МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2002

УДК 531.383

© 2002 г. А.А. КИРЕЕНКОВ

О ДВИЖЕНИИ ОДНОРОДНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПО ПЛОСКОСТИ В УСЛОВИЯХ КОМБИНИРОВАННОГО ТРЕНИЯ

С помощью переноса системы координат в мгновенный центр скоростей точно проинтегрированы выражения для силы трения и момента сил трения. Построены соответствующие аппроксимации Паде. Установлен новый качественный факт: в момент остановки мгновенный центр скоростей находится в точке окружности диска. При этом скорость скольжения и вращения обращаются в нуль одновременно.

1. Постановка задачи. Движение однородного диска по плоскости при наличии сухого трения – одна из классических моделей теоретической механики. Ее подробному исследованию были посвящены работы многих авторов. Наиболее полное исследование с учетом взаимодействия трения скольжения и трения верчения содержится в [1]. Авторы этой работы проводили изучение проблемы в предположении, равномерного распределения давления пластины на плоскость. Однако специалистам в области теории упругости хорошо известно, что равномерного распределения давления при контакте цилиндрического штампа с плоскостью не бывает [2], даже при отсутствии движения контактирующих тел.

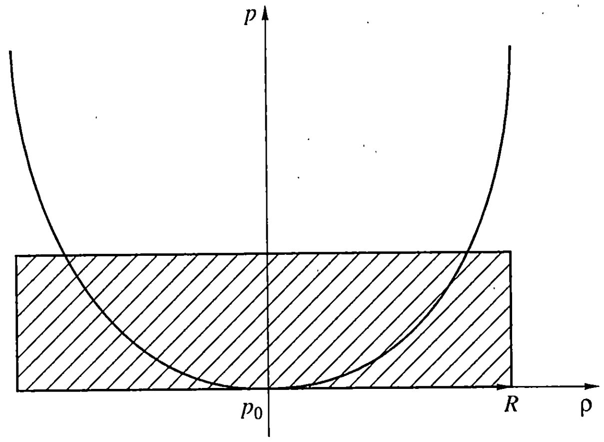
Изучение проблемы при более корректной модели распределения давления диска на плоскость долгое время было затруднено громоздкостью проводимых вычислений. Даже упрощенная постановка задачи [1] приводит к эллиптическим интегралам, для вычисления которых привлекались асимптотические и численные методы. Существенное продвижение стало возможно только после появления работы [3]. Метод исследования движения твердых тел при условиях модели сухого трения Контенсу [4] разработанный в [3] позволяет значительно упростить исследования и приводит к результатам наиболее точно соответствующим экспериментальным данным.

2. Уравнения движения. В предположении, что движение диска складывается из поступательного движения со скоростью V и чистого вращения со скоростью ω, относительная скорости в произвольной точке площадки контакта перпендикулярна радиусу-вектору r, проведенному из мгновенного центра скоростей. Элементарная сила трения $dF = fpdxdy$ противоположна этой скорости и пропорциональна давлению p, оказываемому пластиной на поверхность с коэффициентом пропорциональности, равным коэффициенту сухого трения f.

