

УДК 531.381

© 2002 г. Ю.М. ЗАБОЛОТНОВ, В.В. ЛЮБИМОВ

**ВТОРИЧНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВРАЩЕНИИ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ**

Рассматривается задача о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в окрестности статически устойчивого положения равновесия под действием нелинейного восстанавливающего момента и возмущающего момента, вектор которого неподвижен в связанной с телом системе координат. Твердое тело имеет малое смещение центра масс относительно оси динамической симметрии. При аппроксимации нелинейного восстанавливающего момента полиномом третьей степени по углу нутации методом усреднения установлены резонансы, возникающие в данной задаче. Определение второго приближения метода усреднения позволило проанализировать полную картину возможных движений и установить наличие вторичных резонансных эффектов [1], определяющих эволюцию системы на нерезонансных участках движения твердого тела. Приводятся численные примеры наиболее характерных случаев движения твердого тела в данной задаче.

1. Исследуется влияние резонансов на движение твердого тела вокруг неподвижной точки в случае близком к классическому случаю Лагранжа. Движение рассматривается в окрестности статически устойчивого положения равновесия твердого тела (статически устойчивый волчок). При исследовании резонансных движений твердого тела используются квазилинейные уравнения, когда восстанавливающий момент аппроксимируется нечетной функцией по углу нутации в виде полинома третьей степени. Для получения системы квазилинейных уравнений движения выражения, определяющие изменение вектора кинетического момента твердого тела, проектируются на оси неподвижной ( $OX_1Y_1Z_1$ ) и связанной ( $OXYZ$ ) систем координат (фиг. 1) и имеют вид:

$$dK_{x1}/dt = M_{x1} \tag{1.1}$$

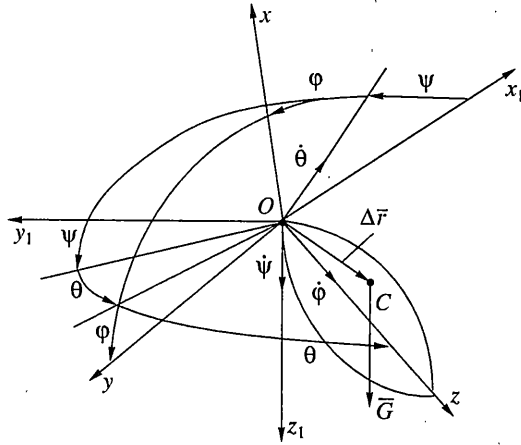
$$dK_{y1} / dt = M_{y1} \tag{1.2}$$

$$dK_z / dt + \omega_x K_y - \omega_y K_x = M_z \tag{1.3}$$

где  $K_{x1}, K_{y1}, K_{z1}, K_x, K_y, K_z$  и  $M_{x1}, M_{y1}, M_z$  – проекции вектора кинетического момента и вектора момента внешних сил на соответствующие оси,  $\omega_x, \omega_y$  – угловые скорости вращения связанной с телом системы координат.

В случае динамически симметричного твердого тела, когда для моментов инерции справедливы соотношения  $I_x = I_y = I, I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ , проекции вектора кинетического момента имеют вид

$$\begin{aligned} K_x &= I\omega_x, \quad K_y = I\omega_y, \quad K_z = I_z\omega_z \\ K_{x1} &= I_{x1}\omega_{x1} - I_{x1y1}\omega_{y1} - I_{x1z1}\omega_{z1} \\ K_{y1} &= -I_{x1y1}\omega_{x1} + I_{y1}\omega_{y1} - I_{y1z1}\omega_{z1} \end{aligned} \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Здесь моменты инерции  $I_{x1}, I_{y1}, I_{x1y1}, I_{x1z1}, I_{y1z1}$  и угловые скорости  $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$  твердого тела в неподвижной системе координат определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 I_{x1} &= I(\cos^2 \psi + \cos^2 \theta \sin^2 \psi) + I_z \sin^2 \theta \sin^2 \psi \\
 I_{y1} &= I(\sin^2 \psi + \cos^2 \theta \cos^2 \psi) + I_z \sin^2 \theta \cos^2 \psi \\
 I_{x1y1} &= -(I - I_z) \sin \psi \cos \psi \sin^2 \theta \\
 I_{x1z1} &= (I - I_z) \sin \theta \cos \theta \sin \psi \\
 I_{y1z1} &= -(I - I_z) \sin \theta \cos \theta \cos \psi
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{x1} &= \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta \sin \psi + \omega_z \sin \theta \sin \psi \\
 \omega_{y1} &= \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta \cos \psi - \omega_z \sin \theta \cos \psi \\
 \omega_{z1} &= \omega_z \cos \theta + \dot{\psi} \sin \theta
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

где  $\theta, \psi, \phi$  – углы нутации, прецессии и собственного вращения твердого тела (фиг. 1).

Момент внешних сил относительно неподвижной точки  $O$  определяется из выражения

$$\mathbf{M}_0 = \Delta \mathbf{r} \times \mathbf{G} + \Delta \mathbf{M} \tag{1.7}$$

где  $\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}$  – вектор положения центра масс тела (фиг. 1),  $\mathbf{G} = G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j} + G_z \mathbf{k}$  – вектор внешней силы,  $\Delta \mathbf{M} = \Delta M_x \mathbf{i} + \Delta M_y \mathbf{j} + \Delta M_z \mathbf{k}$  – вектор постоянного в связанной системе координат возмущающего момента.

