется такое открытое множество $O \subset S$, что $O \supset K_N$ и для любого \mathbf{e} из \bar{O} верно неравенство $-\langle \mathbf{Q}^*, \mathbf{e} \rangle \geq c_1 > 0$. Положим

$$\max_{\mathbf{e} \in S} \langle \mathbf{Q}^*, \mathbf{e} \rangle = c_2 > 0, \quad \max_{\mathbf{e} \in S \setminus O} \langle \mathbf{N}(\mathbf{e}), \mathbf{e} \rangle = c_3 > 0$$

Для функционала (5.3) справедливы оценки

$$\Phi(\mathbf{a}; \mathbf{Q}^*) \geq \|\mathbf{a}\| c_1, \quad \forall \|\mathbf{a}\|^{-1} \mathbf{a} \in \tilde{O}$$

$$\Phi(\mathbf{a}; \mathbf{Q}^*) \geq 2^{-1} \|\mathbf{a}\|^2 c_3 - \|\mathbf{a}\| c_2, \quad \forall \|\mathbf{a}\|^{-1} \mathbf{a} \in S \setminus O$$

Покажем, что по каждому $T > 0$ найдется такое $t > 0$ (зависящее только от T), что для любых \mathbf{a} , удовлетворяющих условию $\|\mathbf{a}\| \geq t$, выполняется неравенство $\Phi(\mathbf{a}; \mathbf{Q}^*) \geq T$. Действительно, достаточно выбрать

$$t = \max \left\{ c_1^{-1} T, c_3^{-1} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 + 2Tc_3} \right) \right\}$$

Таким образом, $\Phi(\mathbf{a}; \mathbf{Q}^*) \rightarrow \infty$ при $\|\mathbf{a}\| \rightarrow \infty$, т.е. функционал (5.3) является коэрцитивным. Принимая во внимание его непрерывность, заключаем, что решение уравнения (5.2) существует.

Единственность решения исходной задачи докажем, рассуждая от противного. Напомним, что по вектору \mathbf{a} вектор $\tilde{R}(\mathbf{a})$ восстанавливается однозначно как решение вариационного неравенства (4.5). Пусть $\{R^1, \mathbf{a}^1\}$ и $\{R^2, \mathbf{a}^2\}$ суть два различных решения задачи (3.8), (4.1), (4.2), (5.1). Из (5.1) вытекает равенство

$$X[\tilde{R}(\mathbf{a}^2) - \tilde{R}^1(\mathbf{a}^1)] = 0 \quad (5.6)$$

Полагая $S = \tilde{R}^2$ в неравенстве (5.4), записанном для \tilde{R}^1 и \mathbf{a}^1 , а затем, наоборот, находим

$$a(\tilde{R}^2 - \tilde{R}^1, \tilde{R}^2 - \tilde{R}^1) \leq \langle \mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^1, X(\tilde{R}^2 - \tilde{R}^1) \rangle$$

Отсюда при учете (5.6) получаем $R^2 = R^1 = R$. Из (4.4) выводим $\langle \delta^2 - \delta^1, \tilde{R} \rangle = 0$ или

$$\langle \mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^1, X\tilde{R} \rangle = 0 \quad (5.7)$$

Не умаляя общности рассмотрений, можно считать, что $x_1^* = x_2^* = 0$. Тогда равенство (5.7) дает $a_1^1 = a_1^2$ или $\delta_0^1 = \delta_0^2$. Заметим далее, что точка (x_1^*, x_2^*) , согласно (5.1), является выпуклой комбинацией точек (x_1^j, x_2^j) с $R_j \neq 0$, среди которых обязательно найдутся три, не лежащие на одной прямой. Справедливость последнего утверждения нетрудно показать при малых ε , когда точки, не вступившие в контакт, могут располагаться в полуплоскости $a_1^0 + a_2^0 x_1 + a_3^0 x_2 \leq 0$ или в ее ε -окрестности; (a_1, a_2, a_3^0) – решение задачи (4.5), (5.1) без учета взаимодействия, т.е. с матрицей $C = \text{diag}\{c_1^{-1}, \dots, c_N^{-1}\}$. В таком случае соотношения (4.2) доставляют однородную систему уравнений, ранг которой равен 3, относительно неизвестных $a_1^2 - a_1^1, a_2^2 - a_2^1, a_3^2 - a_3^1$. Отсюда вытекает $\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^2$.