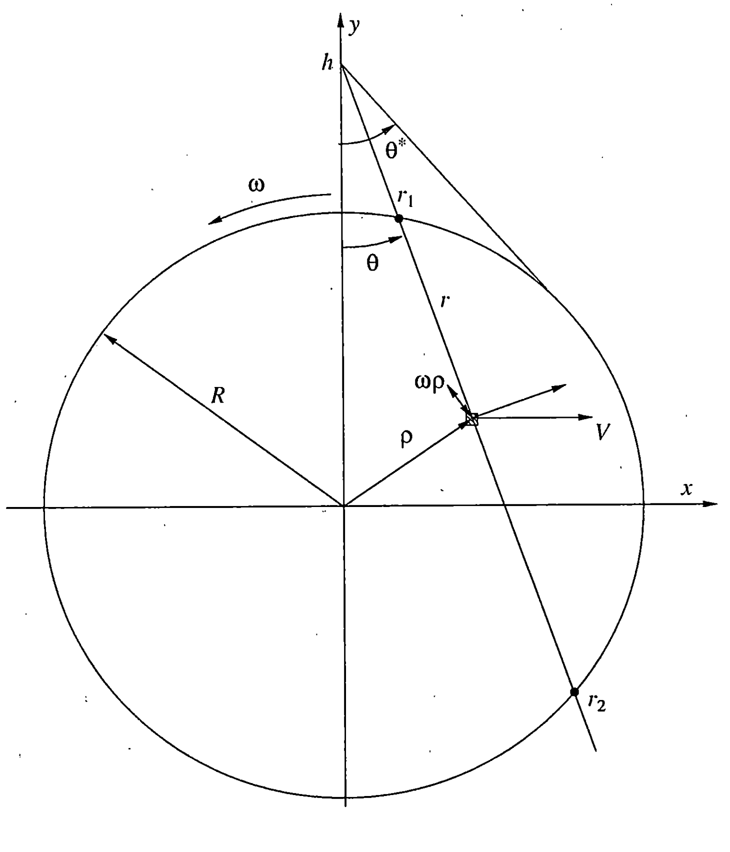
Основываясь на результатах [2], давление p однородного диска на плоскость хорошо аппроксимируется следующим законом

$$p = \frac{p_0}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \tag{2.1}$$

где p_0 – давление в центре диска, R – радиус диска, а ρ – радиус-вектор, с центром в середине площадки контакта (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Интегрируя проекцию элементарной силы dF на ось x по всей площадке контакта, получаем величину силы трения скольжения вдоль оси x:

$$F_{fr} = f\iint p\cos\theta dxdy \tag{2.2}$$

Из соображений симметрии ясно, что интеграл от проекции элементарной силы на ось y равен нулю. Следовательно, (2.2) представляет собой модуль главного вектора сил трения $\mathbf{F}$, действующих в площадке контакта.

В [1] показано, что главный вектор сил трения $\mathbf{F}_{fr}$ направлен вдоль вектора скорости $\mathbf{V}$. Этот факт дает первое уравнение движения

$$m\dot{V} = -F_{fr} \tag{2.3}$$

где $m = \rho_0\pi R^2$ – масса диска, ρ_0 – плотность материала диска.

Условие перпендикулярности момента сил трения M_{fr} относительно центра масс диска к плоскости вращения дает второе уравнение движения

$$J\dot{\omega} = -M_{fr} \tag{2.4}$$

где $J = \rho_0\pi R^4/2$ – центральный момент инерции.

3. Вычисление силы трения. Следуя [3], вычисление силы трения удобно проводить в системе координат с началом в центре мгновенных скоростей (фиг. 2). Связь радиусов-векторов произвольной точки площадки контакта в системах координат с началами в центре площадки контакта и в мгновенном центре скоростей дается соотношением

$$\rho^2 = r^2\sin^2\theta + (h - r\cos\theta)^2 \tag{3.1}$$

в котором параметр h характеризует положение мгновенного центра скоростей.

Введем новые безразмерные параметры $k = h/R$, $q = r/R$, первый из которых $k \leqslant 1$, если мгновенный центр скоростей находится внутри площадки контакта, и $k > 1$, если мгновенный центр скоростей находится вне площадки контакта.

Подстановка (3.1) в (2.2), с учетом введенных обозначений, дает выражения для силы трения

$$F_{fr} = \frac{f\rho_0}{2}\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta\int_{q_1}^{q_2}\frac{qdq}{\sqrt{-(q-k\cos\theta)^2+1-k^2\sin^2\theta}} \quad (k \leqslant 1) \tag{3.2}$$

$$F_{fr} = f\rho_0\int_0^{\theta^*}\cos\theta d\theta\int_{q_1}^{q_2}\frac{qdq}{\sqrt{-(q-k\cos\theta)^2+1-k^2\sin^2\theta}} \quad (k > 1) \tag{3.3}$$