Выбирая положение связанной системы координат  $OXYZ$  из условия  $\Delta x = 0$  и проецируя вектор  $\mathbf{M}_0$  на оси этой системы координат, получим

$$M_x = \Delta y G_z - \Delta z G_n \cos \phi + \Delta M_x \tag{1.8}$$

$$M_y = \Delta z G_n \sin \phi + \Delta M_y, M_z = -\Delta y G_n \sin \phi + \Delta M_z$$

$$G_z = G \cos \theta, G_n = G \sin \theta$$

Моменты  $M_{x1}$  и  $M_{y1}$  в неподвижной системе координат будут иметь вид

$$M_{x1} = A_{11}M_x + A_{12}M_y + A_{13}M_z \quad (1.9)$$

$$M_{y1} = A_{21}M_x + A_{22}M_y + A_{23}M_z$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

где  $[A]$  – матрица перехода от связанной к неподвижной системе координат, компоненты которой имеют вид

$$A_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi, \quad A_{12} = -\cos \psi \sin \varphi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi$$

$$A_{13} = \sin \theta \sin \psi, \quad A_{21} = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi$$

$$A_{22} = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi, \quad A_{23} = -\sin \theta \cos \psi$$

$$A_{31} = \sin \varphi \sin \theta, \quad A_{32} = \cos \varphi \sin \theta, \quad A_{33} = \cos \theta$$

Система (1.1–1.3), рассматриваемая совместно с кинематическими уравнениями Эйлера

$$d\theta/dt = \omega_x \cos \varphi - \omega_y \sin \varphi$$

$$d\psi/dt = \frac{1}{\sin \theta} (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) \quad (1.10)$$

$$d\varphi/dt = \omega_z - \operatorname{ctg} \theta (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi)$$

является исходной в данной задаче.

2. Для применения метода усреднения в задаче о движении твердого тела в окрестности статически устойчивого положения равновесия (в окрестности оси  $OZ_1$ ) система уравнений (1.1–1.3), (1.10) приводится к комплексной форме. Вводится комплексный угол нутации  $\xi = i\theta e^{i\psi}$ , дифференциальные уравнения для которого получаются объединением уравнений (1.1–1.2). В квазилинейном случае используется следующая форма аппроксимации сил  $G_n$ ,  $G_z$  и тригонометрических функций:

$$G_n \cong G_{n1}\theta + G_{n3}\theta^3, \quad G_z \cong G_{z0} + G_{z2}\theta^2 \quad (2.1)$$

$$\sin \theta \cong \theta - \theta^3/6, \quad \cos \theta \cong 1 - \theta^2/2$$

где  $\theta = (\xi \bar{\xi})^{1/2}$ ,  $\bar{\xi} = -i\theta e^{-i\psi}$  – переменная комплексно сопряженная с  $\xi$ .

Применение аппроксимации (2.1) предполагает, что силы  $G_n$  и  $G_z$  соответственно являются нечетной и четной функциями угла  $\theta$ . В простейшем случае, когда  $G_n = G \sin \theta$  и  $G_z = G \cos \theta$ , имеем  $G_{n1} = G$ ,  $G_{n3} = -1/6 G$ ,  $G_{z0} = G$ ,  $G_{z2} = -1/2 G$ . Однако применяемый вид аппроксимации может использоваться и для более сложных функций  $G_n(\theta)$  и  $G_z(\theta)$ , тогда коэффициенты полиномиального разложения принимают другие значения.

Тогда, объединяя уравнения (1.1–1.2), с учетом соотношений (1.4–1.6), (1.8–1.10), и выделяя линейную часть по переменной  $\xi$ , получим

$$d^2\xi/dt^2 - i\bar{I}_z\omega_z \frac{d\xi}{dt} + \omega^2\xi = F(\xi, \omega_z, \Phi) \quad (2.2)$$

$$\bar{I}_z = I_z / I, \quad \omega^2 = G_{n1} / I, \quad \Phi = \varphi + \psi$$

$$\begin{aligned} F(\xi, \bar{\xi}, \Phi) = & -\frac{G_{n3}}{I} \xi^2 \bar{\xi} - \frac{1}{3} i \bar{I}_z \omega_z \xi \left( \bar{\xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{2} \xi \frac{d\bar{\xi}}{dt} \right) + \\ & + \frac{1}{I} [i(\Delta M_x + \Delta y G_{z0}) - \Delta M_y + i(G_{z2} \Delta y - \frac{1}{4} G_{z0} \Delta y - \\ & - \frac{1}{4} \Delta M_x) \xi \bar{\xi} + \frac{1}{4} \Delta M_y \xi \bar{\xi}] e^{i\Phi} - \frac{1}{4I} [i(\Delta y G_{z0} + \Delta M_x) + \Delta M_y] \xi^2 e^{-i\Phi} - \\ & - \frac{1}{4I} [i(\Delta y G_{z0} + \Delta M_x) + \Delta M_y] \xi^2 e^{-i\Phi} \end{aligned}$$

Здесь  $i$  – мнимая единица.

