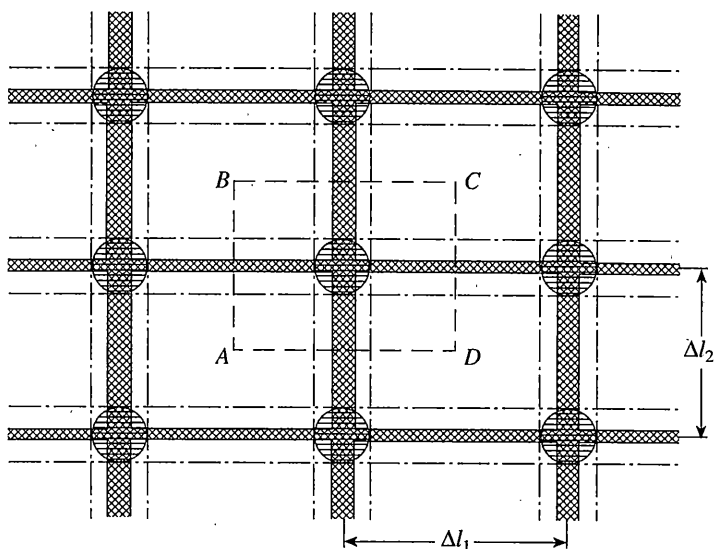


ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИОННОЙ МОДЕЛИ СРЕДЫ КОССЕРА

Попытки ученых-механиков XIX столетия найти обобщение классической модели сплошной среды Коши (А. Cauchy), которое могло бы претендовать на более детальное описание взаимодействий, связей и состояния реальных деформируемых сред, нашли свое первое стройное воплощение в классическом труде Э. и Ф. Коссера в 1909 году [1]. Последовавшие спустя полвека бурные исследования в неклассической механике сплошных сред были направлены на создание и развитие подходов к математическому описанию тел с учетом микроструктуры, включая подход Коссера. В механике деформируемых твердых тел развитие моментных теорий, в том числе исследование сред коссеровского типа, включая псевдоконтинуум Коссера [2–12], было сосредоточено в основном на математических вопросах и, как правило, не затрагивало реальных примеров и соответствующих конкретных приложений модели Коссера (конкретной структуры тел, их массово-инерционных характеристик, структуры приложения силовых и моментных взаимодействий и нагрузок).

В настоящей работе с использованием предложенного А.А. Ильюшиным метода механического (структурного) моделирования [13, 14] показано, что в специальных механических моделях материалов (конструкционного типа) могут быть реально обнаружены и наглядно проиллюстрированы свойства, присущие средам Коссера. Подход к построению таких моделей, представленный в работе на примере твердой деформируемой плоской конструкции специального вида, дает наглядную физическую интерпретацию структуры тел, движений и взаимодействий (в смысле Коссера) и показывает принципиальную технологическую реализуемость конструктивных структурно-неоднородных материалов коссеровского типа. Дано детальное описание модельной конструкции, выявлены ее осредненные свойства как континуума Коссера, построены тензорные характеристики состояния (энергетически сопряженные тензоры деформаций и напряжений), выведены уравнения движения при конечных деформациях в материальном и пространственном представлениях [15], указана общая структура определяющих соотношений. В случае малых деформаций и малых поворотов включений получены определяющие соотношения, в том числе для упругих свойств среды, и выведена система уравнений движения в терминах перемещений и поворотов, выявлены случаи ее гиперболичности. Для произвольных деформаций и поворотов выделены подклассы сред (безмоментная среда, несвязанная среда) и движений, для которых соответствующие начально-краевые задачи существенно упрощаются. Построенная модель и выведенные уравнения согласуются как с общими результатами работы [1], так и с известными уравнениями несимметричной упругости (например, [2–10]), а также с результатами работ [14–18].

1. Описание модели. Рассмотрим плоскую конструкцию, представляющую собой в исходной (недеформированной) конфигурации (фиг. 1), прямоугольную двоякопериодическую (с периодами Δ_1 , Δ_2 вдоль осей Ox_1 , Ox_2 соответственно) стержневую раму с помещенными в ее узлах одинаковыми жесткими массивными дисками, способными вращаться в плоскости рамы вокруг своих осей симметрии, закрепленных

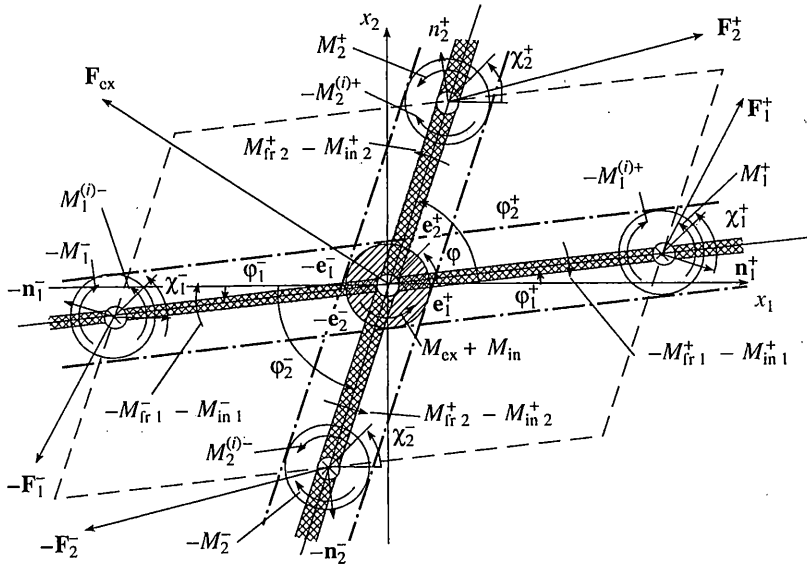


Фиг. 1

в узлах рамы и перпендикулярных ее плоскости. Стержни отдельно каждого из двух направлений рамы будем считать одинаковыми по форме, размерам и материальным свойствам (например, однородными брусками). Материалы стержней каждого из направлений будем предполагать твердыми деформируемыми, например, в частности, упругими однородными. Включенные в конструкцию жесткие диски будем предполагать связанными друг с другом попарно (с ближайшими соседями вдоль осей координат) одинаковыми вдоль каждого направления ременными передачами, обеспечивающими сопротивление относительно повороту охваченных ими соседних дисков. На фиг. 1 штриховой линией около одного узла выделена ячейка – периодически повторяющийся фрагмент конструкции, включающий один из дисков-включений и половины четырех стержней (полустержни) сочленений рамного каркаса.

Рассмотрим плоские движения конструкции, характеризующиеся перемещениями узлов рамного каркаса, изгибом и растяжением стержневых сочленений (совместно с растяжением ременных передач), а также вращением дисков вокруг осей, параллельно перемещающихся вместе с узлами рамы, и сопровождающиеся плоскопараллельной системой силовых и моментных (векторы силовых моментов перпендикулярны к плоскости) внешних воздействий на конструкцию и внутренних взаимодействий ее элементов.

Основные отнесенные к ячейке кинематические и силовые характеристики состояния конструкции при указанных движениях будем считать плавно изменяющимися вдоль координат так, что наименьшая длина участка их монотонного изменения существенно больше характерных размеров ячейки, и для представительного элемента конструкции, содержащего достаточно большое для усреднения количество структурных ячеек, можно принять, что деформация соответствующего представительного элемента рамного каркаса приближенно описывается однородным аффинным преобразованием точек положения узлов этого элемента рамы с периодической на ячейках конфигурацией стержневых элементов, а углы поворотов дисков-включений в представительном элементе конструкции распределены вдоль каждого из направлений приближенно по линейному закону. При этом будем считать, что стержневые сочленения не теряют устойчивости, а ременные передачи не теряют подходящего для зацепления дисков (включений) натяжения.



Фиг. 2

Абстрагируясь от реальной картины деформационной конфигурации стержневых элементов рамы, заменим подобно [14] рассмотрение рамы на рассмотрение фермы и будем входящие в ячейку полустержни рамного каркаса конструкции считать прямолинейными неизгибаемыми, но растяжимыми стержнями, сочлененными в узлах фермы шарнирами, оказывающими сопротивление взаимному угловому сдвигу сопряженных стержневых элементов (полустержней) ячейки. Примыкающие полустержни соседних ячеек будем считать соединенными также некоторыми сопротивляющимися шарнирами с жесткостями того же порядка, что и в узлах фермы. Для наглядности изолированного рассмотрения частей ременных передач, расположенных внутри выделенной ячейки, примем дополнительно, что ременные передачи связывают массивные диски-включения соседних узлов конструкции через невесомые и не оказывающие сопротивления передаточные диски-шкивы того же диаметра, расположенные на границах ячейки, и будем считать углы поворота этих передаточных шкивов равными средним значениям углов поворота связываемых ими включений в соседних узлах (соседних ячейках).