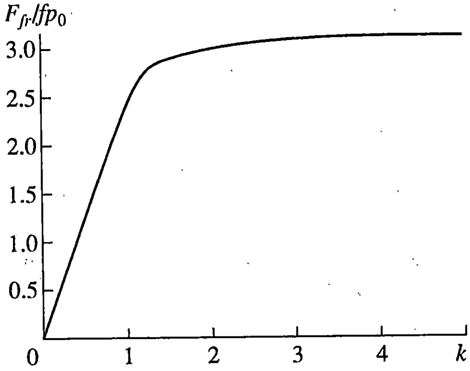
Равенство (3.2) определяет силу трения, когда мгновенный центр скоростей находится внутри, а (3.3) вне площадки контакта. Пределы интегрирования в (3.2) и (3.3) определяются по формулам

$$q_1 = k\cos\theta - \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}, \quad q_2 = k\cos\theta + \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}, \quad \theta^* = \arcsin(1/k)$$

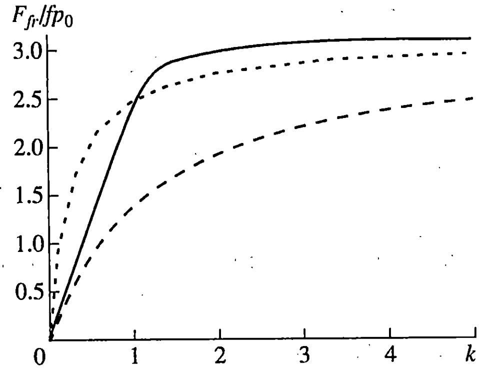
Интегралы (3.2) и (3.3) в отличие от [1] вычисляются в элементарных функциях и дают зависимость силы трения от k:

$$F_{fr} = f\rho_0\begin{cases}\pi^2k/4 & (k \leqslant 1)\\ \dfrac{\pi k}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{k}\right) + \dfrac{\pi}{2k}\sqrt{k^2-1} & (k > 1)\end{cases} \tag{3.4}$$

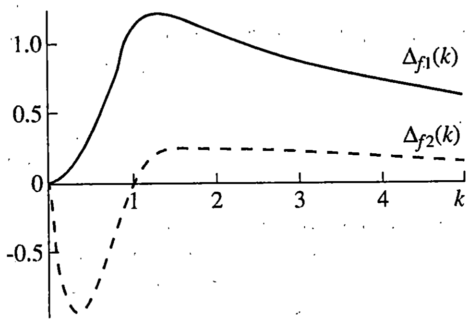
график которой представлен на рисунке (фиг. 3).



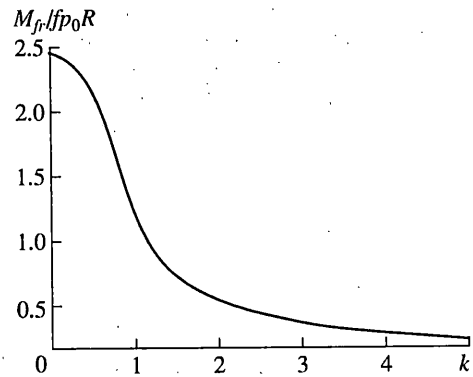
Фиг. 3



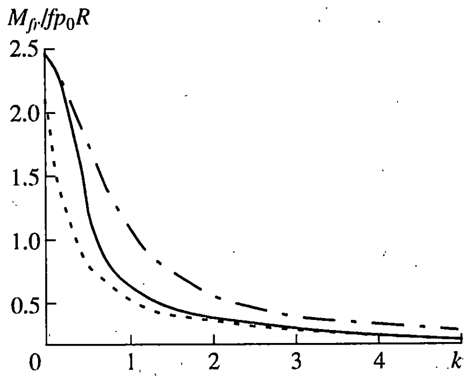
Фиг. 4



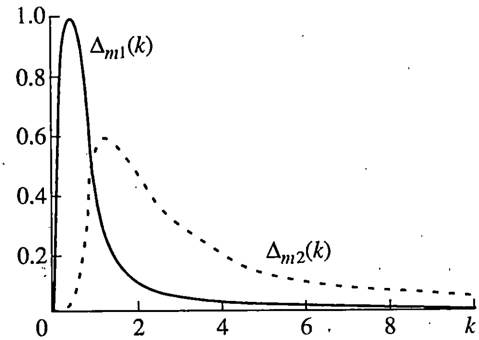
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Левая производная функции (3.4) в точке $k = 1$ совпадает с правой производной в этой же точке. Таким образом, функция $F_{fr}(k)$ непрерывна в точке $k = 1$ вместе со своей первой производной. Ее поведение на бесконечности определяется асимптотикой

$$F_{fr} = \pi f p_0 \left(1 - \frac{1}{6k^2}\right) + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \ (k \to \infty)$$