Комплексное уравнение (2.2) рассматривается совместно с дифференциальными уравнениями для переменных  $\Phi$  и  $\omega_z$ , которые также формально приводятся к комплексной форме

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_z - \frac{1}{4} i \left( \frac{d\bar{\xi}}{dt} \bar{\xi} - \xi \frac{d\xi}{dt} \right) \quad (2.3)$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = -\frac{1}{2} [G_{n1} + G_{n3}(\xi \bar{\xi})] \Delta y (\bar{\xi} e^{i\Phi} + \xi e^{-i\Phi}) + \Delta M_z$$

Подобный прием записи уравнений для комплексного угла нутации относительно неподвижной системы координат  $OX_1Y_1Z_1$  использовался ранее во многих работах, связанных с движением тел в сопротивляющейся среде (например [2], [3]), и не является новым.

3. Так как движение твердого тела исследуется в окрестности оси  $OZ_1$  (при малых углах нутации  $\theta$ ), то при применении метода усреднения за невозмущенное движение принимается движение симметричного тела в линейном случае. Поэтому все нелинейные члены в уравнениях движения (2.2–2.3), члены, характеризующие несимметрию твердого тела ( $\Delta y$ ), и малые возмущающие моменты ( $\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z$ ), относятся к возмущающим функциям и формально масштабируются малым параметром  $\varepsilon$ . Тогда

$$d^2\xi/dt^2 - i\bar{I}_z\omega_z d\xi/dt + \omega^2\xi = \varepsilon F(\xi, \omega_z, \Phi) \quad (3.1)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega_z - \varepsilon \frac{1}{4} i \left( \frac{d\bar{\xi}}{dt} \bar{\xi} - \xi \frac{d\xi}{dt} \right)$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = -\varepsilon \frac{1}{2} [G_{n1} + G_{n3}(\xi \bar{\xi})] \Delta y (\bar{\xi} e^{i\Phi} + \xi e^{-i\Phi}) + \varepsilon \Delta M_z$$

Для простоты в системе с малым параметром (3.1) сохранены те же обозначения, что и в системе (2.2–2.3).

В этом случае невозмущенная система уравнений ( $\varepsilon = 0$ ) принимает вид

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i\bar{l}_z\omega_z \frac{d\xi}{dt} + \omega^2\xi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dt} = \omega_z, \quad \omega_z = \text{const} \quad (3.2)$$

и имеет решение

$$\xi = a_1 e^{i\Psi_1} + a_2 e^{i\Psi_2}, \quad \Phi(t) = \omega_z t + \Phi(t_0), \quad \omega_z = \omega_z(t_0) \quad (3.3)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  и  $\Psi_{1,2} = \omega_{1,2}t + \Psi_{1,2}(t_0)$  – амплитуды и фазы колебаний,  $t_0$  – начальное время движения,  $\omega_{1,2} = \bar{l}_z\omega_z/2 \pm \omega_\theta$  – частоты колебаний твердого тела,

$\omega_\theta = \sqrt{\bar{l}_z^2\omega_z^2/4 + \omega^2}$ ,  $\omega$  – частота колебаний твердого тела при  $\omega_z = 0$ .

Дифференцируя невозмущенное решение (3.3) для  $\xi$ , получим

$$\frac{d\xi}{dt} = ia_1\omega_1 e^{i\Psi_1} + ia_2\omega_2 e^{i\Psi_2} \quad (3.4)$$

Используя соотношения (3.3–3.4) как замену переменных  $\xi$ ,  $d\xi/dt \rightarrow (a_1, a_2, \Psi_1, \Psi_2)$ , подставляя  $\omega_z$  в возмущенную систему (3.1) и разрешая относительно производных  $da_1/dt$ ,  $da_2/dt$ ,  $d\Psi_1/dt$ ,  $d\Psi_2/dt$ , приходим к уравнениям

$$\frac{d\Psi_{1,2}}{dt} = \omega_{1,2} - \frac{1}{2a_{1,2}\omega_\theta} \left[ a_{2,1} \frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial\omega_z} \frac{d\omega_z}{dt} \sin(\Psi_2 - \Psi_1) \pm \text{Re}(\varepsilon F e^{-i\Psi_{1,2}}) \right] \quad (3.5)$$

$$\frac{da_{1,2}}{dt} = \mp \frac{1}{2\omega_\theta} \left[ \frac{d\omega_z}{dt} \left( a_{1,2} \frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial\omega_z} + a_{2,1} \frac{\partial\omega_{2,1}}{\partial\omega_z} \cos(\Psi_2 - \Psi_1) \right) - \text{Im}(\varepsilon F e^{-i\Psi_{1,2}}) \right]$$

где  $\text{Re}(\dots)$  и  $\text{Im}(\dots)$  – мнимая и действительная части соответствующих функций.