Деформированная конфигурация ячейки в аффинном приближении с действующими на нее силами и моментами, приложенными как извне, так и со стороны соседних ячеек, изображена на фиг. 2. Перемещение узла ячейки обозначим \mathbf{u} . Векторы \mathbf{e}_i , ($i = 1, 2$) – единичные векторы стержневых сочленений в недеформированной конфигурации (естественный ортонормированный базис прямоугольной системы координат Ox_1x_2), векторы \mathbf{e}_i^+ , $-\mathbf{e}_i^-$ – единичные направляющие (в направлении от узла) векторы полустержней ячейки в деформированной конфигурации, \mathbf{n}_i^+ , \mathbf{n}_i^- – единичные нормали к ним соответственно; φ_i^+ , φ_i^- – углы, составляемые векторами \mathbf{e}_i^+ , \mathbf{e}_i^- полустержневой ячейки с неподвижной полуосью Ox_1 , при этом $\gamma^{++} = \frac{\pi}{2} - (\varphi_2^+ - \varphi_1^+)$, $\gamma^{--} = \frac{\pi}{2} - (\varphi_2^- - \varphi_1^-)$, $\gamma^{+-} = \frac{\pi}{2} - (\varphi_2^- - \varphi_1^+)$ и $\gamma^{-+} = \frac{\pi}{2} - (\varphi_2^+ - \varphi_1^-)$ – угловые сдвиги сопряженных в узле полустержневой ячейки (заметим, что $\gamma^{++} + \gamma^{--} - \gamma^{+-} - \gamma^{-+} = 0$, и введем обозначение $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma^{++} + \gamma^{--}) \equiv \frac{1}{2}(\gamma^{+-} + \gamma^{-+})$); $\frac{1}{2}\lambda_i^+ \Delta l_i$, $\frac{1}{2}\lambda_i^- \Delta l_i$ – длины

полустержней в деформированной конфигурации, причем λ_i^+, λ_i^- – кратности их удлинений; φ – угол поворота диска-включения относительно неподвижных осей (оси Ox_1), при этом $\varphi_{1in}^+ = \varphi_1^+ - \varphi$, $\varphi_{1in}^- = \varphi_1^- - \varphi$, $\varphi_{2in}^+ = (\varphi_2^+ - \pi/2) - \varphi$, $\varphi_{2in}^- = (\varphi_2^- - \pi/2) - \varphi$ – углы поворота полустержней ячейки относительно включения; χ_i^+, χ_i^- – углы поворота невесомых передаточных дисков-шківов на границах ячейки относительно оси Ox_1 , причем $\frac{1}{2}\Delta_i^+\varphi = \chi_i^+ - \varphi$, $\frac{1}{2}\Delta_i^-\varphi = \varphi - \chi_i^-$ – относительные углы поворота диска-включения и передаточных дисков (заметим, что в силу сделанного предположения о поворотах χ_i^+, χ_i^- передаточных шківов $\Delta_i^+\varphi$, $\Delta_i^-\varphi$ – углы относительного поворота массивных дисков-включений соседних ячеек i -го направления).

Со стороны соседних ячеек на данную ячейку действуют силы¹ $-F_i^-, F_i^+$ и (изгибающие) моменты $-M_{bi}^-, M_{bi}^+$, приложенные к концам полустержней ячейки, а также моменты $-M_i^-, M_i^+$, приложенные к ременным передачам ячейки через передаточные невесомые шківы ($i = 1, 2$); F_{cx} – внешняя сила, приложенная к центру (узлу) ячейки, M_{cx} – внешний силовой момент, приложенный к включению. Внутренние силовые взаимодействия в ячейке характеризуются силами P_i^+, P_i^- сопротивления полустержней (совместно с ременными передачами) растяжению (сжатию), направленными вдоль векторов e_i^+, e_i^- , моментами $M_{fr_i}^+, M_{fr_i}^-$ взаимодействия сопряженных полустержней каркаса (фермы) на ячейке при сопротивлении взаимным угловым сдвигам (заметим, что в силу уравновешенности такого взаимодействия справедливо равенство $M_{fr_2}^+ + M_{fr_2}^- - M_{fr_1}^+ - M_{fr_1}^- = 0$, и введем обозначение $M_{fr} = \frac{1}{2}(M_{fr_2}^+ + M_{fr_2}^-) \equiv \equiv \frac{1}{2}(M_{fr_1}^+ + M_{fr_1}^-)$), моментами $M_{in_i}^+, M_{in_i}^-$, действующими на диск-включение со стороны полустержней первого и второго направлений, а также моментами $M_i^{(i)+}, M_i^{(i)-}$ взаимодействия диска-включения с невесомыми передаточными шківами через внутренние в ячейке ременные передачи ($i = 1, 2$).

Ввиду предположения о приближенной однородности деформации рамного каркаса (в отношении размещения узлов) и приближенной линейности (вдоль координат) углов поворота включений в представительном элементе конструкции (включающем рассматриваемую ячейку) перечисленные выше кинематические и кинетические (силовые и моментные) характеристики ячейки, отнесенные к полустержням перед узлом и после узла ячейки (помеченные знаками (-) и (+) соответственно), практически неразличимы, т.е. их разности много меньше самих величин; то же справедливо и для приращений углов поворота $\Delta_i^-\varphi, \Delta_i^+\varphi$ и моментов $M_i^{(i)+}, M_i^{(i)-}$, а также M_i^-, M_i^+ .

Введя для всех приближенно совпадающих величин f^-, f^+ их средние на ячейке значения $f = \frac{1}{2}(f^- + f^+)$, получим, что деформированная конфигурация ячейки характеризуется в среднем следующими кинематическими параметрами: перемещением u , векторами e_i, n_i , углами φ_i поворота и кратностями удлинений λ_i стержней i -го направления, сдвигом γ полустержней ячейки, углом φ поворота включения, углами φ_{in} поворотов полустержней относительно включения, приращениями $\Delta\varphi$ угла φ при переходе к соседним ячейкам вдоль i -го направления ($i = 1, 2$), а также следующими силовыми параметрами: $F_i, M_{bi}, M_i, F_{cx}, M_{cx}, P_i, M_{fr}, M_{in_i}, M_i^{(i)}$ (с сохранением вышеуказанного смысла этих величин как средних). Заметим, что в силу приближенной однородности деформации представительного элемента конструкции

¹ Здесь и далее, если не оговорено иное, все силы и моменты считаются погонными вдоль направления, перпендикулярного плоскости конструкции (отнесенными к толщине конструкции, которую будем условно считать постоянной).

приращения углов φ_i поворота стержней при переходе к соседним ячейкам много меньше углового сдвига γ и потому в силу предположения об однопорядковости жесткостей шарниров в узлах и на стыках полустержней соседних ячеек получаем $M_{bi}^+ \ll M_{fi}^\pm$, а также для средних значений $M_{bi} \ll M_{fr}$. Всюду в дальнейшем будем пренебрегать величинами M_{bi}^\pm и M_{bi} по сравнению с M_{fi}^\pm и M_{fr} .

Механические свойства ячейки определяются механическими свойствами ее внутренних элементов и сочленений, приводящими к определенной зависимости скалярных силовых характеристик $P_i^+, P_i^-, M_{fi}^+, M_{fi}^-, M_{ini}^+, M_{ini}^-, M_i^{(i)+}, M_i^{(i)-}$ от предыстории изменения кинематических характеристик ячейки $\lambda_i^+, \lambda_i^-, \gamma^{++}, \gamma^{--}, \gamma^{+-}, \gamma^{-+}, \varphi_{iin}^+, \varphi_{iin}^-, \Delta_i^+ \varphi, \Delta_i^- \varphi$ ($i = 1, 2$), а в среднем – к зависимости семи силовых параметров $P_i, M_{fr}, M_{ini}, M_i^{(i)}$ от предыстории семи кинематических (деформационных) параметров $\lambda_i, \gamma, \varphi_{iin}, \Delta_i \varphi$.