Для использования закона трения (3.4) при исследовании динамики диска удобно использовать дробно-линейную аппроксимацию Паде [5], сохраняющую в нуле значение функции F_{fr}, ее первой производной и предел на бесконечности.

$$F_{fr} = f p_0 \frac{\pi^2 k}{\pi k + 4} \equiv f p_0 \frac{\pi^2 V}{\pi V + 4R\omega} \tag{3.5}$$

Паде-аппроксимация силы трения (3.5), показанная на фиг. 4 штриховой линией, хорошо описывает поведение функции (3.4) в нуле и на бесконечности, качественно точно передавая ее вид. Зависимость отклонения $\Delta_{f1}(k)$ аппроксимации (3.5) от функции (3.4) представлена на фиг. 4 верхней кривой. Наибольшее отклонение от точной функции наблюдается в окрестности точки $k = 1$. Максимальная погрешность 47%, вычисленная с помощью пакета символьных вычислений maple 6, достигается при $k = 1.15$. Для улучшения аппроксимации в окрестности точки $k = 1$ требуется заменить условие сохранения значения производной функции F_{fr} в нуле на условие сохранения ее значения в точке $k = 1$. Построенная таким образом Паде-аппроксимация (штрихпунктирная линия на фиг. 4) имеет вид

$$F_{fr} = f p_0 \frac{\pi^2 k}{\pi k + 4 - \pi} \equiv f p_0 \frac{\pi^2 V}{\pi V + (4 - \pi) R\omega} \tag{3.6}$$

Паде-аппроксимация (3.6) с высокой степенью точности описывает поведение силы трения при $k \geqslant 1$, но полностью искажает представление о характере движения при $k < 1$. Отклонение $\Delta_{f2}(k)$ приближенной функции от точной иллюстрирует нижняя кривая на фиг. 5. Поэтому ее возможно использовать только имея априорные представления о характере движения.

Дальнейшее уточнение аппроксимации Паде возможно только с помощью повышения ее порядка, которое сделает аналитическое исследование уравнений движения практически невозможным.

4. Вычисление момента сил трения. Главный момент сил трения относительно мгновенного центра скоростей M_{fr}^h дается следующими выражениями

$$M_{fr}^h = \frac{f p_0 R}{2} \int_0^{\pi} d\theta \int_{q_1}^{q_2} \frac{q^2 dq}{\sqrt{-(q - k\cos\theta)^2 + 1 - k^2 \sin^2\theta}} \ (k \leqslant 1) \tag{4.1}$$

$$M_{fr}^h = f p_0 R \int_0^{\theta^*} d\theta \int_{q_1}^{q_2} \frac{q^2 dq}{\sqrt{-(q - k\cos\theta)^2 + 1 - k^2 \sin^2\theta}} \ (k > 1) \tag{4.2}$$

Равенство (4.1) соответствует случаю, когда мгновенный центр скоростей находится внутри, а (4.2) вне площадки контакта.

Интегралы (4.1) и (4.2) также вычисляются в элементарных функциях и дают зависимость главного момента сил трения относительно мгновенного центра скоростей от k:

$$M_{fr}^h = f p_0 R \begin{cases} \pi^2 / 8(2 + k^2) \ (k \leqslant 1) \\ \dfrac{\pi}{4}(2 + k^2)\arcsin\left(\dfrac{1}{k}\right) + \dfrac{3\pi}{4}\sqrt{k^2 - 1} \ \ (k > 1) \end{cases} \tag{4.3}$$