После произведенной замены переменных совокупность уравнений для  $\Phi$  и  $\omega_z$  системы (3.1), а также уравнений (3.5), представляет собой систему с тремя быстрыми фазами  $\Phi$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  в стандартной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x, \varphi), \quad (3.6)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(x) + \varepsilon\Omega(x, \varphi)$$

где  $x = (a_1, a_2, \omega_z)$  и  $\varphi = (\Psi_1, \Psi_2, \Phi)$  – векторы медленных и быстрых переменных,  $X(x, \varphi)$  и  $\Omega(x, \varphi)$  – вектор-функции периодичные по фазам  $\Psi_1, \Psi_2, \Phi$  с периодом  $2\pi$ , которые определяются исходя из вида системы, состоящей из уравнений для  $\Phi$  и  $\omega_z$  системы (3.1) и уравнений (3.5).

4. Применение метода усреднения для стандартной системы (3.6), как известно [4], заключается в поиске такой замены переменных

$$x = x^\circ + \varepsilon x_1(x^\circ, \varphi^\circ) + \varepsilon^2 + \dots \quad (4.1)$$

$$\varphi = \varphi^\circ + \varepsilon \varphi_1(x^\circ, \varphi^\circ) + \varepsilon^2 + \dots$$

и такой системы дифференциальных уравнений для новых переменных  $x^\circ, \varphi^\circ$ :

$$dx^\circ/dt = \varepsilon A_1(x^\circ) + \varepsilon^2 A_2(x^\circ) + \varepsilon^3 + \dots \quad (4.2)$$

$$d\varphi^\circ/dt = \omega(x^\circ) + \varepsilon B_1(x^\circ) + \varepsilon^2 + \dots$$

правые части которой не содержат вращающихся фаз  $\varphi^\circ$ .

Неизвестные функции  $x_1, \varphi_1, A_1, A_2, B_1$  асимптотических разложений (4.1–4.2) определяются по известной методике (см., например, [4]) и для рассматриваемой задачи будут иметь вид

$$x_1 = \sum_{k,s,m} a_{k,s,m}(x^\circ) \exp[i(k\psi_1^\circ + s\psi_2^\circ + m\Phi^\circ)] \quad (4.3)$$

$$\varphi_1 = \sum_{k,s,m} b_{k,s,m}(x^\circ) \exp[i(k\psi_1^\circ + s\psi_2^\circ + m\Phi^\circ)]$$

$$A_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} X d\gamma_1^\circ d\gamma_2^\circ d\Phi^\circ = \langle X \rangle, \quad B_1 = \left\langle \Omega + \frac{\partial \omega(x^\circ)}{\partial x^\circ} x_1 \right\rangle$$

$$A_2 = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^\circ} x_1 + \frac{\partial X}{\partial \varphi^\circ} \varphi_1 - \frac{\partial x_1}{\partial x^\circ} A_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi^\circ} B_1 \right\rangle$$

$$a_{k,s,m}(x^\circ) = \frac{c_{k,s,m}(x^\circ)}{k\omega_1 + s\omega_2 + m\omega_z} \quad (4.4)$$

$$b_{k,s,m}(x^\circ) = \frac{d_{k,s,m}(x^\circ)}{k\omega_1 + s\omega_2 + m\omega_z}$$

где  $c_{k,s,m}$  и  $d_{k,s,m}$  – коэффициенты разложения функций  $X$  и  $\Omega + (\partial\omega/\partial x^\circ)x_1$  в ряды Фурье,  $k, s, m$  – целые числа.

Раскладывая правые части системы уравнений, состоящей из уравнений для  $\Phi$  и  $\omega_z$  системы (3.1) и уравнений (3.5), в ряды Фурье, нетрудно определить коэффициенты  $c_{k,s,m}, d_{k,s,m}$ , отличные от нуля в данной задаче:  $c_{k,-k,0} \neq 0$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2$ );  $c_{k,-(k+1),1} \neq 0$ ,  $c_{k+1,-k,-1} \neq 0$  ( $k = 0, \pm 1, -2$ ) и  $d_{k,-k,0} \neq 0$  ( $k = 0, \pm 1$ ). Ограничиваясь случаем, когда  $\Delta z \neq 0$  (точка приложения силы  $G$  в невозмущенном движении не совпадает с неподвижной точкой  $O$ ), нетрудно установить, что знаменатели в выражениях (4.4), соответствующие коэффициентам  $c_{k,-k,0}$  и  $d_{k,-k,0}$  не обращаются в нуль ни при каких значениях параметров движения, что естественно, так как эти коэффициенты определяют движение симметричного твердого тела. Наличие же малого смещения центра масс относительно оси симметрии твердого тела ( $\Delta y \neq 0$ ) и малых возмущающих моментов ( $\Delta M_x \neq 0, \Delta M_y \neq 0$ ) может привести к появлению малых знаменателей вида:

$$(k+1)\omega_1 - k\omega_2 - \omega_z = 0 \quad (4.5)$$

$$k\omega_1 - (k+1)\omega_2 + \omega_z = 0, \quad k = 0, \pm 1, -2$$

Знаменатели (4.5) могут обращаться в нуль только при определенных значениях угловой скорости  $\omega_z$ , которые можно называть резонансными. Если такие резонансные угловые скорости существуют, то они определяются из условий (4.5) следующим образом:

$$\omega_z^p = \pm(2k+1)\omega / \sqrt{1 - \bar{I}_z - (k+1)k\bar{I}_z^2}, \quad k = 0, \pm 1, -2 \quad (4.6)$$

Таким образом, в данной задаче могут существовать четыре резонансные угловые скорости

$$\omega_z^{p1} = \pm\omega / \sqrt{1 - \bar{I}_z} \quad (4.7)$$

$$\omega_z^{p2} = \pm 3\omega / \sqrt{1 - \bar{I}_z - 2\bar{I}_z^2} \quad (4.8)$$

которые симметричны относительно нуля.

