МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2002

УДК 531.539

© 2002 г. О.В. ХОЛОСТОВА

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Рассматривается движение волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания малой амплитуды. Построены периодические (с периодом, равным периоду колебаний точки подвеса) движения, рождающиеся из регулярных прецессий волчка с неподвижной точкой, в случае резонанса в вынужденных колебаниях и при его отсутствии; решен вопрос об устойчивости этих движений. Специально рассмотрены случаи параметрического резонанса и резонанса третьего порядка, исследован вопрос о существовании и устойчивости периодических движений волчка с периодом, равным соответственно удвоенному и утроенному периоду колебаний точки подвеса. Рассмотрен также вопрос об ограниченности движений волчка, начинающихся в достаточно малой окрестности его регулярной прецессии в указанных резонансных случаях; дана оценка ширины этой окрестности.

Исследование опирается на общие результаты для гамильтоновых систем с одной степенью свободы, полученные в [1–3]. В Приложении получена оценка ширины окрестности ограниченности движения гамильтоновых систем с одной степенью свободы при наличии резонанса в вынужденных колебаниях.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение волчка Лагранжа (динамически симметричного твердого тела с центром масс, лежащим на оси симметрии) вокруг точки закрепления (подвеса) O. Предполагаем, что точка O совершает заданное движение вдоль вертикали по закону $O_*O = \xi(t)$ относительно некоторой неподвижной точки O_*. При $\xi(t) \equiv 0$ задача сводится к классической задаче о движении волчка Лагранжа с неподвижной точкой; такое движение подробно изучено [4–6].

Введем поступательно движущуюся в абсолютном пространстве систему координат $OXYZ$ (ось OZ направлена вертикально вверх). С телом свяжем систему координат $Oxyz$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O, причем ось Oz направлена по оси динамической симметрии и центр масс G тела лежит на положительной полуоси Oz ($OG = z_G$, $z_G > 0$). Ориентация системы координат $Oxyz$ относительно $OXYZ$ задается при помощи углов Эйлера.

Кинетическая и потенциальная энергия тела вычисляются по формулам [7]:

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{\xi}^2 - mz_G\dot{\xi}\dot{\theta}\sin\theta + \tfrac{1}{2}A(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2 \quad (1.1)$$

$$\Pi = mgz_G\cos\theta + mg\xi(t)$$

где m – масса тела, A и C – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции.

Координаты ψ и φ циклические, им отвечают постоянные по величине импульсы p_ψ и p_φ; обозначим их $p_\psi = Aa$, $p_\varphi = Ab$ (a, b – константы). С учетом (1.1) имеем следующие выражения для угловых скоростей прецессии и собственного вращения волчка:

$$\dot{\psi} = \frac{a - b\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{A}{C}b - \frac{(a - b\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta} \tag{1.2}$$

При помощи (1.1) и (1.2) получим такое выражение для функции Гамильтона [7]:

$$H = \frac{A(a - b\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta} + \frac{(p_\theta + mz_G\dot{\xi}\sin\theta)^2}{2A} + mgz_G\cos\theta \tag{1.3}$$

где p_θ – импульс, отвечающий позиционной координате θ.

Будем далее считать, что точка подвеса O совершает гармонические колебания малой амплитуды по закону $\xi(t) = a_* \cos\Omega t$, причем $a_* \ll l$, где $l = A/(mz_G)$ – приведенная длина тела как физического маятника (при $a = b = 0$).

Перейдем к безразмерному времени $\tau = \Omega t$ и введем безразмерные параметры и импульс по формулам $a = \Omega\alpha$, $b = \Omega\beta$, $p_\theta = A\Omega p$. Гамильтониан (1.3) перепишется в виде

$$H = \frac{1}{2}(p - \varepsilon\sin\tau\sin\theta)^2 + \frac{(\alpha - \beta\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta} + \gamma\cos\theta \tag{1.4}$$

где введены обозначения $\varepsilon = a_*/l$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$, $\gamma = g/(l\Omega^2)$ $(\gamma > 0)$.

Далее будем полагать, что параметры α и β могут принимать произвольные значения, но не связаны соотношением $|\alpha| = |\beta|$. При $|\alpha| = |\beta|$ ось симметрии волчка может занимать вертикальное положение ($\theta = 0$ или $\theta = \pi$); этот случай требует специального рассмотрения.

Положив в (1.4) $\varepsilon = 0$, получим невозмущенный гамильтониан, отвечающий волчку Лагранжа с неподвижной точкой O. Соответствующие невозмущенные уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\theta}{d\tau} = p, \quad \frac{dp}{d\tau} = \frac{(\alpha - \beta\cos\theta)(\alpha\cos\theta - \beta)}{\sin^3\theta} + \gamma\sin\theta \tag{1.5}$$

Система (1.5) имеет частное решение $p = 0$, $\theta = \theta_0 = \text{const}$ (положение равновесия); равновесное значение θ_0 является корнем уравнения

$$\frac{(\alpha - \beta\cos\theta)(\alpha\cos\theta - \beta)}{\sin^4\theta} = -\gamma \tag{1.6}$$

Функция $f(u) = (\alpha - \beta u)(\alpha u - \beta)/(1 - u^2)^2$, получаемая из левой части уравнения (1.6), если положить $u = \cos\theta$, монотонно возрастает на интервале $-1 < u < 1$ при любых допустимых значениях параметров α и β ($df/du > 0$ при $-1 < u < 1$) [7], поэтому при фиксированных значениях α, β и γ уравнение (1.6) имеет единственное решение, а система (1.5) – единственное положение равновесия.

Этому положению равновесия отвечает регулярная прецессия волчка Лагранжа с неподвижной точкой: угол θ_0 отклонения оси волчка от вертикали определяется из (1.6), а постоянные значения угловых скоростей прецессии и собственного вращения при $\theta = \theta_0$ вычисляются по формулам (1.2).

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. Целью работы является рассмотрение вопроса о существовании и устойчивости периодических движений (с периодом, равным периоду колебаний точки подвеса), рождающихся из регулярных прецессий волчка. Особое внимание уделено резонансным случаям; в случаях параметрического резонанса и резонанса третьего порядка будет решен вопрос о существовании и устойчивости периодических (с периодом, равным соответственно удвоенному и утроенному периоду колебаний точки подвеса) движений волчка в окрестности его регулярных прецессий. Исследуется также вопрос об ограниченности движений волчка, начинающихся в достаточно малой окрестности его регулярной прецессии, и дана оценка размеров этой окрестности. В работе использованы общие результаты, полученные в [1–3] для гамильтоновых систем с одной степенью свободы.

Задача о существовании, числе и устойчивости движений волчка Лагранжа, близких к регулярным прецессиям, при вертикальных гармонических колебаниях точки подвеса малой амплитуды и при дополнительных предположениях о высокой частоте колебаний и малости угловых скоростей прецессии и собственного вращения рассмотрена в [7].