Связь главных моментов сил трения относительно мгновенного центра скоростей M_{fr}^h и центра масс M_{fr} определяется так:

$$M_{fr} = M_{fr}^h - hF_{fr} \tag{4.4}$$

Подстановка в (4.4) выражений для момента сил трения относительно мгновенного центра скоростей (4.3) и силы трения (3.4) дает

$$M_{fr} = fp_0R\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{8}(2-k^2)\ (k\leqslant 1)\\ \dfrac{\pi}{4}(2-k^2)\arcsin\left(\dfrac{1}{k}\right)+\dfrac{\pi}{4}\sqrt{k^2-1}\ \ (k>1)\end{cases} \tag{4.5}$$

График функции $M_{fr}(k)$ представлен на фиг. 6. Функция (4.5), как и функция (3.4), непрерывно дифференцируема в точке $k = 1$. Ее поведение на бесконечности определяется асимптотикой

$$M_{fr} = \frac{\pi f p_0 R}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\ \ (k\to\infty)$$

Дробно-линейная апроксимация Паде, сохраняющая значение в нуле и поведение на бесконечности главного момента сил трения, имеет вид

$$M_{fr} = \frac{\pi^2 fp_0R}{3\pi k+4} \equiv \frac{\pi^2 fp_0R^2\omega}{3\pi V+4R\omega} \tag{4.6}$$

Аппроксимация Паде момента сил трения (4.6) (штриховая линия на фиг. 7), качественно правильно описывает поведение функции M_{fr} на всей области определения, за исключением малой окрестности нуля. Количественное соответствие, с высокой степенью точности наблюдается в нуле и при $k > 1$. Максимальная погрешность 0.4 имеет место при $k = 1$. График отклонения $\Delta_{m1}(k)$ аппроксимации Паде (4.6) от точной зависимости (4.5) представлен на фиг. 8 сплошной линией.

Правильное описание поведения в нуле функции (4.5) дает только квадратичная аппроксимация Паде (штрих-пунктирная линия на фиг. 7):

$$M_{fr} = \frac{\pi^2 fp_0R(2k+3\pi)}{6\pi k^2+8k+12\pi}$$

Найденные выражения для силы трения скольжения (3.4) и момента трения вращения (4.5) показывают, что при любой отличной от нуля угловой скорости вращения ω трение скольжения F_{fr} и трение вращения M_{fr} ведут себя как вязкое трение в окрестности малых скоростей скольжения. Кроме того, функции (3.4) и (4.5) не имеют предела в точке $\omega = V = 0$.

5. Исследование уравнений движения. Выражения для силы трения (3.4) и главного момента сил трения (4.5) дают точные уравнения движения вращающегося однородного диска по плоскости.

Для случая, когда мгновенный центр скоростей находится внутри окружности диска $V \leqslant \omega R$ они имеют вид

$$\dot V = -\frac{\pi f p_0}{4\rho_0 R^3}\frac{V}{\omega},\quad \dot\omega = -\frac{\pi f p_0}{4\rho_0 R^3}\frac{\omega^2R^2-V^2}{\omega^2R^2} \tag{5.1}$$

а для случая, когда мгновенный центр скоростей находится вне окружности диска $V > \omega R$

$$\dot{V} = -\frac{f p_0}{2\rho_0 R^2}\left(\frac{V}{\omega R}\arcsin\left(\frac{\omega R}{V}\right) + \frac{\sqrt{V^2 - \omega^2 R^2}}{V}\right) \tag{5.2}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{f p_0}{2\rho_0 R^3}\left(\frac{2\omega^2 R^2 - V^2}{\omega^2 R^2}\arcsin\left(\frac{\omega R}{V}\right) + \frac{\sqrt{V^2 - \omega^2 R^2}}{\omega R}\right)$$

Исследование траекторий систем (5.1) и (5.2) эквивалентно исследованию интегральных кривых уравнений, получающихся делением первого уравнения каждой системы на второе

$$\frac{dV}{d\omega} = R\frac{k}{2-k^2} \equiv R\Phi_1(k) \quad (k \leqslant 1) \tag{5.3}$$

$$\frac{dV}{d\omega} = R\frac{k\arcsin\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}\sqrt{k^2-1}}{(2-k^2)\arcsin\left(\frac{1}{k}\right) + \sqrt{k^2-1}} \equiv R\Phi_2(k) \quad (k > 1)$$