Резонансные угловые скорости существуют, если подкоренные выражения в формулах (4.7–4.8) больше нуля, поэтому, решая указанные неравенства при  $\bar{I}_z > 0$ , соответственно получим

$$\bar{I}_z < 1, \quad \bar{I}_z < 1/2 \quad (4.9)$$

Следовательно, при  $\bar{I}_z < 1/2$  существуют четыре резонансные угловые скорости (4.7–4.8), а при  $1/2 < \bar{I}_z < 1$  — две  $\omega_z^{pl} = \pm \omega / \sqrt{1 - \bar{I}_z}$ .

Таким образом, для существования резонансных угловых скоростей в окрестности статически устойчивого положения равновесия твердого тела ( $\theta = 0$ ) момент инерции твердого тела относительно оси  $OZ$  должен быть минимален. Резонансные угловые скорости (4.7–4.8), вычисленные для невозмущенного движения твердого тела, постоянны. При действии малых возмущений резонансные значения изменяются, в частности, они зависят от амплитуд  $a_1$  и  $a_2$ . Эту зависимость нетрудно учесть в данной задаче, заменяя частоты  $\omega_1, \omega_2, \omega_z$  в выражениях (4.5) на производные  $d\psi_1/dt, d\psi_2/dt$  и  $d\Phi/dt$ , определенные с учетом функций  $B_1$  (4.3).

5. Анализ резонансов, возникающих в рассматриваемой задаче, показывает, что резонансные явления в движении твердого тела возникают при достижении угловой скоростью  $\omega_z$  своих резонансных значений, определяемых из выражений (4.7–4.8). При этом особое значение приобретает изменение угловой скорости на нерезонансных участках движения. Причем, если  $\Delta M_z = 0$  (то есть возмущающий момент  $\Delta M$  ортогонален оси  $OZ$ ), правая часть уравнения для  $\omega_z$  имеет нулевое среднее. Поэтому первое приближение метода усреднения не описывает изменения переменной  $\omega_z$ .

Усредненное уравнение для угловой скорости  $\omega_z$  с учетом двух приближений записывается следующим образом:

$$\langle d\omega_z / dt \rangle = \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2, \quad A_1 = \Delta M_z \quad (5.1)$$

Вектор-функции  $x_1 = (x_1^{(a_1)}, x_1^{(a_2)}, x_1^{(\omega_z)})$  и  $y_1 = (y_1^{(\gamma_1)}, y_1^{(\gamma_2)}, y_1^{(\Phi)})$ , входящие в выражение  $A_2$ , определяются следующими формулами (для краткости при записи функций  $x_1$  и  $y_1$  ограничимся рассмотрением членов не обращающихся в нуль после усреднения):

$$\begin{aligned} x_1^{(a_1)} &= \frac{f_1 \cos(\Phi - \gamma_1 + \Phi_0)}{\omega_z - \omega_1} + \frac{f_2 \cos(\Phi - \gamma_2 + \Phi_0)}{\omega_z - \omega_2} + \\ &+ \frac{f_3 \cos(\Phi - 2\gamma_1 + \gamma_2 + \Phi_0)}{\omega_z - 2\omega_1 + \omega_2} + \frac{f_4 \cos(\Phi - 2\gamma_2 + \gamma_1 + \Phi_0)}{\omega_z - 2\omega_2 + \omega_1} + \dots \\ x_1^{(a_2)} &= \frac{f_5 \cos(\Phi - \gamma_1 + \Phi_0)}{\omega_z - \omega_1} + \frac{f_6 \cos(\Phi - \gamma_2 + \Phi_0)}{\omega_z - \omega_2} + \\ &+ \frac{f_7 \cos(\Phi - 2\gamma_1 + \gamma_2 + \Phi_0)}{\omega_z - 2\omega_1 + \omega_2} + \frac{f_8 \cos(\Phi - 2\gamma_2 + \gamma_1 + \Phi_0)}{\omega_z - 2\omega_2 + \omega_1} + \dots \\ y_1^{(\gamma_1)} &= \frac{f_9 \sin(\Phi - \gamma_1 + \Phi_0)}{\omega_z - \omega_1} + \frac{f_{10} \sin(\Phi - \gamma_2 + \Phi_0)}{\omega_z - \omega_2} + \\ &+ \frac{f_{11} \sin(\Phi - 2\gamma_1 + \gamma_2 + \Phi_0)}{\omega_z - 2\omega_1 + \omega_2} + \frac{f_{12} \sin(\Phi - 2\gamma_2 + \gamma_1 + \Phi_0)}{\omega_z - 2\omega_2 + \omega_1} + \dots \\ y_1^{(\gamma_2)} &= \frac{f_{13} \sin(\Phi - \gamma_1 + \Phi_0)}{\omega_z - \omega_1} + \frac{f_{14} \sin(\Phi - \gamma_2 + \Phi_0)}{\omega_z - \omega_2} + \\ &+ \frac{f_{15} \sin(\Phi - 2\gamma_1 + \gamma_2 + \Phi_0)}{\omega_z - 2\omega_1 + \omega_2} + \frac{f_{16} \sin(\Phi - 2\gamma_2 + \gamma_1 + \Phi_0)}{\omega_z - 2\omega_2 + \omega_1} + \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