2. Нормализация невозмущенного гамильтониана. Для дальнейшего исследования удобно предварительно получить нормальную форму невозмущенного ($\varepsilon = 0$) гамильтониана (1.4) в окрестности положения равновесия системы (1.5). Полагая $\theta = \theta_0 + x$, $p = y$, представим невозмущенный гамильтониан в виде ряда

$$H_0 = H_0^{(2)} + a_3x^3 + a_4x^4 + O_5 \tag{2.1}$$

$$H_0^{(2)} = \tfrac{1}{2}(y^2 + \omega_0^2x^2)$$

$$a_3 = \tfrac{1}{6}(g_3(\theta_0) + \gamma\sin\theta_0), \quad a_4 = \tfrac{1}{24}(g_4(\theta_0) + \gamma\cos\theta_0)$$

$$\omega_0^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(1+3\cos^2\theta_0) - 2\alpha\beta\cos\theta_0(3+\cos^2\theta_0)}{\sin^4\theta_0} = \sin^2\theta_0\frac{df(\cos\theta_0)}{d\cos\theta_0} > 0$$

$$g_3(\theta_0) = \frac{-4(\alpha^2+\beta^2)(2\cos\theta_0 + \cos^3\theta_0) + \alpha\beta(5 + 18\cos^2\theta_0 + \cos^4\theta_0)}{\sin^5\theta_0}$$

$$g_4(\theta_0) = \frac{4(\alpha^2+\beta^2)(2 + 11\cos^2\theta_0 + 2\cos^4\theta_0) - \alpha\beta\cos\theta_0(61 + 58\cos^2\theta_0 + \cos^4\theta_0)}{\sin^6\theta_0}$$

В (2.1) O_5 – совокупность членов не ниже пятой степени относительно x и y.

Сделаем далее замену переменных $x = x^*/\sqrt{\omega_0}$, $y = y^*\sqrt{\omega_0}$, приводящую $H_0^{(2)}$ к нормальной форме $\omega_0(x^{*2} + y^{*2})/2$, а затем осуществим близкое к тождественному преобразование $x^*, y^* \to q^*, p^*$ типа преобразования Биркгофа, уничтожающее в (2.1) член третьей степени и нормализующее члены четвертой степени. Гамильтониан (2.1) преобразуется к виду

$$H_0^* = \tfrac{1}{2}\omega_0(q^{*2} + p^{*2}) + \tfrac{1}{4}c(q^{*2} + p^{*2})^2 + O_5 \tag{2.2}$$

$$c = \frac{3a_4}{2\omega_0^2} - \frac{15a_3^2}{4\omega_0^4} \tag{2.3}$$

Для последующего исследования возмущенной задачи важно выяснить, при каких значениях параметров α, β и γ коэффициент c в членах четвертой степени невозмущенного нормализованного гамильтониана (2.2) обращается в нуль. Выражение (2.3) можно преобразовать к виду

$$c = \frac{c_1}{48\omega_0^4(1-u_0^2)^5} \tag{2.4}$$

$$c_1 = 3[\sigma_1(1+2u_0^2) - \sigma_2(5u_0 + u_0^3) - \gamma u_0(1-u_0^2)^2]\times$$

$$\times\ [4\sigma_1(2 + 11u_0^2 + 2u_0^4) - \sigma_2u_0(61 + 58u_0^2 + u_0^4) + \gamma u_0(1-u_0^2)^3] -$$

$$-5[-4\sigma_1(2u_0 + u_0^3) + \sigma_2(5 + 18u_0^2 + u_0^4) + \gamma(1-u_0^2)^3]^2$$

В (2.4) введены обозначения $\sigma_1 = \alpha^2 + \beta^2$, $\sigma_2 = \alpha\beta$ ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_1 + 2\sigma_2 > 0$, $\sigma_1 - 2\sigma_2 > 0$), а величина $u_0 = \cos\theta_0$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma_1 u_0 - \sigma_2(1 + u_0^2) + \gamma(1 - u_0^2)^2 = 0 \tag{2.5}$$

вытекающему из уравнения (1.6) для θ_0.

Рассмотрим уравнения $c_1 = 0$ и (2.5) совместно; первое является квадратным, а второе линейным относительно σ_1 и σ_2. Выразив из (2.5) величину σ_2 через σ_1, подставим ее в выражение для c_1. После преобразования получим

$$c_1 = \frac{12}{(1+u_0^2)^2}[2\sigma_1^2 - 4\gamma u_0(3 - u_0^2)\sigma_1 - \gamma^2(u_0^6 + 33u_0^4 + 15u_0^2 + 15)]$$

Дискриминант стоящего в скобках квадратного трехчлена относительно σ_1 равен $24\gamma^2(u_0^2+1)^2(u_0^2+5) > 0$, поэтому квадратный трехчлен имеет два корня. Выбираем положительный корень, равный

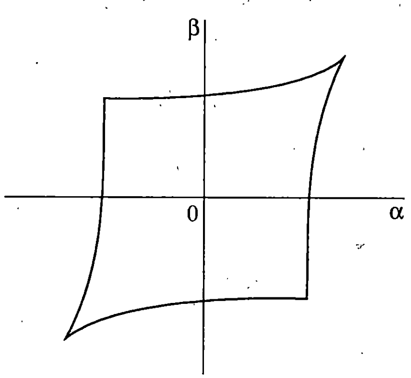
$$\sigma_1^* = \frac{1}{2}\left[2u_0(3 - u_0^2) + (u_0^2 + 1)\sqrt{6(u_0^2 + 5)}\right]\gamma$$

Ему отвечает величина $\sigma_2^* = \gamma\left[2 + u_0\sqrt{6(u_0^2+5)}\right]\Big/2$. При этом условия $\sigma_1^* + 2\sigma_2^* > 0$ и $\sigma_1^* - 2\sigma_2^* > 0$ удовлетворяются для всех $u_0 \in (-1,1)$.

Возвращаясь вновь к параметрам α и β, найдем соответствующие паре величин σ_1^*, σ_2^* четыре пары значений α, β:

$$\begin{gathered} \alpha_{1,2} = \frac{\Delta_1 \pm \Delta_2}{2}, \quad \beta_{1,2} = \frac{\Delta_1 \mp \Delta_2}{2} \\ \alpha_{3,4} = \frac{-\Delta_1 \pm \Delta_2}{2}, \quad \beta_{3,4} = \frac{-\Delta_1 \mp \Delta_2}{2} \\ \Delta_1 = \sqrt{\sigma_1^* + 2\sigma_2^*}, \quad \Delta_2 = \sqrt{\sigma_1^* - 2\sigma_2^*} \end{gathered} \tag{2.6}$$

Пусть величина γ фиксирована, тогда соотношения (2.6) при учете выражений для σ_1^* и σ_2^* задают в параметрическом виде четыре кривые в плоскости (α, β) (параметром служит величина u_0, изменяющаяся в пределах от –1 до 1), где обращается в нуль коэффициент c в гамильтониане (2.2). Эти кривые имеют общие точки в вершинах образуемой ими замкнутой кривой; в этих точках $\alpha = \beta = \pm 2\sqrt{\gamma}$ (им отвечают $u_0 = 1$) и $\alpha = -\beta = \pm\sqrt{2\gamma}$ (им отвечает $u_0 = -1$). Качественный вид кривой $c = 0$ показан на фиг. 1.



Фиг. 1

Анализ показывает, что для точек (α, β), лежащих внутри кривой $c = 0$, справедливо неравенство $c < 0$, а для точек вне этой кривой $c > 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению невозмущенной задачи.

3. Периодические движения волчка Лагранжа при резонансе в вынужденных колебаниях и их устойчивость. В окрестности положения равновесия $\theta = \theta_0$, $p = 0$ невозмущенной системы (1.5) возмущенный гамильтониан (1.4) имеет вид (полагаем $\theta = \theta_0 + x$, $p = y$):

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 \tag{3.1}$$

$$H_1 = -\sin\tau(\sin\theta_0 + \cos\theta_0 x - \tfrac{1}{2}\sin\theta_0 x^2 - \tfrac{1}{6}\cos\theta_0 x^3)y + O_5$$

$$H_2 = \tfrac{1}{2}\sin^2\tau(\sin 2\theta_0 x + \cos 2\theta_0 x^2 - \tfrac{2}{3}\sin 2\theta_0 x^3 - \tfrac{1}{3}\cos 2\theta_0 x^4) + O_5$$

В (3.1) H_0 – невозмущенный гамильтониан, определенный формулами (2.1).