5. Условия полного контакта. Для случая $\varepsilon = 0$ выпишем достаточные условия, при выполнении которых нагрузка, действующая на тело, перераспределяется на все точки опоры. Снабдим точки P^j весами $\kappa_j = \pi E(1 - \nu^2)^{-1} c_j$ и введем обозначения:

$$M = \sum_{j=1}^N \kappa_j, \quad S_1 = \sum_{j=1}^N \kappa_j x_2^j, \quad S_2 = \sum_{j=1}^N \kappa_j x_1^j \quad (6.1)$$

$$I_{11} = \sum_{j=1}^N \kappa_j (x_2^j)^2, \quad I_{22} = \sum_{j=1}^N \kappa_j (x_1^j)^2, \quad I_{12} = \sum_{j=1}^N \kappa_j x_1^j x_2^j \quad (6.2)$$

для общей массы системы точек P^1, \dots, P^N , статических моментов и моментов инерции

относительно координатных осей. Тогда компоненты вектора, служащего решением уравнения (5.2), удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} M & S_2 & S_1 \\ S_2 & I_{22} & I_{12} \\ S_1 & I_{12} & I_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ x_1^* Q \\ x_2^* Q \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Перейдем теперь к системе координат, связанной с главными осями инерции системы "материальных" точек P^1, \dots, P^N . Предполагая, что контактирование происходит по всем точкам, согласно (4.1) и (6.3), находим

$$1 + \frac{x_1^*}{M^{-1}I_2} x_1^j + \frac{x_2^*}{M^{-1}I_1} x_2^j > 0 \quad (j=1, \dots, N) \quad (6.4)$$

где I_1, I_2 – главные моменты инерции.

Пусть все точки P^1, \dots, P^N лежат в замкнутой области

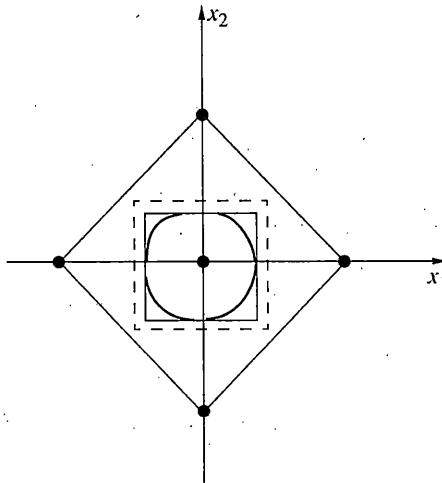
$$\frac{x_1^2}{M^{-1}I_2} + \frac{x_2^2}{M^{-1}I_1} \leq k^2 \quad (6.5)$$

Тогда, если ось действия равнодействующей приложенных к телу сил пересекает плоскость $x_3 = 0$ внутри эллипса $M I_2^{-1} x_1^2 + M I_1^{-1} x_2^2 = k^{-2}$, т.е.

$$\frac{(x_1^*)^2}{M^{-1}I_2} + \frac{(x_2^*)^2}{M^{-1}I_1} < \frac{1}{k^2} \quad (6.6)$$

то тело опирается на все точки опоры.

Пример. Пусть тело опирается на пять точек (см. фиг.), причем емкости одинаковых кругов радиусом a пятен контакта равны $c_0 = 2\pi^{-1}a$. Тогда $M^{-1}I_2 = M^{-1}I_1 = (2/5)d^2$. Так как все точки опоры расположены в круге (6.5) с $k^2 = 5/2$, то круг (6.6)



вписан в квадрат $|x_i| < (2/5)d$ ($i = 1, 2$), который представляет собой решение системы неравенств (6.4). При учете взаимодействия штампов все опоры будут активными, если $|x_i^*| < 2A_\epsilon d$ ($i = 1, 2$), где

$$A_\epsilon = \frac{2(15 + 2\sqrt{2})(1 - \epsilon\pi^{-1})}{10(15 + 2\sqrt{2}) - \epsilon 217\pi^{-1}}, \quad \epsilon = \frac{2a}{d}$$

Заметим, что A_ϵ возрастает при увеличении ϵ и $2A_1 \approx 0.445 < 0.5$.

Свойства решений результирующей задачи при $\varepsilon = 0$ обсуждались в [6]. Основные из них сохраняют силу и в общей ситуации.