где функции  $f_i$  зависят от медленных переменных и величин асимметрии;  $\omega_x - \omega_{1,2}$  и  $\omega_x - 2\omega_{1,2} + \omega_{2,1}$  – резонансные расстройки, соответствующие резонансным угловым скоростям  $\omega_z^{p1}$  (4.7) и  $\omega_z^{p2}$  (4.8);  $\sin \Phi_0 = (\Delta y G_{z0} + \Delta M_x)/M_b$ ,  $\cos \Phi_0 = -\Delta M_y/M_b$ ,  $M_b = \sqrt{(\Delta y G_{z0} + \Delta M_x)^2 + (\Delta M_y)^2}$ . Функция  $B_1 = (B_1^{(\gamma_1)}, B_1^{(\gamma_2)}, B_1^{(\Phi)})$  не приводится, поскольку она, так же как и функции  $x_1^{(\omega_z)}$ ,  $y_1^{(\Phi)}$ , после подстановки в выражение  $A_2$  (4.3) формирует члены, обращающиеся в нуль при усреднении.

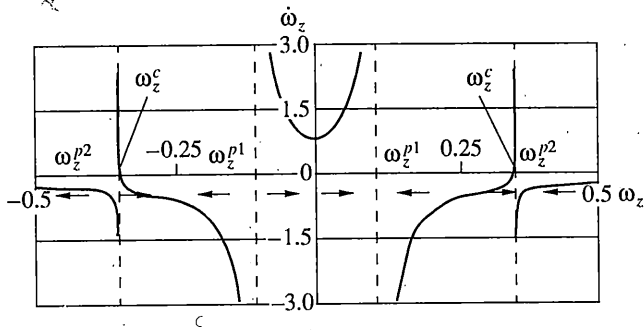
Подставляя функции (5.2) в выражение (4.3) и выполняя усреднение, окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 A_2 = & \frac{G_{n1}[1 - 0.25(a_1^2 + a_2^2)]\Delta y M_b}{4I_z I\omega_\theta(\omega_z - \omega_1)} \cos(\Phi_0) + \\
 & + \frac{G_{n3}(2a_1^2 + a_2^2 - 0.75a_1^2 a_2^2 - 0.75a_1^4 - 0.25a_2^4)\Delta y M_b}{4I_z I\omega_\theta(\omega_z - \omega_1)} \cos(\Phi_0) + \\
 & + \frac{3G_{n3}a_1^2 a_2^2 \Delta y M_b}{8I_z I\omega_\theta(\omega_z - \omega_1)} \cos(\Phi_0) - \frac{3G_{n3}a_1^2 a_2^2 \Delta y M_b}{8I_z I\omega_\theta(\omega_z - \omega_2)} \cos(\Phi_0) - \\
 & - \frac{G_{n1}[1 - 0.25(a_1^2 + a_2^2)]\Delta y M_b}{4I_z I\omega_\theta(\omega_z - \omega_2)} \cos(\Phi_0) - \\
 & - \frac{G_{n3}(2a_2^2 + a_1^2 - 0.75a_1^2 a_2^2 - 0.75a_2^4 - 0.25a_1^4)\Delta y M_b}{4I_z I\omega_\theta(\omega_z - \omega_1)} \cos(\Phi_0) + \\
 & + \frac{G_{n3}(a_1^4 - 2a_1^2 a_2^2)\Delta y M_b}{8I_z I\omega_\theta(\omega_z - 2\omega_1 + \omega_2)} \cos(\Phi_0) - \frac{G_{n3}(a_2^4 - 2a_1^2 a_2^2)\Delta y M_b}{8I_z I\omega_\theta(\omega_z - 2\omega_2 + \omega_1)} \cos(\Phi_0)
 \end{aligned} \quad (5.3)$$

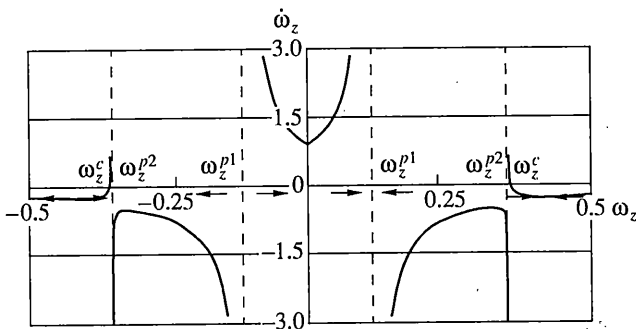
Полученное усредненное уравнение (5.1) (с учетом (5.3)) описывает поведение угловой скорости  $\omega_z$  на нерезонансных участках движения, то есть вне резонансных областей ширины порядка  $O(\sqrt{\epsilon})$ . Характерной особенностью выражения (5.3) является наличие резонансных расстроек, входящих в знаменатели приведенных членов. Влияние данных резонансных членов на закономерности изменения угловой скорости  $\omega_z$  аналогично вторичным резонансным эффектам, описанным, например, в статье [1].