Рассмотрим сначала случай, когда собственная частота ω_0 малых колебаний невозмущенной системы близка к целому числу, то есть имеет место резонанс в вынужденных колебаниях.

Условие $\omega_0^2 = N^2$ (N – целое число) равносильно уравнению

$$\sigma_1(1 + 2u_0^2) - \sigma_2(5u_0 + u_0^3) - \gamma u_0(1 - u_0^2)^2 - N^2(1 - u_0^2)^2 = 0 \tag{3.2}$$

в котором введены обозначения п. 2: $u_0 = \cos\theta_0$, $\sigma_1 = \alpha^2 + \beta^2$, $\sigma_2 = \alpha\beta$, причем величина u_0 является корнем уравнения (2.5). Из (3.2) и (2.5) получим

$$\sigma_1 = \sigma_1^{**} = 2\gamma u_0(3 + u_0^2) + N^2(1 + u_0^2), \quad \sigma_2 = \sigma_2^{**} = \gamma(3u_0^2 + 1) + N^2 u_0$$

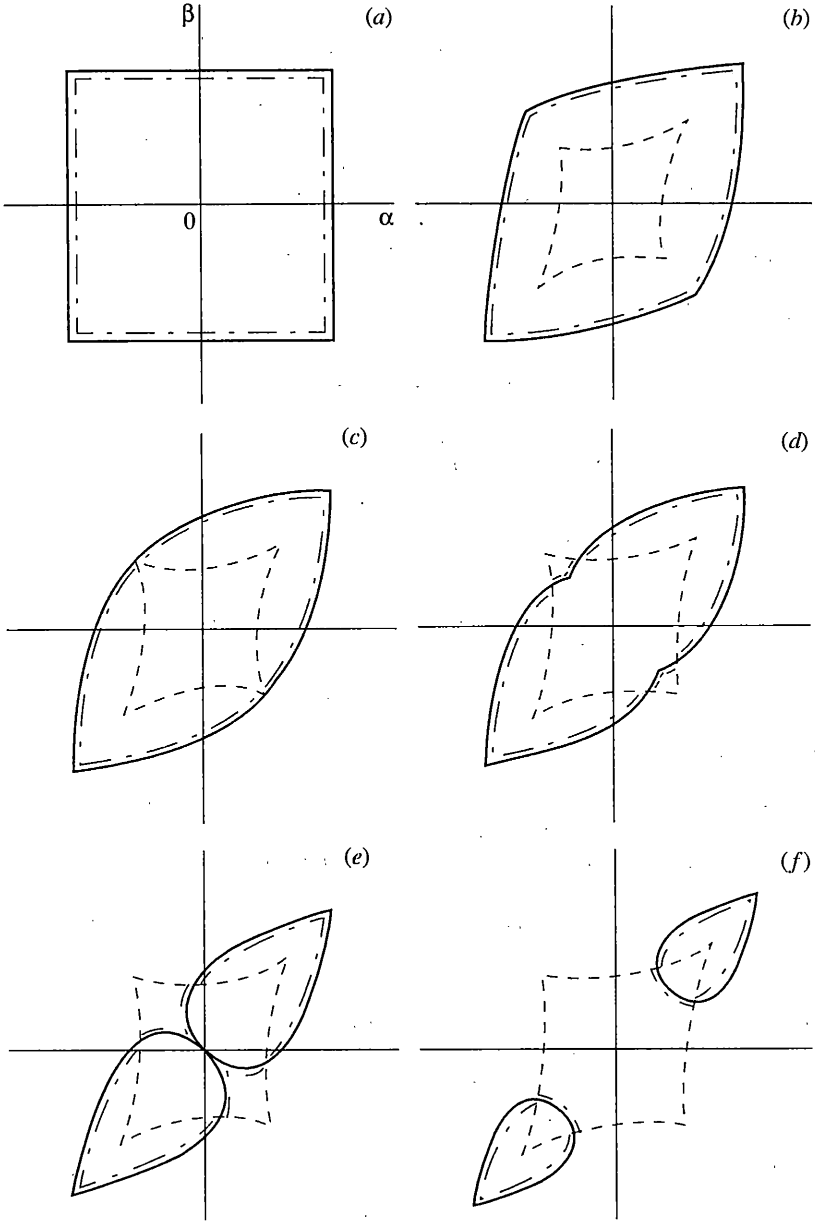
При этом неравенство $\sigma_1^{**} + 2\sigma_2^{**} > 0$ выполняется при всех допустимых значениях u_0 и γ, а условия $\sigma_1^{**} > 0$ и $\sigma_1^{**} - 2\sigma_2^{**} > 0$ удовлетворяются при $0 < \gamma \leqslant N^2/4$ для всех $u_0 \in (-1, 1)$, а при $\gamma > N^2/4$ – только для значений u_0 из интервала $((2\gamma - N^2)/(2\gamma), 1)$.

При фиксированном значении параметра γ геометрическое место точек плоскости (α, β), где выполняется условие $\omega_0 = N$, задается параметрически соотношениями вида (2.6), где $\Delta_1 = \sqrt{\sigma_1^{**} + 2\sigma_2^{**}}$, $\Delta_2 = \sqrt{\sigma_1^{**} - 2\sigma_2^{**}}$, а параметром служит величина u_0.

Кривые в плоскости (α, β), на которых имеет место резонанс $\omega_0 = N$, показаны сплошными линиями на фиг. 2, *a–f* для произвольного фиксированного числа N соответственно для следующих качественно различных случаев: $\gamma = 0$, $0 < \gamma < N^2/6$, $\gamma = N^2/6$, $N^2/6 < \gamma < N^2/4$, $\gamma = N^2/4$, $\gamma > N^2/4$.

В предельном случае $\gamma = 0$ кривые, на которых $\omega_0 = N$, образуют квадрат, стороны которого лежат на прямых $\alpha = \pm N$ и $\beta = \pm N$ (фиг. 2, *a*). С увеличением γ квадрат деформируется в криволинейный ромб при $0 < \gamma < N^2/6$ (фиг. 2, *b*), затем при $\gamma = N^2/6$ (фиг. 2, *c*) вершины ромба при $\alpha = -\beta$ "сглаживаются", при $N^2/6 < \gamma < N^2/4$ эти вершины обращены внутрь контура (фиг. 2, *d*). Координаты вершин при $0 < \gamma < N^2/4$ суть $(\pm\sqrt{N^2 + 4\gamma}, \pm\sqrt{N^2 + 4\gamma})$ при $\alpha = \beta$ (им отвечает $u_0 = 1$) и $(\pm\sqrt{N^2 - 4\gamma}, \mp\sqrt{N^2 - 4\gamma})$ при $\alpha = -\beta$ (им отвечает $u_0 = -1$).

При $\gamma = N^2/4$ вершины фигуры при $\alpha = -\beta$ смыкаются в начале координат, и образуются две замкнутые кривые, касающиеся друг друга (фиг. 2, *e*). При $\gamma > N^2/4$ эти две кривые расходятся (фиг. 2, *f*), с ростом γ их размеры уменьшаются. Координаты точек этих кривых, лежащих на оси $\alpha = \beta$, суть $(\pm\sqrt{N^2 + 4\gamma}, \pm\sqrt{N^2 + 4\gamma})$ (им отвечает $u_0 = 1$) и $(\pm(4\gamma - N^2)/(2\sqrt{\gamma}), \pm(4\gamma - N^2)/(2\sqrt{\gamma}))$ (им отвечает $u_0 = (2\gamma - N^2)/(2\gamma)$).