В случае упругих свойств ячейки эти зависимости представляют собой функции от текущих значений кинематических параметров. Например, в рамках линейной балочной теории упругости для стержней постоянного прямоугольного сечения, пренебрегая силами натяжения ремённых передач, в предположении линейно-упругих свойств для шарнирных связей между стержнями и включением, а также для ремённых передач получаем эти функции в виде:

$$P_i = E_i b_i \Delta_i \varepsilon_i, \quad M_{fr} = C_{fr} \gamma, \quad M_{ini} = C_i \varphi_{iin}, \quad M_i^{(i)} = D_i \Delta_i \varphi$$

$$C_{fr} = \left(\frac{2}{E_1 b_1^3 \Delta_1^2} + \frac{2}{E_2 b_2^3 \Delta_2^2} \right) \quad (1.1)$$

где E_i – модуль Юнга материала стержней i -го направления, b_i – отношение их толщины в плане к их длине на ячейке Δ_i , ε_i – относительное удлинение стержня i -го направления на ячейке; C_{fr} – жесткость каркаса на сдвиг; C_i – жесткость пружинного шарнирного крепления диска-включения к стержню i -го направления, D_i – жесткость ремённой передачи i -го направления ($i = 1, 2$; суммирование по i отсутствует).

Заметим, что для тонких упругих стержней применение теории эластик Эйлера [19, 20] позволяет получить вместо первых двух соотношений в (1.1) их уточненные представления, описывающие упругие свойства рамного каркаса не только при малых, но и при конечных значениях сдвига γ и удлинений ε_i .

2. Уравнения динамического равновесия ячейки. Для ячейки в деформированной конфигурации с ее силовыми и кинематическими характеристиками, учитывая внешнюю силу и момент, а также инерционные члены, соответствующие среднему поступательному ускорению ячейки (ускорению узла) и вращательному ускорению массивного диска-включения, отбрасывая M_{bi}^\pm и пренебрегая инерционными членами относительного удлинения и вращения стержневых элементов и ремённых передач, согласно принципу виртуальных работ [21] получим условие динамического равновесия ячейки в виде уравнений (m_c – совокупная масса ячейки, J_{in} – момент инерции диска-включения²):

$$\mathbf{F}_1^+ - \mathbf{F}_1^- + \mathbf{F}_2^+ - \mathbf{F}_2^- + \mathbf{F}_{ex} - m_c \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$M_1^+ - M_1^- + M_2^+ - M_2^- + \frac{1}{2} \Delta_1 \lambda_1^+ \mathbf{F}_1^+ \mathbf{n}_2^+ + \frac{1}{2} \Delta_1 \lambda_1^- \mathbf{F}_1^- \mathbf{n}_2^- -$$

$$- \frac{1}{2} \Delta_2 \lambda_2^+ \mathbf{F}_2^+ \mathbf{n}_1^+ - \frac{1}{2} \Delta_2 \lambda_2^- \mathbf{F}_2^- \mathbf{n}_1^- + M_{ex} - J_{in} \ddot{\phi} = 0 \quad (2.2)$$

² Подобно силам и моментам обе эти константы ячейки считаются погонными вдоль направления, перпендикулярного к плоскости конструкции.

$$\mathbf{F}_1^+ \mathbf{e}_1^+ = P_1^+, \mathbf{F}_1^- \mathbf{e}_1^- = P_1^-, \mathbf{F}_2^+ \mathbf{e}_2^+ = P_2^+, \mathbf{F}_2^- \mathbf{e}_2^- = P_2^-$$

$$\frac{1}{2} \Delta l_1 \lambda_1^+ \mathbf{F}_1^+ \mathbf{n}_2^+ = M_{fr1}^+ + M_{in1}^+, \quad \frac{1}{2} \Delta l_1 \lambda_1^- \mathbf{F}_1^- \mathbf{n}_2^- = M_{fr1}^- + M_{in1}^- \quad (2.3)$$

$$-\frac{1}{2} \Delta l_2 \lambda_2^+ \mathbf{F}_2^+ \mathbf{n}_1^+ = -M_{fr2}^+ + M_{in2}^+, \quad -\frac{1}{2} \Delta l_2 \lambda_2^- \mathbf{F}_2^- \mathbf{n}_1^- = -M_{fr2}^- + M_{in2}^-$$

$$M_1^+ = M_1^{(i)+}, \quad M_1^- = M_1^{(i)-}, \quad M_2^+ = M_2^{(i)+}, \quad M_2^- = M_2^{(i)-} \quad (2.4)$$

Уравнения (2.1), (2.2) суть собственно уравнения движения, а уравнения (2.3), (2.4) задают входящие в (2.1), (2.2) выражения от величин $\mathbf{F}_k^+, \mathbf{F}_k^-, M_k^+, M_k^-$ через определяющие соотношения ячейки.

Используя обозначения $f = \frac{1}{2}(f^- + f^+)$ для средних $\Delta_i f = f^- - f^+$ для приращений величин вдоль i -го направления, получим из (2.1) – (2.4) уравнения

$$\Delta_1 \mathbf{F}_1 + \Delta_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{cx} - m_c \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

$$\Delta_1 M_1 + \Delta_2 M_2 + \Delta l_1 \lambda_1 \mathbf{F}_1 \mathbf{n}_2 - \Delta l_2 \lambda_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{n}_1 + M_{cx} - J_{in} \ddot{\phi} = 0 \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F}_1 \mathbf{e}_1 = P_1, \quad \mathbf{F}_2 \mathbf{e}_2 = P_2$$

$$\Delta l_1 \lambda_1 \mathbf{F}_1 \mathbf{n}_2 = 2(M_{fr} + M_{in1}), \quad -\Delta l_2 \lambda_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{n}_1 = 2(-M_{fr} + M_{in2}) \quad (2.7)$$

$$M_1 = M_1^{(i)}, \quad M_2 = M_2^{(i)} \quad (2.8)$$

а также уравнения для приращений

$$\Delta_1(\mathbf{F}_1 \mathbf{e}_1) = \Delta_1 P_1, \quad \Delta_2(\mathbf{F}_2 \mathbf{e}_2) = \Delta_2 P_2$$

$$\Delta l_1 \Delta_1(\lambda_1 \mathbf{F}_1 \mathbf{n}_2) = 2\Delta_1(M_{fr} + M_{in1}) \quad (2.9)$$

$$-\Delta l_2 \Delta_2(\lambda_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{n}_1) = 2\Delta_2(-M_{fr} + M_{in2}).$$

$$\Delta_1 M_1 = \Delta_1 M_1^{(i)}, \quad \Delta_2 M_2 = \Delta_2 M_2^{(i)} \quad (2.10)$$

Уравнения (2.5), (2.6) суть условия динамического равновесия ячейки, уравнения (2.7), (2.8) служат для выражения входящих в (2.5), (2.6) величин, а уравнения (2.9), (2.10) – приращений этих величин через определяющие соотношения.

В терминах средних значений величин в соответствии с теоремой о кинетической энергии (о живых силах) [21] мощность работы внешних сил на ячейке равна (приведены погонные значения величин)

$$W_{(e)}^p = \dot{K}^p + W_{(i)}^p \quad (2.11)$$

где кинетическая энергия ячейки выражается в виде

$$K^p = \frac{1}{2} m_c |\dot{\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{2} J_{in} \dot{\phi}^2 \quad (2.12)$$

а мощность работы (по преодолению) внутренних сил определяется так

$$W_{(i)}^p = P_1 \Delta l_1 \dot{\lambda}_1 + P_2 \Delta l_2 \dot{\lambda}_2 + 2M_{fr} \dot{\gamma} + 2M_{in1} \dot{\phi}_{in} + 2M_{in2} \dot{\phi}_{in} + M_1^{(i)} \Delta_1 \dot{\phi} + M_2^{(i)} \Delta_2 \dot{\phi} \quad (2.13)$$

Выражение (2.13) показывает энергетически сопряженные пары обобщенных перемещений и обобщенных сил выделенной ячейки.

3. Осредненные континуальные характеристики и уравнения. Сопоставим рассматриваемой плоской конструкции некоторую плоскую модель непрерывной среды типа

матрицы с наполнителем, составленную несущим двумерным континуумом с непрерывно распределенными в его материальных точках элементами-включениями, обладающими степенью свободы вращений (в плоскости континуума), полагая, что поле перемещений \mathbf{u} точек континуума и поле вращений Φ распределенных элементов-включений совпадают с соответствующими характеристиками рассматриваемой конструкции в ее узлах и имеют тот же характер монотонности по пространственным координатам, так что в пределах размеров представительного элемента конструкции эти поля приближенно линейны и деформация почти однородна.