7. Нелинейные уравнения совместности перемещений. Пусть в окрестности точки P^j поверхность тела совпадает с участком параболоида

$$x_3 = -\Phi^j(x_1^j, x_2^j), \quad \Phi^j(x_1, x_2) = (2r^j)^{-1}[(x_1 - x_1^j)^2 + (x_2 - x_2^j)^2] \quad (7.1)$$

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.5), в которой краевое условие одностороннего контакта (1.4) заменено таким:

$$u_3(\varepsilon; \mathbf{x}', 0) \geq \delta_0 - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2 - \Phi^j(x_1^j, x_2^j), \quad \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) \leq 0$$

$$[u_3(\varepsilon; \mathbf{x}', 0) - \delta_0 + \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2 + \Phi^j(x_1^j, x_2^j)] \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) = 0, \quad \mathbf{x}' \in \omega_j(\varepsilon) \quad (7.2)$$

Здесь $\omega_j(\varepsilon)$ – область, наверняка охватывающая возможную площадку контакта (например, область, где оказывается положительной правая часть первого неравенства в (7.2)). Радиус кривизны r^j считаем малым в сравнении с d , чтобы выполнялось условие "точечного" контакта.

В первом приближении пренебрегаем взаимодействием пятен контакта. Из теории Герца (см., например, [23], гл. 3, § 2; [17], гл. 5, § 6.5) выводим зависимости

$$R_j = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} \frac{4\sqrt{r^j}}{3\pi} (\delta_j)_+^{3/2} \quad (7.3)$$

$$a_j = \sqrt{r^j} (\delta_j)_+ \quad (7.4)$$

где δ_j – величина (3.11), $(t)_+ = (t + |t|)/2$, a_j – радиус пятна контакта.

Найдем теперь соотношения совместности перемещений в общем случае. Из (7.4) видим, что $a_j = O(\varepsilon d)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если предположить

$$r^j = \varepsilon^2 r^{*j} \quad (7.5)$$

где величина r^{*j} сравнима с d . Чтобы вывести модельную задачу одностороннего контакта для вектора \mathbf{W}^j (см. представление (3.3)), в соотношения (1.1)–(1.3), (7.2) вводим растянутые координаты (2.4). В результате снова приходим к (2.6) и (2.7). Условие отсутствия нагрузки на основание вне возможной области контакта (1.3) и краевое условие одностороннего контакта (7.2) объединяются в одно

$$W_3^j(\varepsilon; \xi', 0) \geq \delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j - \sum_{k \neq j} \tilde{R}_k^\varepsilon d_{jk}^{-1} - F^j(\varepsilon; \xi_1, \xi_2), \quad \sigma_{33}(\mathbf{W}^j; \xi', 0) \leq 0 \quad (7.6)$$

$$[W_3^j(\varepsilon; \xi', 0) - \delta_0 + \beta_2 x_1^j - \beta_1 x_2^j + \sum_{k \neq j} \tilde{R}_k^\varepsilon d_{jk}^{-1} + F^j(\varepsilon; \xi_1, \xi_2)] \sigma_{33}(\mathbf{W}^j; \xi', 0) = 0, \quad \xi' \in \mathbf{R}^2$$

$$F^j(\varepsilon; \xi_1, \xi_2) = (2r^{*j})^{-1}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \varepsilon(-\beta_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2) = (2r^{*j})^{-1}[(\xi_1 + \varepsilon \beta_2 r^{*j})^2 + (\xi_2 + \varepsilon \beta_1 r^{*j})^2] - \varepsilon^2 2^{-1} r^{*j} (\beta_1^2 + \beta_2^2) \quad (7.7)$$

Наконец, вектор \mathbf{W}^j должен удовлетворять асимптотическому условию (3.6).

Приближенное решение задачи (2.6), (2.7), (7.6), (3.6) строим, привлекая вновь аппарат теории Герца. Отбрасывая справа в (7.7) постоянную величину $O(\varepsilon^2)$ и, принимая во внимание (7.3), находим уравнение

$$\tilde{R}_j^{2/3} = m_j \left(\delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j - \sum_{k \neq j} \tilde{R}_k d_{jk}^{-1} \right)_+, \quad m_j = [4\sqrt{r^j} / (3\pi)]^{2/3} \quad (7.8)$$

Заметим, что центр пятна контакта смещается в точку с координатами $\xi_1^{\circ j} = -\varepsilon\beta_2 r^{*j}$ и $\xi_2^{\circ j} = \varepsilon\beta_1 r^{*j}$ или, что то же самое, $x_1^{\circ j} = x_1^j - \beta_2 r^j$ и $x_2^{\circ j} = x_2^j + \beta_1 r^j$. Соответственно для моментов контактных давлений имеем оценку (3.12).