Фиг. 2

Штриховыми линиями на фиг. 2 показаны кривые $c = 0$ (при $\gamma = 0$ (фиг. 2, *a*) кривая $c = 0$ стягивается в одну точку – начало координат). При $0 \leqslant \gamma < N^2/6$ (фиг. 2, *a,b*) кривая $c = 0$ целиком лежит внутри резонансной кривой $\omega_0 = N$. При $\gamma = N^2/6$ (фиг. 2, *c*) вершины кривой $c = 0$ при $\alpha = -\beta$ лежат на сторонах резонансной кривой $\omega_0 = N$, а при $\gamma > N^2/6$ (фиг. 2, *d–f*) кривые $c = 0$ и $\omega_0 = N$ пересекаются в четырех точках, этим общим точкам отвечает значение $u_0 = (\sqrt{6N^4 + 225\gamma^2} - 6N^2)/(15\gamma)$ параметра u_0.

Пусть теперь N пробегает последовательно ряд целых чисел. При фиксированном значении γ в плоскости параметров $(\alpha,\ \beta)$ имеем ряд вложенных друг в друга замкнутых кривых (или пар кривых, как на фиг. 2, e, f) $\omega_0 \doteq N$ (N = 1, 2, 3, ...), на которых имеет место резонанс в вынужденных колебаниях, причем кривая, отвечающая бóльшему значению N, охватывает все кривые с мéньшими N. Каждая резонансная кривая имеет один из шести приведенных на фиг. 2 видов, в зависимости от N и γ, как было описано выше.

Проведем теперь, следуя [1], нормализацию гамильтониана (3.1). Сделаем замену переменных $x = \varepsilon^{1/3} x^*$, $y = \varepsilon^{1/3} y^*$, а затем аналогично разд. 2 нормализуем гамильтониан H_0. Преобразованный гамильтониан H^* примет вид

$$H^* = \tfrac{1}{2}\omega_0(q^{*2} + p^{*2}) + \tfrac{1}{4}\varepsilon^{2/3} c(q^{*2} + p^{*2})^2 - \varepsilon^{2/3}\sqrt{\omega_0}\sin\theta_0 \sin\tau p^* + O(\varepsilon)$$

где коэффициент c определен в (2.3).

Положим $q^* = \sqrt{2r}\sin\varphi$, $p^* = \sqrt{2r}\cos\varphi$ и далее при помощи канонической замены переменных

$$r = r_* + \tfrac{1}{2}\varepsilon^{2/3}\sqrt{2r_*\omega_0}\sin\theta_0 \sin(\varphi_* + \tau) + O(\varepsilon)$$

$$\varphi = \varphi_* + \varepsilon^{2/3}\frac{\sqrt{2\omega_0}}{4\sqrt{r_*}}\sin\theta_0 \cos(\varphi_* + \tau) + O(\varepsilon)$$

уничтожим в гамильтониане слагаемые с нерезонансной гармоникой $\sin(\varphi + \tau)$. Получим гамильтониан вида

$$H^* = \omega_0 r_* + \varepsilon^{2/3} c r_*^2 + \varepsilon^{2/3}\varkappa_1\sqrt{r_*}\sin(\varphi_* - \tau) + O(\varepsilon) \tag{3.3}$$

$$\varkappa_1 = \sqrt{\omega_0/2}\sin\theta_0$$

Гамильтониан (3.3) в членах порядка $\varepsilon^{2/3}$ содержит только одну резонансную гармонику $\sin(\varphi_* - \tau)$, отвечающую случаю $\omega_0 \simeq 1$. Резонансные слагаемые при $\omega_0 \simeq N$ ($N > 1$) могут содержаться в членах более высокого порядка по ε и здесь не рассматриваются.

Будем далее считать, что $\omega_0 = 1 + \varepsilon^{2/3}\mu_*$. Сделаем замену переменных $\varphi_*, r_* \to \psi, \rho$, по формулам

$$\varphi_* = \tau + \sigma\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right), \quad r_* = \left(\frac{\varkappa_1}{c}\right)^{2/3}\rho \quad (\sigma = \operatorname{sign} c)$$

и введем новую независимую переменную $\eta = \varepsilon^{2/3} |c|^{1/3} \varkappa_1^{2/3}\tau$.

Гамильтониан (3.3) преобразуется к виду

$$\Gamma = \Gamma_0 + O(\varepsilon^{1/3}), \quad \Gamma_0 = -\mu\rho + \rho^2 + \sqrt{\rho}\cos\psi \tag{3.4}$$

$$\mu = -\frac{\sigma\mu_*}{|c|^{1/3}\varkappa_1^{2/3}}$$

характерному для рассматриваемого здесь резонансного случая [1].

В зависимости от величины резонансной расстройки μ система с гамильтонианом (3.4) имеет одно ($\mu < 3/2$) или три ($\mu > 3/2$) периодических решения с периодом $T = 2\pi\varepsilon^{2/3} |c|^{1/3} \varkappa_1^{2/3}$; им отвечают 2π-периодические движения системы с гамильтонианом (1.4), имеющие вид

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{\varepsilon\varkappa_1}{|c|}\right)^{1/3}\sigma\sqrt{2\rho_*}\cos(\tau + \sigma\psi_*) + O(\varepsilon^{2/3}) \tag{3.5}$$

и описывающие резонансные вынужденные колебания оси волчка.

В (3.5) ψ_* и ρ_* – значения переменных ψ и ρ в положениях равновесия модельной системы с гамильтонианом Γ_0: при $\mu < 3/2$:

$$\rho_* = \rho_{(0)} = -\frac{|\mu|}{3}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3} + \frac{\mu}{3}, \quad \operatorname{ch}\varphi = \frac{27 - 4\mu^3}{4|\mu|^3}, \quad \psi_* = \psi_{(0)} = \pi$$

а при $\mu > 3/2$:

$$\rho_* = \rho_i, \quad \psi_* = \psi_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\rho_1 = -\frac{\mu}{3}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{\mu}{3}, \quad \rho_2 = -\frac{\mu}{3}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{\mu}{3}$$

$$\rho_3 = -\frac{\mu}{3}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\mu}{3}, \quad \cos\varphi = \frac{4\mu^3 - 27}{4\mu^3}$$

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = \pi$$

Движение (3.5), отвечающее $\rho_* = \rho_{(0)}$, устойчиво; из трех движений при $\mu > 3/2$ два (при $\rho_* = \rho_1$ и $\rho_* = \rho_3$) устойчивы, а одно (при $\rho_* = \rho_2$) неустойчиво [1].

2π-периодическим движениям (3.5) системы с гамильтонианом (1.4) отвечают близкие к регулярным прецессиям движения волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса, при этом угол θ отклонения оси волчка от вертикали, а также угловые скорости прецессии и собственного вращения (см. (1.2)) являются периодическими функциями времени с периодом, равным периоду колебаний точки подвеса. При $\mu < 3/2$ имеем одно такое движение, устойчивое по отношению к переменным θ и p_θ, а при $\mu > 3/2$ – три движения, два из которых устойчивы, а одно неустойчиво.

Если принять изображенные на фиг. 2 резонансные кривые соответствующими случаю $N = 1$, то можно дать следующее графическое описание приведенных здесь результатов. На фиг. 2 штрих-пунктирными линиями показаны (качественно) бифуркационные кривые (отвечающие значению $\mu = 3/2$) в малой окрестности, ширины порядка $\varepsilon^{2/3}$, резонансных кривых. Исключены из рассмотрения окрестности точек резонансных кривых, для которых $|\alpha| = |\beta|$, а также тех точек, где резонансные кривые пересекаются с кривыми $c = 0$ (штриховые линии).

Для точек (α, β) (при данном значении γ), лежащих между бифуркационной и резонансной кривыми, а также для точек на резонансной кривой и точек, лежащих по другую ее сторону в малой окрестности ($\sim \varepsilon^{2/3}$), имеем одно периодическое движение волчка Лагранжа, являющееся устойчивым; для точек же (α, β), лежащих по другую сторону от бифуркационной кривой, существует три таких движения (два устойчивых и одно неустойчивое).