Основной характеристикой деформации элемента континуума (матрицы) служит аффиносор деформации [22]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = (\delta_{ij} + \partial u_i / \partial x_j) \mathbf{e}_{0i} \otimes \mathbf{e}_{0j} \quad (3.1)$$

где \mathbf{I} – единичный (метрический) тензор, $\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$ – оператор-градиент по пространственной переменной \mathbf{x} отсчетной конфигурации, δ_{ij} – символ Кронекера, u_i – декартовы компоненты вектора перемещений \mathbf{u} ; \mathbf{e}_{0k} ($k = 1, 2$) – естественный ортонормированный базис декартовой системы координат Ox_1x_2 (начальный лагранжев базис). Справедливо диадное представление аффиносора (3.1) через векторы лагранжева базиса \mathbf{e}_0^m в отсчетной и \mathbf{e}_m в актуальной конфигурациях:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_0^m \quad (3.2)$$

Деформация представительного элемента (и ячейки) конструкции в принятом приближении полностью описывается формулой (3.2), где векторы $\mathbf{e}_0^m = \mathbf{e}_{0m}$, $\mathbf{e}_m = \lambda_m \mathbf{e}_m$ (не суммировать по повторяющемуся индексу) построены по средним на ячейке значениям величин.

Учитывая очевидные формулы $\mathbf{e}_1 = \cos \varphi_1 \mathbf{e}_{01} + \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{02}$, $\mathbf{e}_2 = \cos \varphi_2 \mathbf{e}_{01} + \sin \varphi_2 \mathbf{e}_{02}$, получаем для разложения $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_{0i} \otimes \mathbf{e}_{0j}$ в диадах начального лагранжева (ортонормированного) базиса компоненты A_{ij} (декартовы компоненты) тензора \mathbf{A} , а также аналогичные компоненты обратного тензора \mathbf{A}^{-1} в виде матриц³:

$$\mathbf{A} \sim \begin{vmatrix} \lambda_1 \cos \varphi_1 & \lambda_2 \cos \varphi_2 \\ \lambda_1 \sin \varphi_1 & \lambda_2 \sin \varphi_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} \sim J^{-1} \begin{vmatrix} \lambda_2 \sin \varphi_2 & -\lambda_2 \cos \varphi_2 \\ -\lambda_1 \sin \varphi_1 & \lambda_1 \cos \varphi_1 \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

где $J = |\det \mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cos \gamma$ – кратность изменения объема при деформации (γ – угловой сдвиг полустержней ячейки).

Из (3.3) получаем в том же базисе компоненты меры деформации Коши $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ и тензора деформаций Коши – Грина $\mathcal{E} = 1/2(\mathbf{C} - \mathbf{I})$:

$$\mathbf{C} \sim \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma \\ \lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma & \lambda_2^2 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{E} \sim \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \lambda_1^2 - 1 & \lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma \\ \lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma & \lambda_2^2 - 1 \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

Компоненты тензора \mathbf{C} суть компоненты метрики деформированной конфигурации среды [22]:

$$C_{ij} = g_{ij} \equiv \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (3.5)$$

Формулы (3.3), (3.4) дают осредненные на ячейке значения соответствующих тензорных полей через дискретные значения деформационных параметров конструкции. Справедливы и обратные формулы, выражающие исходные характеристики

³ Все матрицы компонент тензоров имеют размер 3×3 . Однако для краткости в большинстве случаев будем приводить лишь левый верхний угол такой матрицы, считая, что остальные компоненты известны.

деформации ячейки через компоненты введенных тензоров (а тем самым, в силу (3.1), (3.5), через поле перемещений):

$$\lambda_1 = \sqrt{g_{11}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{g_{22}}, \quad \sin \gamma = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \quad (3.6)$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{A_{11}}{\lambda_1}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{A_{21}}{\lambda_1}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{A_{12}}{\lambda_2}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{A_{22}}{\lambda_2}$$

Имеют место известные формулы связи единичных нормалей \mathbf{n}_0 и \mathbf{n} к материальной площадке в отсчетной и актуальной конфигурациях [22]:

$$\mathbf{n} = \Delta_n^{-1} \mathbf{J} \mathbf{A}^{-1T} \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{n}_0 = \Delta_n \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{n} \quad (3.7)$$

где Δ_n – кратность изменения при деформации площади материальной площадки с нормалью \mathbf{n} в актуальной и \mathbf{n}_0 в отсчетной конфигурациях. В рассматриваемом здесь плоском случае кратности Δ_{n1} и Δ_{n2} равны соответственно $\Delta_1 = \lambda_2$ и $\Delta_2 = \lambda_1$.

Соответствующий (3.3) – (3.6) тензор скоростей дисторсий $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \equiv \nabla_x \mathbf{v}$ ($\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ – скорость частицы среды, $\nabla_x (\cdot)$ – оператор-градиент по пространственной переменной x актуальной конфигурации) имеет в том же диадном базисе ненулевые компоненты

$$D_{11} = \frac{1}{\cos \gamma} [(\ln \lambda_1) \dot{\cos \varphi_1} \sin \varphi_2 - (\ln \lambda_2) \dot{\cos \varphi_2} \sin \varphi_1 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)]$$

$$D_{12} = \frac{1}{\cos \gamma} [-(\ln \lambda_1 - \ln \lambda_2) \dot{\cos \varphi_1} \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_2] \quad (3.8)$$

$$D_{21} = \frac{1}{\cos \gamma} [(\ln \lambda_1 - \ln \lambda_2) \dot{\sin \varphi_1} \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_2]$$

$$D_{22} = \frac{1}{\cos \gamma} [-(\ln \lambda_1) \dot{\sin \varphi_1} \cos \varphi_2 + (\ln \lambda_2) \dot{\sin \varphi_2} \cos \varphi_1 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)]$$

откуда взятием симметричной (sym) и антисимметричной (skw) частей нетрудно получить компоненты тензора скоростей деформаций $\mathbf{V} = \text{sym} \mathbf{D}$ и тензора скоростей вращений (спина) $\mathbf{\Omega} = \text{skw} \mathbf{D}$. Так, в частности, тензор $\mathbf{\Omega}$ имеет ненулевые компоненты

$$\Omega_{21} = -\Omega_{12} = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2} (\ln \lambda_1 - \ln \lambda_2) \text{tg } \gamma \quad (3.9)$$

Материальная тензорная мера скорости деформации \mathcal{E} связана с пространственной мерой \mathbf{V} известной формулой [15, 22]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1T} \dot{\mathcal{E}} \mathbf{A}^{-1} \quad (3.10)$$

Кинематика включений (в континууме и в конструкции) полностью описывается ортогональным тензором \mathbf{Q}_{in} поворота на угол φ и соответствующим тензором скоростей вращений (спином) $\mathbf{\Omega}_{in} = \dot{\mathbf{Q}}_{in} \mathbf{Q}_{in}^T$ с компонентами

$$\mathbf{Q}_{in} \sim \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_{in} \sim \begin{vmatrix} 0 & -\dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

Коаксиальный⁴ к тензору $\mathbf{\Omega}_{in}$ вектор

$$\boldsymbol{\omega} = \text{soax } \mathbf{\Omega}_{in} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_{03} \equiv \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_{03} \quad (3.12)$$

⁴ Вектор $\boldsymbol{\omega}$ и антисимметричный тензор второго ранга $\mathbf{\Omega}$ назовем коаксиальными друг к другу и будем писать $\boldsymbol{\omega} = \text{soax } \mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Omega} = \text{Soax } \boldsymbol{\omega}$, если для всякого вектора \mathbf{z} выполнено равенство $\mathbf{\Omega} \mathbf{z} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}$ (свертка тензора $\mathbf{\Omega}$ с вектором \mathbf{z} равна векторному произведению $\boldsymbol{\omega}$ на \mathbf{z}).

есть не что иное, как вектор мгновенной скорости вращения включений ($\dot{\phi} \equiv \equiv \omega \equiv \Omega_{in21}$ – величина мгновенной скорости вращения, e_{03} – постоянный единичный вектор, ортогональный плоскости конструкции). Его градиент $\nabla_x \omega$ по пространственной переменной x является объективным пространственно ориентированным (левым) тензором [15], чей материальный (правый) аналог, в общем случае выраженный подобно (3.10) формулой

$$\Xi = \mathbf{A}^T \nabla_x \omega \mathbf{A} \quad (3.13)$$

здесь имеет ровно две ненулевые компоненты

$$\Xi_{31} = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \equiv \frac{\Delta_1 \dot{\phi}}{\Delta l_1}, \quad \Xi_{32} = \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \equiv \frac{\Delta_2 \dot{\phi}}{\Delta l_2} \quad (3.14)$$

(в соответствии с принятым приближением производные по лагранжевым координатам представлены в виде разностных отношений).