6. Для анализа полученных уравнений строятся графики зависимостей  $d\omega_z/dt = f(\omega_z)$ , определяющие возможные случаи поведения угловой скорости  $\omega_z$  (фиг. 2–3). Представленные на фиг. 2–3 варианты получены при  $\Delta M_z = 0$  (возмущающий момент  $\Delta M$  ортогонален оси  $OZ$ ). В этом случае поведение угловой скорости  $\omega_z$  полностью определяют резонансные члены, входящие в выражение (5.3). Характерной особенностью зависимостей, приведенных на фиг. 2–3, является наличие устойчивых (неустойчивых) резонансов и стационарных точек, расположенных вблизи резонансов, определяющих области, где производная  $d\omega_z/dt$  принимает значения одного знака. Поэтому угловая скорость  $\omega_z$  на нерезонансных участках движения с течением времени стремится к какому-либо резонансу или к стационарной точке. Здесь необходимо отметить, что устойчивость (неустойчивость) соответствующих резонансов понимается с точки зрения поведения системы в нерезонансной области и не имеет отношения к поведению системы в резонансном случае, который требует особого рассмотрения. Это связано с тем, что, во-первых, резонансная область требует специальной процедуры усреднения, а, во-вторых, в резонансной области угол нутации  $\theta$  (или амплитуды  $a_{1,2}$ ) возрастает и квазилинейные уравнения уже не описывают с достаточной степенью точности движения системы. Вид графиков, представленных на фиг. 2–3, определяется сочетанием знаков следующих выражений  $\Delta y M_b \cos \Phi_0$

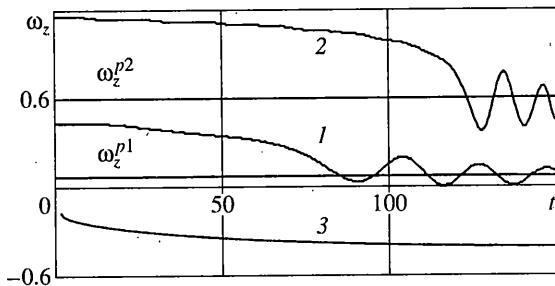




Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

и  $|a_1| - \sqrt{2}|a_2|$ . Так фиг. 2 соответствует случаю  $\Delta M_b \cos \Phi_0 > 0$  и  $|a_1| - \sqrt{2}|a_2| > 0$ , фиг. 3 —  $-\Delta M_b \cos \Phi_0 > 0$  и  $|a_1| - \sqrt{2}|a_2| < 0$ . Графики  $d\omega_z/dt = f(\omega_z)$ , построенные при  $\Delta M_b \cos \Phi_0 < 0$ ,  $|a_1| - \sqrt{2}|a_2| > 0$  и  $\Delta M_b \cos \Phi_0 < 0$ ,  $|a_1| - \sqrt{2}|a_2| < 0$ , будут иметь знаки производной  $d\omega_z/dt$ , противоположные показанным на графиках фиг. 2–3. При этом устойчивые резонансы и стационарные точки становятся неустойчивыми и наоборот. Согласно выражению (5.3), если  $|a_1| - \sqrt{2}|a_2| = 0$ , то резонанс (4.8), определяемый соотношением  $\omega_x - 2\omega_{1,2} + \omega_{2,1} \approx 0$ , не проявляет себя через вторичные резонансные эффекты. Если же  $\Delta M_y = 0$  (возмущающий момент ортогонален оси  $OY$ ),

то  $\Phi_0 = \pm\pi/2$  и из выражения (5.3) следует, что второе приближение метода усреднения отсутствует. Таким образом, существует такое направление возмущающего момента  $\Delta M$ , при котором вторичный резонансный эффект не проявляется и угловая скорость  $\omega_z$  не изменяется (при  $\Delta M_z = 0$ ). В линейном случае, когда  $G_{n3} = 0$ , зависимости  $d\omega_z/dt = f(\omega_z)$  упрощаются, так как исчезают резонансы высшего порядка и на графиках фиг. 2, 3 остаются только особенности, связанные с резонансной угловой скоростью  $\omega_z^{p1}$  (4.7). Влияние компоненты возмущающего момента  $\Delta M_z = \text{const}$  на зависимости фиг. 2, 3 очевидно и заключается в сдвиге графиков вдоль вертикальной оси. Поэтому даже достаточно малые возмущающие моменты  $\Delta M_z = O(\varepsilon^2)$  могут привести к возникновению ( $\Delta M_z > 0$ , фиг. 2) или исчезновению ( $\Delta M_z < 0$ , фиг. 3) стационарных точек вблизи резонансной скорости  $\omega_z^{p2}$  (4.8).