Отметим, что любое движение волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса при резонансе в вынужденных колебаниях, начинающееся достаточно близко к его регулярной прецессии в невозмущенной ($\varepsilon = 0$) задаче, остается ограниченным. Оценка ширины окрестности ограниченности движения для гамильтоновых систем с одной степенью свободы, описываемых гамильтонианом (3.4), отвечающим резонансу в вынужденных колебаниях, дана в Приложении. В случае рассматриваемого здесь движения волчка Лагранжа при $\mu < 3/2$ справедливо неравенство

$$|\theta(t) - \theta_0| \leqslant \left(\frac{\varepsilon \varkappa_1}{|c|}\right)^{1/3} \sqrt{2\delta_1}\,(1 + O(\varepsilon^{1/3}))$$

а при $\mu > 3/2$ имеем

$$|\theta(t) - \theta_0| \leqslant 2\left(\frac{\varepsilon \varkappa_1}{|c|}\right)^{1/3} \sqrt{\delta_2}\,(1 + O(\varepsilon^{1/3}))$$

Здесь δ_1 – вещественный корень уравнения (5.5) Приложения, а величина δ_2 определена в формуле (5.6) Приложения.

Угловые скорости прецессии $\dot\psi$ и собственного вращения $\dot\varphi$ (см. формулы (1.2)) являются ограниченными функциями угла θ; их отклонения от постоянных значений в невозмущенной задаче имеют порядок $\varepsilon^{1/3}$.

4. Движения волчка при отсутствии резонанса в вынужденных колебаниях. *4.1. Нерезонансные вынужденные колебания и их устойчивость.* Пусть теперь отсутствует резонанс в вынужденных колебаниях, то есть собственная частота ω_0 малых колебаний системы с гамильтонианом (3.1) не близка к целому числу. Тогда из положения равновесия $\theta = \theta_0, p = 0$ невозмущенной системы рождается при $\varepsilon \neq 0$ 2π-периодическое по τ движение вида

$$\theta = \theta_0 + x_0(\tau),\quad x_0(\tau) = \varepsilon f_1(\tau) + \varepsilon^2 f_2(\tau) + O(\varepsilon^3)$$

$$p = y_0(\tau),\quad y_0(\tau) = \varepsilon s_1(\tau) + \varepsilon^2 s_2(\tau) + O(\varepsilon^3) \tag{4.1}$$

$$f_1(\tau) = -\frac{\sin\theta_0\cos\tau}{\omega_0^2 - 1},\quad s_1(\tau) = \frac{\omega_0^2\sin\theta_0\sin\tau}{\omega_0^2 - 1}$$

$$f_2(\tau) = \left[\frac{\sin 2\theta_0}{4(\omega_0^2 - 1)} - \frac{3a_3\sin^2\theta_0}{2(\omega_0^2 - 1)^2}\right]\left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos 2\tau}{\omega_0^2 - 4}\right)$$

$$s_2(\tau) = \frac{12a_3\sin^2\theta_0 + (\omega_0^2 - 1)(2 - \omega_0^2)\sin 2\theta_0}{4(\omega_0^2 - 1)^2(\omega_0^2 - 4)}\sin 2\tau$$

(константа a_3 определена в (2.1)), описывающее нерезонансные вынужденные колебания оси волчка.

Каноническая замена переменных $x = x_0(\tau) + x^*, y = y_0(\tau) + y^*$ уничтожает в гамильтониане (3.1) слагаемые, линейные по x и y. Преобразованный гамильтониан примет вид

$$K = K_2 + K_3 + K_4 + O_5 \tag{4.2}$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}(\omega_0^2 x^{*2} + y^{*2}) + \varepsilon[3a_3 f_1 x^{*2} - \sin\tau\cos\theta_0 x^* y^*] +$$

$$+\varepsilon^2[(6a_4 f_1^2 + \tfrac{1}{2}s_1\sin\tau\sin\theta_0 + \tfrac{1}{2}\sin^2\tau\cos 2\theta_0 + 3a_3 f_2)x^{*2} + f_1\sin\tau\sin\theta_0 x^* y^*] + O(\varepsilon^3)$$

$$K_3 = a_3 x^{*3} + \varepsilon(4a_4 f_1 x^{*3} + \tfrac{1}{2}\sin\tau\sin\theta_0 x^{*2} y^*) +$$

$$+\varepsilon^2[(\tfrac{1}{6}s_1\sin\tau\cos\theta_0 - \tfrac{1}{3}\sin^2\tau\sin 2\theta_0 + 4a_4 s_2)x^{*3} + \tfrac{1}{2}f_1\sin\tau\cos\theta_0 x^{*2} y^*] + O(\varepsilon^3)$$

$$K_4 = a_4 x^{*4} + \tfrac{1}{6}\varepsilon\sin\tau\cos\theta_0 x^{*3} y^* - \tfrac{1}{6}\varepsilon^2\sin^2\tau\cos 2\theta_0 x^{*4} + O(\varepsilon^3)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости движения (4.1).

Пусть сначала в системе отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно (величины $2\omega_0$, $3\omega_0$, $4\omega_0$ не близки к целым числам). Условия $2\omega_0 = N$, $3\omega_0 = N$ и $4\omega_0 = N$, где N – целое число, а N/k ($k = 2, 3, 4$) – не целое число, эквивалентны уравнениям вида (3.2), где вместо N необходимо подставить соответственно $N/2$, $N/3$ и $N/4$; при этом величина u_0 является корнем уравнения (2.5). Поэтому множество точек плоскости (α, β) (при фиксированном значении γ), на котором выполняется условие $k\omega_0 = N$ ($k = 2, 3, 4$), описывается так же, как в разд. 3 соответствующее множество точек в случае резонанса в вынужденных колебаниях, только надо везде вместо N сделать подстановку N/k ($k = 2, 3, 4$). Это множество точек имеет, в зависимости от N, k и γ, один из шести видов, показанных на фиг. 2 сплошными линиями. В разд. 4.2 будет рассмотрен случай параметрического резонанса ($2\omega_0 \approx N$), в разд. 4.3 – случай резонанса третьего порядка ($3\omega_0 \simeq N$). Случай резонанса четвертого порядка ($4\omega_0 \simeq N$) в членах ~ $\varepsilon^{2/3}$ в гамильтониане (4.2) не реализуется; для его выявления следует рассмотреть члены более высокого порядка по ε, в данной работе это исследование не проводится.

Исключив из рассмотрения точки, принадлежащие реонансным кривым (до четвертого порядка включительно) и их окрестностям, положим $x^* = \varepsilon u/\sqrt{\omega_0}$, $y^* = \varepsilon\sqrt{\omega_0}v$ и при помощи канонической замены переменных $u, v \to u^*, v^*$, получаемой, например, методом Депри – Хори [9], нормализуем форму K_2 и уничтожим независимую переменную τ в членах третьей степени K_3. Тогда гамильтониан примет вид

$$K^* = \frac{1}{2}\lambda(u^{*2} + v^{*2}) + \frac{\varepsilon a_3}{\omega_0^{3/2}}u^{*3} + \frac{\varepsilon^2 a_4}{\omega_0^2}u^{*4} + O(\varepsilon^3) \tag{4.3}$$

где характеристический показатель λ определяется выражением

$$\lambda = \omega_0 + \varepsilon^2\omega_{(2)} + O(\varepsilon^3) \tag{4.4}$$

$$\omega_{(2)} = \frac{3a_4\sin^2\theta_0}{\omega_0(\omega_0^2-1)^2} + \frac{3a_3(6\omega_0^2-1)\sin\theta_0}{2\omega_0^3(\omega_0^2-1)^2(4\omega_0^2-1)}\times$$

$$\times[\cos\theta_0(\omega_0^2-1) - 3a_3\sin\theta_0] + \frac{1-\omega_0^2+(5\omega_0^2-2)\sin^2\theta_0}{4\omega_0(\omega_0^2-1)(4\omega_0^2-1)}$$

Наконец, при помощи канонического преобразования $u^*, v^* \to \hat{u}, \hat{v}$ типа преобразования Биркгофа (как в разд. 2) приведем гамильтониан (4.3) к следующему виду:

$$\hat{K} = \tfrac{1}{2}\lambda(\hat{u}^2 + \hat{v}^2) + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 c(\hat{u}^2 + \hat{v}^2)^2 + O(\varepsilon^3)$$

где константа c задается формулой (2.3).