Кинематика относительного движения стержневого каркаса и включений конструкции (несущей деформируемой среды и распределенных включений, т.е. матрицы и наполнителя) характеризуется относительной скоростью вращения – объективным пространственно ориентированным антисимметричным тензором $\Omega_r = \Omega - \Omega_{in}$ с ненулевыми компонентами

$$\Omega_{r21} = -\Omega_{r12} = \frac{1}{2}(\phi_{1in} + \phi_{2in}) + \frac{1}{2}(\ln \lambda_1 - \ln \lambda_2) \operatorname{tg} \gamma \quad (3.15)$$

а также его материально ориентированным аналогом ${}^0\Omega_r = \mathbf{A}^T \Omega_r \mathbf{A}$ – антисимметричным тензором, имеющим в нашем случае ненулевые компоненты

$${}^0\Omega_{r21} = -{}^0\Omega_{r12} = \lambda_1 \lambda_2 \cos \gamma \Omega_{r21} = J \Omega_{r21} \quad (3.16)$$

Напряженное состояние элемента среды описывается основной формулой теории напряжений

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{S} \mathbf{n} \quad (3.17)$$

где \mathbf{t}_n – вектор напряжения (удельной силы) на площадке с единичной нормалью \mathbf{n} , а \mathbf{S} – тензор напряжений Коши. Распределяя силы, действующие на мысленно выделенные грани ячейки (фиг. 2), равномерно по этим граням, в терминах средних по ячейке величин получим представления для напряжений на площадках с нормальными \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 в деформированной конфигурации:

$$\mathbf{t}_{n_1} = \mathbf{S} \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{\lambda_2 \Delta l_2}, \quad \mathbf{t}_{n_2} = \mathbf{S} \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{F}_2}{\lambda_1 \Delta l_1} \quad (3.18)$$

Наряду с пространственно ориентированным ("истинным") тензором напряжений Коши \mathbf{S} напряженное состояние частицы среды описывают [15, 22] и другие, определенным образом связанные с \mathbf{S} ("условные") тензоры напряжений, в том числе тензоры напряжений Пиолы – Кирхгофа $\mathbf{\Pi}$ первого и \mathbf{P} второго рода, "энергетический" тензор напряжений Ильюшина Σ :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{J} \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1T}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{J} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1T}, \quad \Sigma = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1T} \quad (3.19)$$

Тензоры $\mathbf{\Pi}$, \mathbf{P} , Σ также объективны, причем \mathbf{P} и Σ материально ориентированы, а $\mathbf{\Pi}$ смешанно ориентирован [15].

Так, для тензора Σ имеем $\mathbf{t}_n = \Lambda_n^{-1} \mathbf{J} \mathbf{A} \Sigma \mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}'_0 \Sigma \mathbf{n}_0 = \Lambda_n \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n}'_0 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{t}_n$, откуда, полагая

$\mathbf{n}'_0 = \mathbf{e}_{0i}$, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_{0j}$ и используя формулы (2.7), (3.7), (3.18), получим декартовы компоненты Σ_{ij} этого тензора

$$\Sigma \sim J^{-1} \left\| \begin{array}{cc} \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} \left[\frac{P_1}{\lambda_1 \Delta l_1} - \frac{2(M_{fr} + M_{in1})}{(\lambda_1 \Delta l_1)^2} \operatorname{tg} \gamma \right] & \frac{2(M_{fr} - M_{in2})}{J \Delta l_1 \Delta l_2} \\ \frac{2(M_{fr} + M_{in1})}{J \Delta l_1 \Delta l_2} & \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} \left[\frac{P_2}{\lambda_2 \Delta l_2} - \frac{2(M_{fr} - M_{in2})}{(\lambda_2 \Delta l_2)^2} \operatorname{tg} \gamma \right] \end{array} \right\| \quad (3.20)$$

Формулы (3.19), (3.20) позволяют получить компоненты тензоров $\mathbf{\Pi}$, \mathbf{P} , а также \mathbf{S} . Все эти тензоры вместе с Σ , вообще говоря, несимметричны. Однако заметим, что например, в частном случае отсутствия моментного взаимодействия включения и каркаса ($M_{in1} = M_{in2} = 0$) тензоры Σ , \mathbf{P} и \mathbf{S} (но не $\mathbf{\Pi}$) симметричны. Кстати, в этом случае для квадратной ячейки ($\Delta l_1 = \Delta l_2$) с одинаковыми свойствами вдоль обоих направлений каркаса формулы (3.20) совпадают с аналогичными формулами работы [14].

Аналогично формулам (3.17)–(3.19) для контактных моментных взаимодействий частиц рассматриваемого континуума (моментных взаимодействий соседних ячеек конструкции) имеем

$$\mathbf{m}_n = \mathbf{Mn}, \quad \mathbf{m}_{n_1} = \mathbf{Mn}_1 = \frac{M_1 \mathbf{e}_{03}}{\lambda_2 \Delta l_2}, \quad \mathbf{m}_{n_2} = \mathbf{Mn}_2 = \frac{M_2 \mathbf{e}_{03}}{\lambda_1 \Delta l_1}, \quad \mathcal{M} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{A}^{-1T} \quad (3.21)$$

Первую из формул (3.21) можно рассматривать как основную; \mathbf{m}_n вектор моментного напряжения (удельного моментного воздействия) на площадке с нормалью \mathbf{n} , а \mathbf{M} – тензор моментных напряжений (несимметричный, вообще говоря, тензор второго ранга), который можем назвать тензором Коссера – Коши; вторая и третья формулы выражают распределенность моментных воздействий соседних ячеек (здесь – векторов $M_1 \mathbf{e}_{03}$ и $M_2 \mathbf{e}_{03}$) равномерно по граням данной ячейки; третья формула определяет материальный аналог \mathcal{M} пространственно ориентированного тензора \mathbf{M} (тензор \mathcal{M} можно назвать тензором Коссера – Ильюшина).

Подобно (3.20) получаем из (2.8), (3.7), (3.21) матрицу декартовых компонент тензора \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} \sim J^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_1^{(i)}}{\Delta l_2} & \frac{M_2^{(i)}}{\Delta l_1} & 0 \end{array} \right\| \quad (3.22)$$

Формула (3.22) показывает, что тензор \mathcal{M} (равно как и \mathbf{M}), вообще говоря, несимметричен; в данном случае он имеет ровно две ненулевые компоненты, одноименные ненулевым компонентам в (3.14). Нетрудно, однако, заметить, что при отсутствии моментных взаимодействий соседних ячеек (отсутствии ременных передач) оба этих тензора тождественно нулевые.

Введенные тензоры напряжений и моментных напряжений оказываются существенными для формулировки условий динамического равновесия среды (конструкции), а именно, уравнения (2.5), (2.6) представим в терминах этих тензоров. Действительно, разделив эти уравнения на произведение $\Delta l_1 \Delta l_2$ и используя соотношения (3.3), выражения (3.20), (3.22) для компонент тензоров Σ , \mathcal{M} , а также уравнения (2.9), (2.10) для приращений, после замены разностных отношений соответствующими частными производными приводим (2.5), (2.6) соответственно к уравнениям:

$$\operatorname{Div}_x (J \mathbf{A} \Sigma) + \rho_0 \mathbf{f}_{ex} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

$$\operatorname{Div}_x (J \mathbf{A} \mathcal{M}) + 2J \operatorname{coax} (\mathbf{A} \Sigma \mathbf{A}^T) + \rho_0 \mathbf{g}_{ex} - \rho_0 \dot{\mathbf{j}} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

где $\operatorname{Div}_x(\cdot)$ – оператор дивергенции по пространственной переменной отсчетной

конфигурации, принято обозначение $\text{soaxL} = \text{soax}(\text{skwL})$ для произвольного тензора второго ранга \mathbf{L} ; при этом $\rho_0 = m_c \Delta l_1 \Delta l_2$ – средняя плотность массы ячейки в отсчетной конфигурации (принимается за отсчетную массовую плотность модели среды), $\mathbf{f}_{\text{ex}} = \mathbf{F}_{\text{ex}}/m_c$ – средняя удельная (на единицу массы ячейки) внешняя массовая сила (принимается в качестве плотности массовых сил для модели среды), $\mathbf{g}_{\text{ex}} = M_{\text{ex}} \mathbf{e}_{03}/m_c$ – средний удельный (на единицу массы ячейки) внешний момент (принимаемый для модели среды в качестве плотности массовых моментов), \mathbf{j} – средний удельный (на единицу массы ячейки) тензор моментов инерции включения (принимаемый как тензорная плотность моментов инерции распределенных включений в модели сплошной среды) с компонентами $j_{k3} = j_{3k} = j \delta_{k3}$ (δ_{k3} – символ Кронекера); $j = J_{\text{in}}/m_c$ – средний удельный момент инерции вращения включения вокруг его оси, параллельной оси Ox_3 (остальные компоненты в нашем случае в уравнении (3.24) не участвуют).