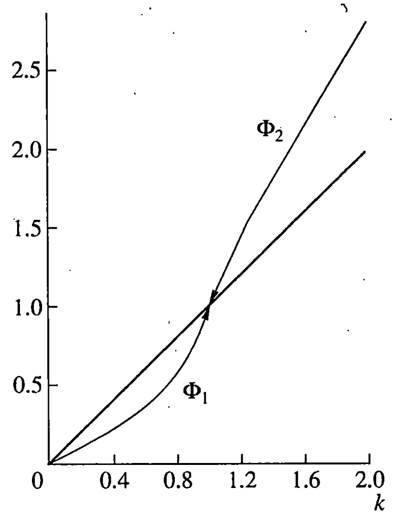
Уравнение касательной к некоторой траектории системы (5.3) имеет вид $V/\omega = Rk$, в котором k должно удовлетворять системе уравнений:

$$\Phi_1(k) = k \quad (k \leqslant 1), \quad \Phi_2(k) = k \quad (k > 1) \tag{5.4}$$

Первое уравнение системы (5.4) имеет единственное решение $k = 1$, а второе решений не имеет (фиг. 9). Непосредственно перед остановкой выполняется условие

$$h = V/\omega = R$$

т.е. мгновенный центр скоростей перед остановкой находится в точке окружности диска.



Фиг. 9

Таким образом, получен новый качественный эффект: мгновенный центр в момент остановки отстоит от центра диска на расстояние равное радиусу. Ранее считалось [1], что мгновенный центр скоростей находится на расстоянии $0.71R$ от центра диска. Оказалось, что более сложная модель, но лучше соответствующая реальному распределению давления, приводит к более простым уравнениям движения и более точным результатам.

При исследовании динамики диска с высокой степенью точности можно использовать аппроксимации Паде (3.4) и (4.5). Соответствующие уравнения имеют вид

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{V}{\pi V + 4U}, \quad U = R\omega \tag{5.5}$$

$$\frac{dU}{d\tau} = -\frac{2U}{3\pi V + 4U}, \quad \tau = \frac{\pi f p_0}{\rho_0 R^2} t$$

Интегральные кривые системы (5.5) определяются из решения однородного уравнения

$$\frac{dV}{dU} = \frac{V(3\pi V + 4U)}{2U(\pi V + 4U)} \tag{5.6}$$

которое интегрируется в квадратурах. Решение (5.6), представленное на фиг. 9 имеет вид

$$\sqrt{\frac{U^3}{V}} = C \exp\left(-\frac{2U}{\pi V}\right), \quad C \equiv \mathrm{Const}$$

Точно такие же интегральные кривые имеет следующая система с аналитической правой частью

$$dU/d\beta = -2U(\pi V + 4U), \quad dV/d\beta = -V(3\pi V + 4U) \tag{5.7}$$

для которой все кривые достигают положения равновесия $U = V = 0$ за бесконечное время в переменной β. Связь независимых переменных β и τ дается уравнением

$$\tau = \int_0^\beta (3\pi V + 4U)(\pi V + 4U)d\beta \tag{5.8}$$

У системы (5.7) имеется частное решение $U = U(1)/\beta$, $V = V(1)/\beta$. Таков же характер поведения при $\beta \to \infty$ и всех других решений этой системы $U \sim 1/\beta$, $V \sim 1/\beta$. Отсюда следует, что при $\beta \to \infty$ интеграл (5.8) сходится. Это означает, что все интегральные кривые системы (5.5) в плоскости (U, V) приходят в точку $U = V = 0$ за конечное время. Следовательно, скорость скольжения V и скорость вращения $\omega = U/R$ одновременно обращаются в нуль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л.* О движении плоских тел при наличии сухого трения // Изв. РАН. МТТ. 1981. № 4. С. 17–28.
2. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
3. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
4. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // В кн.: Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
5. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1988. 502 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.12.2000