Таким образом, для определения опорных реакций R_1, \dots, R_N (см. обозначение (3.5)) получаем условие неотрицательности (3.8) и согласно (7.8) следующие соотношения:

$$\tilde{R}_j > 0 \Rightarrow \tilde{R}_j^{2/3} + \sum_{k \neq j} \tilde{R}_k m_j d_{jk}^{-1} = m_j (\delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j) \quad (7.9)$$

$$\tilde{R}_j = 0 \Rightarrow \sum_{k \neq j} \tilde{R}_k m_j d_{jk}^{-1} \leq m_j (\delta_0 - \beta_2 x_1^j + \beta_1 x_2^j) \quad (7.10)$$

Разрешимость задачи (3.8), (7.9), (7.10), а также (3.8), (7.9), (7.10), (5.1) автором не исследована.

8. Иерархия моделей. Построенная в п. 5 математическая модель равновесия твердого тела на упругом основании включает модель [1, 2] в качестве частного случая. Отметим, что на соотношениях совместности перемещений (4.1), (4.2) не сказывается вовсе ориентация пятен контакта $\omega_j(\varepsilon)$, а их форма – в известной (см. [13], гл. 2, § 11) степени. Напомним также, что фигурирующая в них – интегральная характеристика $\omega_j(\varepsilon)$ – поступательная емкость c_j имеет размерность длины.

Модель с нелинейными соотношениями совместности перемещений (см. п. 7) уже не допускает предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$, приводящего к модели [1, 2]. Тем не менее, она наделена основным свойством, присущим простейшей модели: если ось действия равнодействующей приложенных к телу нагрузок проецируется в точку (x_1^*, x_2^*) , лежащую вне опорного многоугольника P , то решение задачи не существует. При выходе точки (x_1^*, x_2^*) на границу P происходит утрата устойчивости положения равновесия (неединственность решения).

Обсудим некоторые возможные пути построения иерархической [24] цепочки моделей. Усложнения, которые не приносят существенно нового, связаны с заменой упругого полупространства на упругий слой толщины h , покоящийся на жесткой основе. В частности, необходимо подправить формулу (3.1) (в сумме появится слагаемое с номером $k = j$!). При этом расстояние d_{jk} следует заменить на величину d_{jk}^h , имеющую размерность длины и вычисляемую по формуле

$$\frac{1}{d_{jk}^h} = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} G_3^h(P^k; P^j)$$

где $G^h(P; x)$ – решение задачи о действии на границу слоя в точке P единичной сосредоточенной силы (см., например, [25, 26]). Ясно, что d_{jk}^h зависит только от расстояния между точками P^j и P^k . Это замечание относится и к практически важному случаю упругого основания, представляющего из себя пакет сцепленных друг с другом слоев с различными упругими постоянными.

В приложениях найдет применение решение задачи о равновесии тела на границе упругого четвертьпространства ("у края пропасти"). Соответствующее решение $G^\alpha(P; x)$ обобщенной задачи Буссинеска для упругого пространственного клина с углом раствора α найдено в [27]. Пользуясь теоремой Бетти о взаимности работ нетрудно установить равенство $d_{jk}^\alpha = d_{kj}^\alpha$. При этом величина d_{jk}^α будет зависеть не только от расстояния между точками P^j и P^k , но и от их расстояний до ребра.

Представляет интерес описание свойств математической модели равновесия на упругом основании "стола с ножками различной длины". В соотношениях (3.12), (4.1), (4.2) следует заменить δ_0 на $\delta_0 + \delta_{0j}$, где δ_{0j} – заданные величины ($j = 1, \dots, N$). При этом

определение реакций по заданной осадке тела из вариационного неравенства (4.5) не вызывает затруднений. Тем не менее, для задачи (3.8), (4.1), (4.2), (5.1) предложение 5.1 уже не выполняется. По-видимому, единственность решения, вообще говоря, появится только при достаточно большой величине вдавливающей силы.

Нелинейные соотношения совместности перемещений (7.9), (7.10) полностью сохраняют свой вид, если в окрестности точки контакта поверхности (7.1) твердого тела (локально) придать форму участка эллиптического параболоида.