На основании теоремы Арнольда – Мозера [8] рассматриваемое периодическое движение устойчиво, за исключением, быть может, тех значений параметров α, β, γ, для которых $c = 0$. Геометрическое место точек (α, β) для каждого фиксированного значения γ, при которых $c = 0$, описано в п. 2.

4.2. Случай параметрического резонанса. Пусть в системе с гамильтонианом (4.2) имеет место параметрический резонанс ($2\omega_0 \simeq N$). Полагая, следуя [2], $x^* = \sqrt{\varepsilon}u/\sqrt{\omega_0}$, $y^* = \sqrt{\varepsilon\omega_0}v$, преобразуем гамильтониан (4.2) к виду

$$K = \frac{1}{2}\omega_0(u^2+v^2) + \varepsilon\left[-\frac{3a_3\sin\theta_0\cos\tau}{\omega_0(\omega_0^2-1)}u^2 - \cos\theta_0\sin\tau uv\right] +$$

$$+\frac{\varepsilon^{1/2}a_3u^3}{\omega_0^{3/2}} + \frac{\varepsilon a_4u^4}{\omega_0^2} + O(\varepsilon^{3/2})$$

Делая далее замену переменных $u = \sqrt{2r}\sin\varphi$, $v = \sqrt{2r}\cos\varphi$ и уничтожая при помощи, например, метода Депри – Хори слагаемые с нерезонансными гармониками, а также члены третьей степени, и приводя к нормальной форме члены четвертой степени, получим гамильтониан вида (оставляем прежние обозначения φ, r):

$$K^* = \omega_0 r + \varepsilon\varkappa_2 r\cos(2\varphi - \tau) + \varepsilon c r^2 + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{4.5}$$

$$\varkappa_2 = \frac{3a_3\sin\theta_0}{2\omega_0(\omega_0^2-1)} - \frac{1}{2}\cos\theta_0$$

где константа c определена в (2.3).

Как и в п. 3, в членах наименьшего порядка по ε в гамильтониане (4.5) имеем резонансное слагаемое, отвечающее $N = 1$. Коэффициент $\varkappa_2$ в этом слагаемом на резонансной кривой $2\omega_0 = 1$ определяется выражением $\varkappa_2 = -4\gamma(1 - u_0^2) < 0$.

Положим $\omega_0 = 1/2 + \varepsilon\mu_*$. Делая замену переменных $\varphi, r \to \psi, \rho$ по формулам

$$\varphi = \frac{1}{2}\tau + \sigma\psi + \frac{\pi}{4}(1+\sigma), \quad r = \left|\frac{\varkappa_2}{c}\right|\rho \quad (\sigma = \operatorname{sign} c)$$

и переходя к новой независимой переменной $\eta = \varepsilon|\varkappa_2|\tau$, получим характерный для случая параметрического резонанса [2] гамильтониан вида

$$V = V_0 + O(\varepsilon^{1/2}), \quad V_0 = -\mu\rho + \rho\cos 2\psi + \rho^2 \tag{4.6}$$

$$\mu = -\sigma\mu_* / |\varkappa_2|$$

При $|\mu| < 1$ (область параметрического резонанса) движение (4.1) неустойчиво, при $|\mu| > 1$ имеет место устойчивость [2]. В окрестности движения (4.1) система с гамильтонианом (1.4) имеет [2] при $\mu > 1$ два 4π-периодических движения вида

$$\theta = \theta_0 + x_0(\tau) + 2\sqrt{\varepsilon\left|\frac{\varkappa_2}{c}\right|\rho_*}\,\sin\left[\frac{1}{2}\tau + \sigma\psi_* + \frac{\pi}{4}(1+\sigma)\right] + O(\varepsilon) \tag{4.7}$$

где $\psi_* = \psi_i$, $\rho_* = \rho_i$ ($i = 1, 2$) – равновесные значения ψ и ρ модельной системы с гамильтонианом V_0 (см. (4.6)):

$$\rho_1 = (\mu+1)/2, \quad \rho_2 = (\mu-1)/2, \quad \psi_1 = \pi/2, \quad \psi_2 = 0$$

Движение, отвечающее ρ_1, устойчиво, а движение, отвечающее ρ_2, неустойчиво [2].

В области параметрического резонанса $|\mu| < 1$ в окрестности вынужденных колебаний (4.1) имеется одно 4π-периодическое движение вида (4.7), где $\psi_* = \psi_1$, $\rho_* = \rho_1$, являющееся устойчивым. Наконец, при $\mu < -1$ в окрестности (4.1) таких движений нет.

Решениям (4.7) отвечают близкие к регулярным прецессиям движения волчка Лагранжа, когда угол отклонения его оси от вертикали, угловые скорости прецессии и собственного вращения (см. (1.2)) являются периодическими функциями времени с периодом, равным удвоенному периоду колебаний точки подвеса. Таких движений может быть два ($\mu > 1$), одно ($|\mu| < 1$) или ни одного ($\mu < -1$).

Так же, как в случае резонанса в вынужденных колебаниях (разд. 3), можно дать графическую интерпретацию результатов. В окрестности (ширины порядка $\varepsilon^{1/2}$) резонансной кривой $2\omega_0 = 1$ по обе ее стороны (кроме малых окрестностей точек резонансной кривой, где $|\alpha| = |\beta|$, и точек ее пересечения с кривой $c = 0$) можно нарисовать бифуркационные кривые, на которых $|\mu| = 1$. Для точек, лежащих между этими кривыми (включая точки на резонансной кривой), имеем одно устойчивое близкое к регулярной прецессии движение волчка Лагранжа; для точек вне кривых, на которых $|\mu| = 1$, по одну сторону (в зависимости от знака коэффициента c) существует два таких движения (одно устойчивое и одно неустойчивое), а по другую сторону таких движений нет.

Отметим, что, несмотря на неустойчивость движения (4.1) в области параметрического резонанса, любое движение оси волчка, начинающееся достаточно близко к ее вынужденным колебаниям (4.1), остается ограниченным. Именно, справедлива оценка [2]:

$$|\theta - \theta_0 - x_0(\tau)| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon\left|\frac{\varkappa_2}{c}\right|\rho'}$$

где ρ' во все время движения не превосходит величину, близкую $1 + \mu$. Остаются ограниченными и угловые скорости прецессии и собственного вращения волчка; их отклонения от постоянных значений в невозмущенной задаче имеют порядок $\varepsilon^{1/2}$.