Таким образом, при движении твердого тела в окрестности статически устойчивого положения равновесия можно выделить следующие вторичные резонансные эффекты:

увеличение скорости изменения переменной  $\omega_z$  при приближении к резонансам (резонансы  $\omega_z^{p1}$ ,  $\omega_z^{p2}$  показаны на фиг. 2, 3 штрихами);

существование при определенных начальных условиях вблизи резонансов устойчивых или неустойчивых стационарных точек (обозначаемые на фиг. 2–3 как  $\omega_z^c$ );

наличие вблизи резонансов областей притяжения (отталкивания)  $\omega_z$ .

7. Для подтверждения правильности проведенного аналитического анализа был проведен ряд численных расчетов движения твердого тела. Характерные численные примеры изменения угловой скорости  $\omega_z(t)$  представлены на фиг. 4 и соответствуют зависимости  $d\omega_z/dt = f(\omega_z)$ , приведенной на фиг. 2. Расчеты проводились по исходным нелинейным уравнениям движения при следующих значениях параметров твердого тела и его начальных условиях движения:  $\bar{I}_z = 0.6$ ,  $I = 10$  кг · м<sup>2</sup>,  $m = 1$  кг,  $G_{n1} = 0.1$ ,  $G_{n3} = -0.4$ ,  $G_{z0} = 0.1$ ,  $G_{z2} = 0.3$ ,  $\Delta M_x = -1$  Н × м,  $\Delta M_y = 1$  Н × м,  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 1$  град,  $\Phi(0) = \pi$ ,  $\Delta y = -0.1$  см,  $\Delta z = 20$  см,  $a_1(0) = 10$  град,  $a_2(0) = 5$  град,  $\omega_z(0) = 0.44$  с<sup>-1</sup> (фиг. 4, кривая 1),  $\bar{I}_z = 0.3$ ,  $a_1(0) = 7$  град,  $a_2(0) = 3$  град,  $\omega_z(0) = 116$  с<sup>-1</sup> (фиг. 4, кривая 2),  $a_1(0) = 9$  град,  $a_2(0) = 6$  град,  $\omega_z(0) = -0.17$  с<sup>-1</sup> (фиг. 4, кривая 3).

Рассмотрим подробнее траектории  $\omega_z$ , приведенные на фиг. 4. Кривая 1 соответствует случаю  $\bar{I}_z = 0.6$ . Тогда в системе реализуется только резонанс (4.7), поэтому при  $\omega_z(0) > \omega_z^{p1} > 0$  согласно выражению (5.3) производная  $\langle d\omega_z / dt \rangle < 0$  и происходит уменьшение величины  $\omega_z$ . Подобная эволюция  $\omega_z$  приводит к достижению резонансного значения  $\omega_z^{p1}$  (4.7) с последующей реализацией длительного резонанса. При  $\bar{I}_z = 0.3$  на фазовом портрете фиг. 2, кроме резонансных угловых скоростей  $\omega_z^{p1}$  (4.7) появляются резонансные угловые скорости  $\omega_z^{p2}$  (4.8) и стационарные точки  $\omega_z^c$ . Если при этом  $\omega_z(0) > \omega_z^{p2} > 0$ , то знак производной  $\langle d\omega_z / dt \rangle$ , как это следует из выражения (5.3), отрицателен (фиг. 2). Тем самым вторичный резонансный эффект способствует уменьшению величины  $\omega_z$  до значений  $\omega_z^{p2}$  (4.8), при которых наблюдается длительный резонанс. Данный случай описывается кривой 2. Если же начальное значение  $\omega_z^c < \omega_z(0) < \omega_z^{p1} < 0$ , то из выражения (5.3) также следует, что производная  $\langle d\omega_z / dt \rangle$  отрицательна (фиг. 2). Угловая скорость  $\omega_z$  при этом стремится к стационарной точке  $\omega_z^c$ . Процесс перехода к стационарному положению описывается кривой 3.

В заключение следует отметить, что по сравнению с работой [5], где рассматривалось движение спутника близкое к случаю Эйлера и основной причиной возникновения вторичных резонансных эффектов являлось наличие в системе диссипации, в данной работе физическая сущность явлений совсем иная. Основной причиной возникновения описанных эффектов в рассматриваемой задаче является наличие постоянного по модулю возмущающего момента ( $\Delta M$ ) и смещения центра масс твердого тела ( $\Delta y \neq 0$ ) относительно его оси симметрии.

Таким образом, описанный подход позволяет представить полную совокупность особенностей поведения медленных движений статически устойчивого твердого тела при малых углах нутации, связанных с вторичными резонансными эффектами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00477).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садов Ю.А. Вторичные резонансные эффекты в механических системах // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 20–24.
2. Найфэх А., Сарик В. Исследование асимметричных вращающихся тел с нелинейными аэродинамическими характеристиками // Ракетн. техника и космонавтика. 1972. Т. 10. № 8. С. 38–47.
3. Заболотнов Ю.М. Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере КА с малой асимметрией. 1 // Космич. исследования. 1993. Т. 31. № 6. С. 39–50.
4. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
5. Садов Ю.А. Быстрое вращение спутника с магнитным демпфером. 4. Диссипативная эволюция. Резонансные эффекты // Космич. исследования. 1986. Т. 24. № 4. С. 553–563.

Самара

Поступила в редакцию  
20.09.1999