Эквивалентные уравнения (3.23), (3.24) их пространственные представления имеют соответственно вид:

$$\text{div}_x \mathbf{S} + \rho \mathbf{f}_{\text{ex}} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

$$\text{div}_x \mathbf{M} + 2 \text{soax} \mathbf{S} + \rho \mathbf{g}_{\text{ex}} - \rho \mathbf{j} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

где $\text{div}_x(\cdot)$ – оператор дивергенции по пространственной переменной актуальной конфигурации, $\rho = \rho_0/J$ – средняя плотность массы ячейки в актуальной конфигурации (принимается в качестве массовой плотности модели среды в актуальной конфигурации).

В терминах введенных здесь величин выражается также формулировка теоремы о кинетической энергии (2.11)–(2.13), и могут быть представлены удельные на единицу объема, например, отсчетной конфигурации величины кинетической энергии K_0 и мощности работы внутренних сил $W_{0(i)}$. Так, разделив по частям уравнения (2.12), (2.13) на величину площади ячейки в плане (в отсчетной конфигурации) после тождественных преобразований с использованием введенных обозначений, а также (3.4), (3.8), (3.9), (3.13)–(3.16), (3.19)–(3.22) получаем

$$K_0 = \frac{1}{2} \rho_0 |\dot{\mathbf{u}}|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{j} \boldsymbol{\omega} \quad (3.27)$$

$$W_{0(i)} = J[\text{sym} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} + \text{skw} \boldsymbol{\Sigma} : {}^0 \boldsymbol{\Omega}_r + \mathcal{M} : \boldsymbol{\Xi}] = J[\text{sym} \mathbf{S} : \mathbf{V} + \text{skw} \mathbf{S} : \boldsymbol{\Omega}_r + \mathbf{M} : \nabla_x \boldsymbol{\omega}] \quad (3.28)$$

Выражения (3.28) показывают, что в материальном представлении тройке тензоров $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, ${}^0 \boldsymbol{\Omega}_r$, $\boldsymbol{\Xi}$, характеризующих скорости деформации частицы среды, энергетически сопряжены тензоры $\text{sym} \boldsymbol{\Sigma}$, $\text{skw} \boldsymbol{\Sigma}$, \mathcal{M} , характеризующие напряженное состояние этой частицы, а в пространственном представлении скоростям деформации \mathbf{V} , $\boldsymbol{\Omega}_r$, $\nabla_x \boldsymbol{\omega}$ энергетически сопряжены тензоры $\text{sym} \mathbf{S}$, $\text{skw} \mathbf{S}$, \mathbf{M} .

Таким образом, кинематика среды, снабженная дополнительной степенью свободы вращения включений, внутренние взаимодействия, характеризуемые дополнительно тензором моментных напряжений (Коссера – Коши или Коссера – Ильюшина), уравнения движения, а также структура энергетической сопряженности динамических и кинематических тензоров показывают, что построенная модель среды есть не что иное, как модель континуума Коссера [1], и исходная конструкция воспроизводит в осредненном смысле свойства этого континуума (как видно и (3.20), (3.22), вообще говоря, анизотропные).

Определяющие соотношения ячейки, в том числе в виде (1.1), в силу представлений (3.20), (3.22) с учетом (3.1), (3.3)–(3.6), (3.8), (3.10)–(3.16) задают определяющие соотношения соответствующей модели среды Коссера: зависимости правых кинетических (динамических, т.е. силовых и моментных) тензоров $\text{sym} \boldsymbol{\Sigma}$, $\text{skw} \boldsymbol{\Sigma}$, \mathcal{M} (содержащих в общем случае $6 + 3 + 9 = 18$, а в плоском случае $3 + 1 + 2 = 6$ независимых компонент) от предыстории правых кинематических тензоров $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, ${}^0 \boldsymbol{\Omega}_r$, $\boldsymbol{\Xi}$ (в общем

случае также $6 + 3 + 9 = 18$, а здесь $3 + 1 + 2 = 6$ независимых компонент). Как показано в [15], это может быть определенным образом представлено в виде зависимостей левых кинетических тензоров $\text{sym}S$, $\text{skw}S$, M от специального вида предысторий (с участием аффинора деформации A) левых кинематических тензоров V , Ω_r и $\nabla_x \omega$ (с теми же количествами независимых компонент). При малых деформациях соответственные левые, правые и смешанные тензоры практически совпадают, и форма определяющих соотношений упрощается.

4. Малые деформации и повороты. В классическом случае малых деформаций (т.е. малых дисторсий и малых перемещений) [22] при дополнительной малости поворотов включений имеем:

$$|\nabla \mathbf{u}| \leq \delta, \quad |\mathbf{Q}_{in} - \mathbf{I}| \leq \delta, \quad \delta \ll 1 \quad (4.1)$$

а также $x \cong \bar{x}$, $\nabla_x(\cdot) \cong \bar{\nabla}_x(\cdot)$, где \mathbf{I} – единичный тензор, \bar{x} и x – места точки среды в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно. Из (4.1) получаем, что с относительной погрешностью δ повороты включений (3.11) характеризуются аддитивным тензором поворотов $\varphi_{in} = \mathbf{Q}_{in} - \mathbf{I}$, в силу малости близким к антисимметричному, равно как и его коаксиальным вектором $\varphi = \text{soax} \varphi_{in}$, а деформации полностью описываются [10] линейным тензором деформаций Коши $\epsilon = \text{sym} \nabla \mathbf{u}$ (вместо \mathcal{E} из (3.5)), тензором относительных поворотов $\varphi_r = \text{skw} \nabla \mathbf{u} - \varphi_{in}$ и тензором кривизны и кручения (градиентом вектора поворота φ по пространственной переменной x) $\zeta = \nabla \varphi$, причем для характеристик скоростей деформаций \mathcal{E} , ${}^0\Omega_r$, Ξ и V , Ω_r , $\nabla_x \omega$ с этой же степенью точности имеем

$$\mathcal{E} \cong V \cong \epsilon, \quad {}^0\Omega_r \cong \Omega_r \cong \varphi_r, \quad \Xi \cong \nabla_x \omega \cong \zeta \quad (4.2)$$

Декартовы компоненты тензоров деформации, выраженные через полевые функции среды \mathbf{u} , φ (в плоском случае равные $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_{01} + u_2 \mathbf{e}_{02}$, $\varphi = \varphi \mathbf{e}_{03}$) и через соответствующие кинематические параметры ячейки базовой конструкции, с той же точностью представляются матрицами

$$\begin{aligned} \epsilon \sim \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2} \gamma \\ \frac{1}{2} \gamma & \epsilon_2 \end{vmatrix} \\ \varphi_r \sim \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{r12} \\ \varphi_{r21} & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \varphi \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) - \varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\varphi_r \\ \varphi_r & 0 \end{vmatrix} \\ \zeta \sim \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{31} & \zeta_{32} & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial \varphi / \partial x_1 & \partial \varphi / \partial x_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta_1 \varphi / \Delta l_1 & \Delta_2 \varphi / \Delta l_2 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\varphi_r = \frac{1}{2}(\varphi_{1in} + \varphi_{2in})$ – средний угол поворота матрицы относительно включений (стержней каркаса относительно диска-включения).

Ввиду малости дисторсий (4.1) все введенные выше тензорные характеристики напряжений пространственного, материального и смешанного типов [15] соответственно совпадают (с той же относительной погрешностью δ), и, вводя для них обозначения σ , μ , подобно (4.2) имеем

$$\sigma = S \cong \Sigma \cong P \cong \Pi, \quad \mu = M \cong \mathcal{M} \quad (4.4)$$

Компоненты тензоров $\text{sym } \sigma$, $\text{skw } \sigma$, μ представляются матрицами

$$\text{sym } \sigma \sim \left\| \begin{array}{cc} \frac{P_1}{\Delta l_2} & \frac{2(M_{fr} + M_{in}^\Delta)}{\Delta l_1 \Delta l_2} \\ \frac{2(M_{fr} + M_{in}^\Delta)}{\Delta l_1 \Delta l_2} & \frac{P_2}{\Delta l_1} \end{array} \right\|, \quad \text{skw } \sigma \sim \left\| \begin{array}{cc} 0 & \frac{2M_{in}}{\Delta l_1 \Delta l_2} \\ \frac{2M_{in}}{\Delta l_1 \Delta l_2} & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\mu \sim \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_1^{(i)}}{\Delta l_2} & \frac{M_2^{(i)}}{\Delta l_1} & 0 \end{array} \right\| \quad (4.5)$$

$$M_{in} = \frac{1}{2}(M_{in1} + M_{in2}), \quad M_{in}^\Delta = \frac{1}{2}(M_{in1} - M_{in2})$$