4.3. Резонанс третьего порядка. Пусть теперь в системе с гамильтонианом (4.2) величина $2\omega_0$ не близка к целому числу. Сделаем в (4.2) замену переменных $x^* = \varepsilon u/\sqrt{\omega_0}$, $y^* = \varepsilon\sqrt{\omega_0}v$ и далее, как в п. 4.1, при помощи канонической замены $u, v \to u^*, v^*$ приведем члены второго порядка в гамильтониане к нормальной форме $\lambda(u^{*2} + v^{*2})/2$ (характеристический показатель λ определен в (4.4)). При этом гамильтониан примет вид

$$K^* = \frac{1}{2}\lambda(u^{*2} + v^{*2}) + \frac{\varepsilon a_3 u^{*3}}{\omega_0^{3/2}} + \varepsilon^2(d_1 \cos\tau u^{*3} + d_2 \sin\tau u^{*2} v^*) + \frac{\varepsilon^2 a_4}{\omega_0^2} v^{*4} + O(\varepsilon^3)$$

$$d_1 = \frac{3a_3 d}{\omega_0^{3/2}} - \frac{4a_4 \sin\theta_0}{\omega_0^{3/2}(\omega_0^2 - 1)}, \quad d_2 = \frac{-12a_3 d + \sin\theta_0}{2\omega_0^{1/2}}$$

$$d = \frac{6a_3 \sin\theta_0}{(\omega_0^2 - 1)(4\omega_0^2 - 1)} - \frac{\cos\theta_0}{4\omega_0^2 - 1}$$

Пусть в системе имеет место резонанс третьего порядка, то есть величина 3λ близка к целому числу N. Положим $u^* = \sqrt{2r}\sin\varphi$, $v^* = \sqrt{2r}\cos\varphi$ и далее осуществим еще одну каноническую замену переменных $\varphi, r \to \varphi^*, r^*$, уничтожающую в членах третьей степени слагаемые с нерезонансными гармониками и приводящую члены четвертой степени к нормальной форме. Преобразованный гамильтониан примет вид

$$W^* = \lambda r^* + 2\sqrt{2}\varepsilon^2 r^{*3/2}\varkappa_3 \sin(3\varphi^* - \tau) + \varepsilon^2 c r^{*2} + O(\varepsilon^3) \qquad (4.8)$$

где $\varkappa_3 = (d_2 - 2d_1)/8$, а константа c определена в (2.3).

Гамильтониан (4.8) в членах наименьшей степени по ε содержит резонансное слагаемое, отвечающее $N = 1$. Коэффициент $\varkappa_3$ в этом слагаемом на резонансной кривой $3\omega_0 = 1$ отличен от нуля; действительно, величину $\varkappa_3$ можно привести к виду

$$\varkappa_3 = -\frac{\sqrt{3}}{320\sin\theta_0}[11664(1 - u_0^2)^2\gamma^2 - 108u_0(1 - u_0^2)\gamma + (20 - 5u_0^2)]$$

Рассмотрим стоящее в квадратных скобках выражение как квадратный трехчлен относительно параметра γ. Его дискриминант $D = 11664(1 - u_0^2)^2(21u_0^2 - 80) < 0$ при $|u_0| < 1$. Поэтому квадратный трехчлен положителен при любых значениях γ и, следовательно, $\varkappa_3 < 0$.

Положим $\lambda = 1/3 - \varepsilon^2\mu_*$. Осуществим замену переменных

$$r^* = \frac{8\varkappa_3^2}{c^2}\rho, \quad \varphi^* = \frac{\tau}{3} + \sigma\psi + \frac{\pi}{6}(2 + \sigma) \quad (\sigma = \operatorname{sign} c)$$

и перейдем к новой независимой переменной $\eta = 8\varepsilon^2\varkappa_3^2/|c|$. Тогда гамильтониан (4.8) преобразуется к виду, характерному для рассматриваемого здесь резонанса третьего порядка [3]:

$$W = W_0 + O(\varepsilon), \quad W_0 = -\mu\rho + \rho^{3/2}\cos 3\psi + \rho^2, \quad \mu = \frac{\mu_* c}{8\varkappa_3^2} \qquad (4.9)$$

Движение (4.1) неустойчиво при $\mu = 0$ и устойчиво при $\mu \neq 0$ [9]. В его окрестности система с гамильтонианом (1.4) имеет [3] при $\mu > -9/32$ $(\mu \neq 0)$ два 6π-периодических движения вида

$$\theta = \theta_0 + x_0(\tau) + \frac{4\varepsilon|\varkappa_3|}{|c|}\sqrt{3\rho_*}\sin\left[\frac{1}{3}\tau + \sigma\psi_* + \frac{\pi}{6}(2 + \sigma)\right] + O(\varepsilon^2) \qquad (4.10)$$

Здесь $\psi_* = \psi_i$, $\rho_* = \rho_i$ ($i = 1, 2$) – равновесные значения ψ и ρ модельной системы с гамильтонианом W_0 (см. (4.9)): $\rho_{1,2} = (16\mu + 9 \pm 3\sqrt{9+32\mu})/32$ ($\rho_1 < \rho_2$), $\psi_1 = \pi/3$ при $-9/32 < \mu < 0$ и $\psi_1 = 0$ при $\mu > 0$, $\psi_2 = \pi/3$. Движение, отвечающее $\rho_* = \rho_1$, неустойчиво, а движение, отвечающее $\rho_* = \rho_2$, устойчиво. При $\mu = 0$ имеется одно решение вида (4.10) для $\rho_* = \rho_2$, $\psi_* = \psi_2$, являющееся устойчивым. Если $\mu < -9/32$, то в системе нет 6π-периодических движений, отличных от (4.1).

Соотношение

$$\omega_0 = \frac{1}{3} - \varepsilon^2 \hat{\omega}_{(2)} + \varepsilon^2 \frac{9\hat{\varkappa}_3^2}{4\hat{c}} + O(\varepsilon^3)$$

где $\hat{\omega}_{(2)}$, $\hat{\varkappa}_3$ и $\hat{c}$ суть вычисленные на резонансной кривой $3\omega_0 = 1$ величины $\omega_{(2)}$, $\varkappa_3$ и c, задает бифуркационную кривую (отвечающую $\mu = -9/32$), при переходе через которую меняется число 6π-периодических движений системы с гамильтонианом (1.4).

Решениям вида (4.10) отвечают близкие к регулярным прецессиям движения волчка, когда угол отклонения его оси от вертикали, а также угловые скорости (1.2) прецессии и собственного вращения являются периодическими функциями времени с периодом, равным утроенному периоду колебаний точки подвеса волчка. Таких движений может быть либо два ($\mu > -9/32$), одно из которых устойчиво по отношению к переменным θ, p_θ, а другое неустойчиво (при $\mu = 0$ одно устойчивое движение), либо ($\mu < -9/32$) ни одного.

Любые движения оси волчка, начинающиеся достаточно близко к ее вынужденным колебаниям (4.1), остаются ограниченными [3]: если $\mu < 27/32$, то справедлива оценка

$$|\theta - \theta_0 - x_0(\tau)| \leqslant 4\varepsilon \frac{|\varkappa_3|}{|c|} \sqrt{3R_1}(1 + O(\varepsilon))$$

где R_1 – вещественный корень уравнения

$$\rho^2 - \rho^{3/2} - \mu\rho = \frac{9}{64}\left(\frac{33}{64} - \mu\right)$$

при $\mu \neq 33/64$ и $R_1 = 121/64$ при $\mu = 33/64$; если же $\mu \geqslant 27/32$, то

$$|\theta - \theta_0 - x_0(\tau)| \leqslant 4\varepsilon \frac{|\varkappa_3|}{|c|} \sqrt{6R_2}(1 + O(\varepsilon))$$