Существенные осложнения в конструкции асимптотики и результирующей задаче возникнут при построении "моментной" теории равновесия, в которой, наряду с опорными реакциями (см. первую формулу (3.11)), учитываются моменты (1.7) контактных давлений (1.6). В частности, вместо системы уравнений статического равновесия (5.1) следует использовать (1.8)–(1.10). Необходимость в данной модели появляется при изучении устойчивости положения равновесия тела, у которого точки опоры почти лежат на одной прямой.

9. Заключение. Напомним [28, 29], что важнейшим требованием, предъявляемым к математической модели, выступает требование ее адекватности изучаемому явлению. Вопрос применимости полученных формул к реальным объектам (например, автомобильный кран, вывешенный на домкратах) в каждом конкретном случае требует дополнительного рассмотрения. Так, предположение об отсутствии трения ограничивает класс нагрузок, действующих на тело. В окрестности зон контакта может оказаться неверной гипотеза о линейной упругости материала, из которого изготовлено основание. При исследовании длительных процессов равновесия может возникнуть необходимость в использовании реологических определяющих соотношений. Наконец, в прикладных задачах может проявиться деформируемость самой конструкции, относительно которой в работе было принято предположение об абсолютной жесткости.

Заметим, что коэргитивные дискретные (в отличие от континуальных, исследованных в [7, 8, 20, 30]) задачи одностороннего контакта типа (3.8), (4.1), (4.2) для упругих систем изучались в работах по строительной механике [31–34] (см. также [35, 36]).

Построенные асимптотические модели можно рекомендовать для изучения разнородного упругого ненасыщенного контакта шероховатых тел (см., например, [37], [38], разд. 3.4.2).

Автор благодарит С.А. Назарова за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. Статика. Динамика точки. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.
2. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 1. Ч. 2. Кинематика. Принципы механики. Статика. М.: ИЛ, 1952. 326 с.
3. *Филин А.П.* Введение в строительную механику корабля. СПб.: Судостроение, 1993. 640 с.
4. *Назаров С.А.* Асимптотическое решение задачи с малыми препятствиями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 6. С. 1031–1041.
5. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Асимптотическое решение задачи Синьорини с малыми участками свободной границы // Сиб. мат. ж. 1994. Т. 35. № 2. С. 258–277.
6. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Асимптотическое решение задачи об упругом теле, лежащем на нескольких малых опорах // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 110–118.
7. *Фиксера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
8. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
9. *Ван-Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
10. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
11. *Mazja W.G., Nazarov S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Bd. 1. Berlin: Akademie-Verlag. 1991. 432 s.

12. *Аргатов И.И.* Взаимодействие штампов на упругом полупространстве // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 56–63.
13. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
14. *Gladwell G.M.L., Fabrikant V.I.* The interaction between a system of circular punches on an elastic halfspace // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. No. 2. P. 341–344.
15. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
16. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
17. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
18. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
19. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.
20. *Байюкки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988. 448 с.
21. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 269 с.
22. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
23. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270 с.
24. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 1997. 320 с.
25. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402 с.
26. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
27. *Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И.* Обобщение задач Буссинеска и Черрути для случая упругого пространственного клина // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 58–62.
28. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1990. 360 с.
29. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. М.: Наука, Физматлит, 1994. 192 с.
30. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во МГАПИ, 1997. 340 с.
31. *Гордеев В.Н., Перельмутер А.В.* Расчет упругих систем с односторонними связями как задача квадратичного программирования // Исслед. по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1967. Вып. 15. С. 208–212.
32. *Перельмутер А.В.* Использование методов квадратичного программирования для расчета систем с односторонними связями // Исслед. по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1972. Вып. 19. С. 138–147.
33. *Рабинович И.М.* Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. М.: Стройиздат, 1975. 144 с.
34. *Аргатов И.И.* Энергетические теоремы и вариационные принципы механики упругих систем с односторонними связями // Изв. вузов. Строительство. 1998. № 9. С. 15–20.
35. *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
36. *Panagiotopoulos P.D., Talaşlidis D.* A linear analysis approach to the solution of certain classes of variational inequality problems in structural analysis // Intern. J. Solids Structures. 1980. V. 16. No. 11. P. 991–1005.
37. *Демкин Н.Б.* Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
38. *Михин Н.М.* Контакт волнистых и шероховатых тел. Справочник по триботехнике / Под общ. ред. М. Хебды, А.В. Чичинадзе. Т. 1. Теоретические основы. М.: Машиностроение, 1989. С. 106–116.