Определяющие соотношения ячейки базовой конструкции с учетом (3.6), (3.11)–(3.16), (4.3) позволяют выразить компоненты тензоров напряжений (4.4), (4.5) через компоненты тензоров деформаций (4.3). Так, для упругих свойств, представленных формулами (1.1), имеем

$$\text{sym } \sigma \sim \left\| \begin{array}{cc} E_{mat1} \varepsilon_{11} & 2(G_{mat} + G_r) \varepsilon_{12} + 2G_{mix} \varphi_r \\ 2(G_{mat} + G_r) \varepsilon_{21} + 2G_{mix} \varphi_r & E_{mat2} \varepsilon_{22} \end{array} \right\|$$

$$\text{skw } \sigma \sim \left\| \begin{array}{cc} 0 & -2G_r \varphi_r - 2G_{mix} \varepsilon_{12} \\ 2G_r \varphi_r + 2G_{mix} \varepsilon_{21} & 0 \end{array} \right\| \quad (4.6)$$

$$\mu \sim \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ H_1 \zeta_{31} & H_2 \zeta_{32} & 0 \end{array} \right\|$$

где $E_{mat1} = E_1 b_1 \Delta l_1 / \Delta l_2$, $E_{mat2} = E_2 b_2 \Delta l_2 / \Delta l_1$ – модули Юнга среды (осредненные модули стержневой конструкции каркаса базовой конструкции) вдоль осей Ox_1 , Ox_2 соответственно, $G_{mat} = 2C_{fr} / (\Delta l_1 \Delta l_2)$ – модуль сдвига матрицы (несущей среды), обусловленный сопротивлением сдвигу лишь стержней рамного каркаса (рассчитанный без учета наличия включений), $G_r = (C_1 + C_2) / 2 \Delta l_1 \Delta l_2$ – добавочный модуль сдвига (от наличия включений), он же модуль относительных поворотов матрицы и наполнителя (каркаса и включений), назовем его относительным модулем; постоянную $G_{mix} = (C_1 - C_2) / 2 \Delta l_1 \Delta l_2$, перекрестным образом входящую в компоненты тензоров $\text{sym } \sigma$ и $\text{skw } \sigma$, назовем смешанным модулем; $H_1 = D_1 \Delta l_1 / \Delta l_2$ и $H_2 = D_2 \Delta l_2 / \Delta l_1$ – модули моментных напряжений; все модули построены для системы координат $Ox_1 x_2$.

Удельная упругая энергия среды

$$U = \frac{1}{2} E_{mat1} \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} E_{mat2} \varepsilon_{22}^2 + (G_{mat} + G_r)(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{21}^2) + G_{mix}(\varphi_{r21} - \varphi_{r12})(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + G_r(\varphi_{r21}^2 + \varphi_{r12}^2) + \frac{1}{2} H_1 \zeta_{31}^2 + \frac{1}{2} H_2 \zeta_{32}^2 \quad (4.7)$$

положительно определена (при положительных константах упругости в (1.1)). В виде (4.7) она является потенциалом для напряжений (4.6) по отношению к деформациям (4.3):

$$\text{sym } \sigma = \partial U / \partial \varepsilon, \quad \text{skw } \sigma = \partial U / \partial \varphi_r, \quad \mu = \partial U / \partial \zeta \quad (4.8)$$

(то же справедливо отдельно и для одноименных компонент).

Соотношения (4.6)–(4.8) определяют для (1.1), (4.1) анизотропную среду Коссера

с упругими свойствами, характеризуемую в рассматриваемом плоском случае семью константами E_{mat1} , E_{mat2} , G_{mat} , G_r , G_{mix} , H_1 , H_2 . В частном случае, когда $E_{mat1} = E_{mat2}$, $G_{mix} = 0$, $H_1 = H_2$, среда ортотропна.

При малых деформациях и поворотах (4.1) соответственно (4.4) материальные (3.23), (3.24) и пространственные (3.25), (3.26) формы уравнений движения совпадают и принимают известный [1–10] вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_{ex} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\mu} + 2 \operatorname{coax} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}_{ex} - \rho \mathbf{j} \ddot{\varphi} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

В плоском случае тензор \mathbf{j} сводится к скаляру j – массовой плотности момента инерции включений относительно оси Ox_3 , и уравнения (4.9) приводятся к трем уравнениям в компонентах, составляющим систему для неизвестных функций u_1 , u_2 , φ :

$$\begin{aligned} E_{mat1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + [G_{mat} + 2(G_r - G_{mix})] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\ + G_{mat} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + 2(G_r - G_{mix}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \rho f_{ex1} = 0 \\ E_{mat2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + [G_{mat} + 2(G_r + G_{mix})] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\ + G_{mat} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 2(G_r + G_{mix}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \rho f_{ex2} = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$H_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 4G_r \varphi - 2(G_r - G_{mix}) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + 2(G_r + G_{mix}) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \rho g_{ex3} = 0$$

где f_{ex1} , f_{ex2} , g_{ex3} – соответствующие проекции внешних сил \mathbf{f}_{ex} и моментов \mathbf{g}_{ex} .

В общем случае система (4.10) не относится к гиперболическому типу. Однако в частном случае безмоментной ($H_1 = H_2 = 0$) несвязанной ($G_r = G_{mix} = 0$) среды Коссера система гиперболична [23] при $G_{mat} < E_{mat1} E_{mat2} / (E_{mat1} + E_{mat2})$. Этот результат обобщает аналогичный, установленный для случая $E_{mat1} = E_{mat2}$ в работе [14], причем в этом случае уравнения системы (4.10) для u_1 , u_2 в точности совпадают с соответствующими уравнениями работ [14, 16].

5. Частные и специальные случаи при произвольных деформациях и поворотах.

Важный частный случай – безмоментная среда Коссера, для которой по определяющим соотношениям $\mathbf{M} \equiv \mathbf{0}$, т.е. $\mathcal{M} \equiv \mathbf{0}$ (для исходной конструкции в силу второго представления (2.3) это означает $M_1^{(i)} \equiv M_2^{(i)} \equiv 0$ – отсутствие ременных передач). В уравнениях движения для моментов (3.24), (3.26) исчезает первое слагаемое левой части, однако тензор напряжений \mathbf{S} (и $\boldsymbol{\Sigma}$) остается несимметричным, и при решении задач нахождения подлежат оба поля \mathbf{u} и \mathbf{Q}_{in} (при малых деформациях и поворотах – векторы \mathbf{u} и φ). Тем не менее, в статике или в динамике с безынерционными включениями ($\mathbf{j} \equiv \mathbf{0}$) антисимметричная часть тензора напряжений $\operatorname{skw} \mathbf{S}$ (или $\operatorname{skw} \boldsymbol{\Sigma}$) полностью определяется этими уравнениями через заданное поле внешних моментов \mathbf{g}_{ex} (и плотностью ρ , т.е. кратность изменения объема J), что позволяет свести задачу к определению лишь симметричной части напряжений $\operatorname{sym} \mathbf{S}$ (или $\operatorname{sym} \boldsymbol{\Sigma}$) и поля \mathbf{u} (поле вращений затем вычисляется).

Наиболее простой из таких случаев безмоментной среды с безынерционными включениями соответствует нулевому внешнему моменту $\mathbf{g}_{ex} = \mathbf{0}$. Тогда уравнения (3.24), (3.26) сводятся к классическому второму уравнению движения Коши: $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ (т.е. $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^T$), что соответствует равенству $M_{in1} + M_{in2} = 0$, связывающему углы φ_{1in}

и Φ_{2in} , и позволяет выразить эти углы через сдвиг γ , а потому в силу (3.6) выразить их, а также угол ϕ в конечном счете через поле перемещений.

Так, при малых деформациях и поворотах (4.1) для среды (конструкции) с упругими свойствами (1.1) имеем

$$\Phi_{1in} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \gamma, \quad \Phi_{2in} = -\frac{C_1}{C_1 + C_2} \gamma, \quad M_{in}^\Delta = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \gamma, \quad \Phi_r = -\frac{G_{mix}}{G_r} \varepsilon_{12}$$

угол ϕ в силу (4.3) выражается через поле перемещений, и (симметричный) тензор напряжений $\sigma \cong S \cong \Sigma$ имеет компоненты

$$\sigma \sim \left\| \begin{array}{cc} E_{mat1} \varepsilon_{11} & 2 \left(G_{mat} + \frac{G_r^2 - G_{mix}^2}{G_r} \right) \varepsilon_{12} \\ 2 \left(G_{mat} + \frac{G_r^2 - G_{mix}^2}{G_r} \right) \varepsilon_{12} & E_{mat2} \varepsilon_{22} \end{array} \right\| \quad (5.1)$$

Уравнения движения, симметричность тензоров напряжений, а также определяющее соотношение вида (5.1) показывают, что безмоментная среда Коссера в этом случае проявляет себя в точности как классическая сплошная среда (с анизотропными свойствами). В частности, при $E_{mat1} = E_{mat2}$, $G_{mix} = 0$ представление (5.1) совпадает с полученным в [14] с тем лишь отличием, что суммарный модуль сдвига в (5.1) больше на величину G_r ; это означает, что наличие включений, пружинно связанных с каркасом, увеличивает жесткость среды (конструкции) на сдвиг.