где R_2 – вещественный корень уравнения

$$\rho^2 - \rho^{3/2} - \mu\rho = \rho_1^2 + \rho_1^{3/2} - \mu\rho_1$$

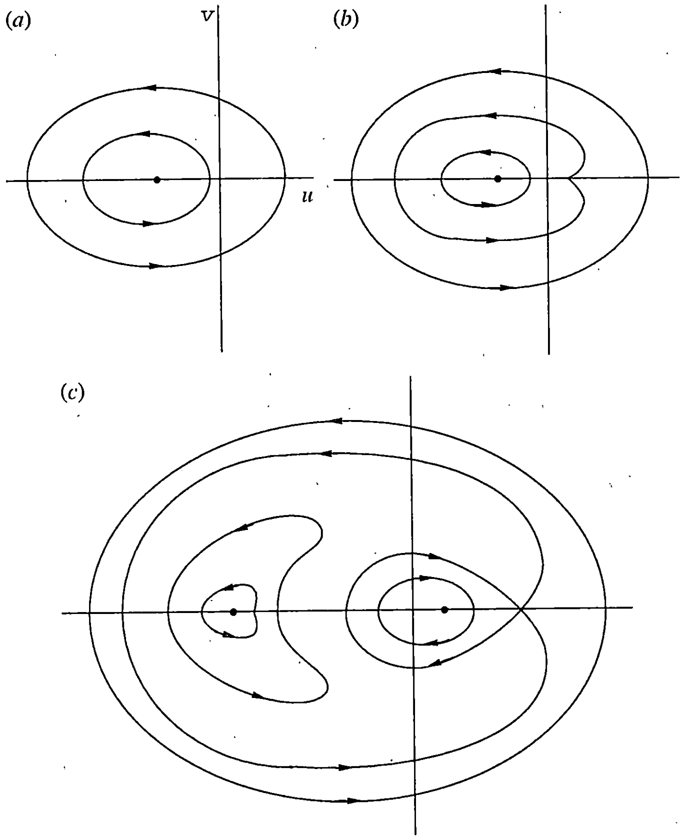
При этом отклонения угловых скоростей прецессии и собственного вращения волчка от их постоянных значений в невозмущенной задаче имеют порядок ε.

5. Приложение: оценка области ограниченности движения при резонансе в вынужденных колебаниях. Рассмотрим движение гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях. Пусть гамильтониан системы уже приведен к виду (3.4), где гамильтониан Γ_0 отвечает модельной системе, описываемой уравнениями

$$\frac{d\theta}{d\eta} = -\mu + 2\rho + \frac{\cos\theta}{2\sqrt{\rho}}, \quad \frac{d\rho}{d\eta} = \sqrt{\rho}\sin\theta \tag{5.1}$$

Система (5.1) имеет первый интеграл вида

$$\Gamma_0 = h = \text{const} \tag{5.2}$$



Фиг. 3

На фиг. 3, a, b, c в плоскости переменных $u = \sqrt{2\rho}\cos\theta$, $v = \sqrt{2\rho}\sin\theta$ изображены фазовые портреты системы (5.1) для случаев $\mu < 3/2$, $\mu = 3/2$, $\mu > 3/2$ соответственно [1]. Через неустойчивую особую точку системы (при $\mu \geqslant 3/2$) проходит сепаратриса, разделяющая области с различным характером движений системы. Другим траекториям модельной системы отвечают либо колебания в окрестности устойчивых положений равновесия, либо колебания (при $\mu \geqslant 3/2$, фиг. 3, b, c), охватывающие все особые точки.

Введем в модельной системе (5.1) переменные действие – угол I, w [10], полагая

$$I(h) = \frac{1}{2\pi}\oint \rho(\theta, h)d\theta \tag{5.3}$$

Интегрирование в (5.3) проводится вдоль замкнутой траектории $\rho = \rho(\theta, h)$, отвечающей колебанию системы, причем для случая $\mu \geqslant 3/2$ берутся только траектории, охватывающие все особые точки модельной системы. Обратная к (5.3) функция $h = h(I)$ представляет собой гамильтониан Γ_0, записанный в переменных действие – угол.

Оценим размеры окрестности начала координат, вне которой на рассматриваемых траекториях выполняется условие невырожденности $d^2h/dI^2 \neq 0$. Из (5.2) и (5.3) можно получить следующее выражение для d^2h/dI^2:

$$\frac{d^2h}{dI^2} = \frac{\omega^3}{2\pi}\oint \frac{\partial^2\Gamma_0/\partial\rho^2}{(\partial\Gamma_0/\partial\rho)^3}d\theta = \frac{\omega^3}{2\pi}\oint \frac{2 - 1/4\cos\theta\rho^{-3/2}}{(-\mu + 2\rho + 1/2\cos\theta\rho^{-1/2})^3}d\theta \tag{5.4}$$

где $\omega = dh/dI$ – частота колебаний.

Очевидно, что знаменатель дроби в (5.4) положителен, так как $\partial\Gamma_0/\partial\rho = \partial\theta/d\eta > 0$ (на рассматриваемых траекториях угол θ монотонно возрастает); числитель же этой дроби положителен на таких траекториях, на которых $\rho > 1/4$ для всех значений угла θ. При этом $d^2h/dI^2 > 0$, и выполняется условие невырожденности.

Пусть сначала $\mu < 3/2$ (фиг. 3, *a*). Существует траектория (одно из колебаний в окрестности устойчивого равновесия), проходящая через точку $\rho = 1/4$, $\theta = 0$. На этой траектории $1/4 \leqslant \rho \leqslant \delta_1$, где δ_1 – единственный в рассматриваемой области вещественный корень уравнения

$$\rho^2 - \sqrt{\rho} - \mu\rho = (9 - 4\mu)/16 \tag{5.5}$$

и, следовательно, выполняется условие невырожденности. Отсюда, на основании теоремы Мозера об инвариантных кривых [8], следует, что отображение, порождаемое движениями системы с полным гамильтонианом (3.4) за период $T \sim \varepsilon^{2/3}$ (в случае движения волчка Лагранжа $T = 2\pi\varepsilon^{2/3}|c|^{1/3}\varkappa_1^{2/3}$), при достаточно малых ε имеет инвариантную кривую, близкую к указанной траектории. Для всех начинающихся внутри этой кривой траекторий системы с гамильтонианом (3.4) справедливо соотношение $\rho(\eta) \leqslant \delta_1(1 + O(\varepsilon^{1/3}))$.

Рассмотрим теперь случай $\mu \geqslant 3/2$. При $\mu = 3/2$ (фиг. 3, *b*) на сепаратрисе имеем $1/4 < \rho \leqslant 9/4$, а при $\mu > 3/2$ (фиг. 3, *c*) на внешней петле сепаратрисы выполняется соотношение $\rho_2 < \rho \leqslant \delta_2$, где величина ρ_2 определена в п. 3, а

$$\delta_2 = \rho_2 + \mu + \sqrt{2(\mu^2 - \sqrt{\rho_2})} \tag{5.6}$$

причем справедлива оценка $\rho_2 > \mu/6 > 1/4$ [1]. Таким образом, при $\mu \geqslant 3/2$ на всех траекториях модельной системы, охватывающих все ее особые точки, имеем $\rho > 1/4$ и, следовательно, выполняется условие невырожденности. Отсюда, на основании теоремы Мозера, вытекает существование инвариантных кривых. Выберем одну из них например, близкую к траектории, на которой величина ρ не превосходит $2\delta_2$. Для всех начинающихся внутри этой инвариантной кривой траекторий системы с полным гамильтонианом (3.4) имеем $\rho(\eta) < 2\delta_2(1 + O(\varepsilon^{1/3}))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холостова О.В.* О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 167–175.
2. *Маркеев А.П.* Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 34–44.
3. *Холостова О.В.* О нелинейных колебаниях спутника при резонансе третьего порядка // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 556–565.
4. *Розе Н.В.* Динамика твердого тела. Л.: КУБУЧ, 1932. 306 с.
5. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952. 352 с.
6. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применения. М.: Мир, 1974. 528 с.
7. *Холостова О.В.* О динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 786–797.
8. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
9. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
10. *Борн М.* Лекции по атомной механике. Харьков; Киев: Гос. научн.-тех. изд-во Украины, 1934. 312 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.10.1999