Другой важный частный случай – несвязанная среда Коссера, для которой сопротивление относительно вращению включений и каркаса отсутствует: $M_{in1} \equiv M_{in2} \equiv 0$. Тогда в силу (3.20) в качестве определяющего соотношения имеем $skwS = 0$, т.е. $S = S^T$, и в уравнениях (3.24), (3.26) исчезает второе слагаемое левой части. В этом случае, если (симметричный) тензор S (или Σ) не зависит от вращений включений⁵, то в системе (3.23), (3.24) (равно как и в (3.25), (3.26)) первое уравнение становится независимым от второго, а именно: в первом уравнении все члены определяются целиком лишь через поле перемещений u , а члены, зависящие от поля вращений, содержатся только во втором из уравнений. Поэтому при соответствующем разделении граничных условий решение полной краевой задачи для среды может быть проведено последовательно в два этапа: сначала решается задача (как для классической среды) с первым уравнением (3.23) (или (3.25)) и определяется поле перемещений u , а также аффинор A , тензор деформаций \mathcal{E} и (симметричный) тензор напряжений Σ (или S), а затем с учетом найденного поля перемещений отдельно решается задача с уравнением (3.24) (или (3.26)) для определения поля вращений Q_{in} и тензоров $\nabla \omega$ и M (или Ξ и \mathcal{M}).

Более того, замечая, что вторая задача зависит от поля перемещений в основном лишь через геометрию актуальной (неизвестной наперед) конфигурации тела, получаем, что в классическом случае малых деформаций (когда эта конфигурация считается известной), если тензор моментных напряжений $\mu \cong M \cong \mathcal{M}$ не зависит от поля перемещений, то вторая задача (при малых поворотах – задача для ϕ , ζ , μ) становится независимой от первой (для u , ϵ , σ), и их решение можно проводить в любом порядке независимо друг от друга.

Наконец, в специальном случае, когда накладываются кинематические ограничения на относительные повороты Ω_r (или ${}^0\Omega_r$) из (3.15), (3.16), а при малых деформациях и поворотах на тензор ϕ_r (на угол ϕ_r) из (4.3), антисимметричная часть тензора

⁵ В рассматриваемом здесь случае в соответствии с (3.20) симметричный тензор напряжений Σ (или S) определяется только величинами P_1, P_2, M_r и, например, для упругих свойств (1.1) тем самым определяется как в классической среде лишь полем перемещений u (как видно из (4.6) – с константами $E_{mat1}, E_{mat2}, G_{mat}$).

напряжений skwS (а значит, $\text{skw}\Sigma$ и $\text{skw}\omega$) не задается определяющими соотношениями. Так, например, при малых деформациях и поворотах, задавая внутреннюю кинематическую связь в виде $\varphi_r = \mathbf{0}$, получаем модель псевдоконтинуума Коссера [10].

6. Заключение. Таким образом, показано, что исходная модель конструкции (каркас и включения) в осредненном смысле обладает свойствами среды Коссера, чем установлена принципиальная возможность конструктивного моделирования и технологической воспроизводимости твердых деформируемых сред коссеровского типа.

Построенная модель среды обладает анизотропными свойствами, что выводит ее за рамки обычно рассматриваемых в литературе случаев изотропии (см., например, [6, 8–10]). Так, для упругих свойств ее элементов (1.1) она в рассматриваемом плоском случае характеризуется семью константами $E_{\text{mat}1}$, $E_{\text{mat}2}$, G_{mat} , G_r , G_{mix} , H_1 , H_2 . Константы $E_{\text{mat}1}$, $E_{\text{mat}2}$, G_{mat} суть жесткости среды-носителя (матрицы) на растяжение вдоль осей координат и на сдвиг (порождены соответствующими жесткостями рамного каркаса базовой конструкции в (1.1)), константы G_{mix} , G_r отвечают взаимным упругим связям матрицы и включений (стержней каркаса и включений конструкции), константы H_1 , H_2 – жесткости моментных взаимодействий включений в среде (порождены соответствующими жесткостями базовой конструкции D_1 , D_2 из (1.1)). В частном случае, когда $E_{\text{mat}1} = E_{\text{mat}2}$, $G_{\text{mix}} = 0$, $H_1 = H_2$, среда ортотропна; при этом, если она также безмоментна ($H_1 = H_2 = 0$) и несвязанна ($G_r = 0$, а значит и $G_{\text{mix}} = 0$), то определяющие уравнения (4.6) (для σ) и уравнения движения (4.10) (для u_1 , u_2) совпадают с соответствующими уравнениями работ [14, 16]; при этом выведенные условия гиперболичности системы (4.10) согласуются с полученными в [14].

Выведенные уравнения движения (3.23), (3.24) (или (3.25), (3.26)), выражения кинематических тензоров \mathcal{E} , ${}^0\Omega_r$, Ξ (или \mathbf{V} , Ω_r , $\nabla_x \omega$) через поля вектора перемещений \mathbf{u} (или скоростей \mathbf{y}) и тензора вращений \mathbf{Q}_{in} (скоростей вращений ω), а также определяющие соотношения, задающие тензоры напряжений $\text{sym}\Sigma$, $\text{skw}\Sigma$, \mathcal{M} (или symS , skwS , \mathbf{M}) через кинематические параметры, составляют систему уравнений начально-краевой задачи для построенной модели среды – среды Коссера, а присоединение начальных и граничных условий замыкает постановку задачи.

Выделенные для произвольных деформаций и поворотов случаи безмоментной среды и несвязанной среды приводят к существенному упрощению уравнений и соответствующих начально-краевых задач.

Свойства построенной модели среды Коссера детально определяются соответствующими свойствами исходной базовой конструкции. Тем самым, предпринятый здесь подход конструктивного моделирования наглядно проявляет механический смысл характеристик, типичных для континуума Коссера, и демонстрирует детали возможных оценок вклада структурных элементов среды в общую картину механического движения и взаимодействий, а также возможных модификаций в предпринимаемых в научной литературе построениях сред с несимметричными свойствами [16–18, 24–26].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ 97–01–00146).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des corps deformables. Paris: Hermann, 1909. 226 p.
2. *Truesdell C., Toupin R.A.* The classical field theories // Handbuch der physics. Berlin: Springer, 1960. V. 3/1. S. 226–793.
3. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399–1409.
4. *Toupin R.A.* Elastic materials with couple-stresses // Arch. Rat. Mech. Anal. 1962. V. 11. № 5. P. 385–414.

5. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1962. V. 11, № 5. P. 415–448.
6. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
7. Green A.E. Micro-materials and multipolar continuum mechanics // Intern. J. Eng. Sci. 1965. V. 3. № 5. P. 533–537.
8. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 140 с.
9. Ильюшин А.А., Ломакин В.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 54–60.
10. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
11. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 415 с.
12. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 646–751.
13. Ильюшин А.А. Загадки механики деформируемых тел // Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1977. С. 68–73.
14. Бровко Г.Л., Ильюшин А.А. Об одной плоской модели перфорированных плит // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1993. № 2. С. 83–91.
15. Бровко Г.Л. Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 814–824.
16. Мартынова Е.Д. Определение статических и динамических осредненных характеристик периодических упругих каркасов // Упругость и неупругость. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1993. С. 155–162.
17. Green A.E., Naghdi P.M. A unified procedure for construction of theories of deformable media // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 448. № 1934. I. Classical continuum physics. P. 335–356. II. Generalized continua. P. 357–377.
18. Бровко Г.Л. Моделирование неоднородных сред сложной структуры и континуум Коссерра // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1996. № 5. С. 55–63.
19. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
20. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 295 с.
21. Березкин Е.Н. Курс теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 1974. 646 с.
22. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
23. Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Сов. энциклопедия, 1982. 1184 с.
24. Ильюшин А.А. Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошной среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1996. № 5. С. 6–14.
25. Победря Б.Е. Элементы структурной механики деформируемого твердого тела // Математическое моделирование систем и процессов. Пермь: ПГТУ, 1996. № 4. С. 66–74.
26. Ванин Г.А. Градиентная теория упругости // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 1. С. 46–53.

Москва

Поступила в редакцию
29.12.1999