МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2002

УДК 531.36;531.31

© 2002 г. Ю.Н. ЧЕЛНОКОВ

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЕ КВАТЕРНИОНЫ И ЭТАЛОННЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ. Ч. 1

Разрабатываются теория и методы аналитического построения управлений угловым движением твердого тела, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в большом или в целом любого выбранного программного углового движения и желаемую динамику управляемого углового движения твердого тела. Для построения законов управления используются кватернионные модели вращательного движения твердого тела, концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и приведение дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела к эталонным дифференциальным уравнениям выбранной структуры.

В первой части работы рассматриваются кватернионные модели вращательного движения твердого тела, дается постановка задачи управления ориентацией твердого тела, приводятся различные формы дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела в кватернионных и векторных переменных, удобные для построения законов управления.

Во второй части работы рассматриваются эталонные дифференциальные уравнения, описывающие желаемую динамику управляемого углового движения твердого тела, синтезируются три группы законов управления, использующих кватернионные и векторные кинематические параметры вращательного движения. Обсуждается построение программного углового движения и программного управления, определение коэффициентов (скалярных, матричных, кватернионных) усиления нелинейных обратных связей, обеспечивающих желаемые качественные и количественные характеристики переходных процессов, предлагаются алгоритмы управления.

Работа является обобщением и развитием [1–5].

Введение. Построение управления угловым движением твердого тела в традиционной постановке включает задачу построения программного углового движения, программного управления и задачу построения управления, стабилизирующего программное угловое движение в малом. Задача построения программного углового движения и программного управления во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления [6–18]. Аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольно заданных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости твердого тела не найдено. Поэтому в общем случае приходится рассчитывать лишь на приближенное аналитическое или численное решение задачи. Построение стабилизирующего управления осуществляется на основе линеаризованных дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела и также встречает серьезные трудности в случаях, когда эти уравнения нестационарны.

Большое количество работ посвящено другому подходу к построению управления угловым движением твердого тела [19–26]. Этот подход использует принцип обратной связи для формирования законов управления и метод Ляпунова для анализа устойчивости управляемого углового движения твердого тела. Во многих работах [19–25] этот подход используется для построения управления большими пространственными поворотами космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело. В большинстве из этих работ изучается задача переориентации твердого тела: задача перевода твердого тела из одного фиксированного углового положения в другое (при нулевых угловых скоростях твердого тела в начальном и конечном положениях). Законы управления строятся в виде линейных или нелинейных функций компонент кватерниона ошибки ориентации и вектора угловой скорости твердого тела так, чтобы процесс переориентации был асимптотически устойчивым в большом или в целом. Уравнения движения твердого тела, замкнутые такими законами управления, получаются нелинейными, что затрудняет изучение динамики управляемого углового движения твердого тела и определение коэффициентов усиления обратных связей, гарантирующих желаемые качественные и количественные характеристики переходных процессов.

В работе изучается более общая задача построения управления, обеспечивающего асимптотически устойчивый в большом или в целом перевод твердого тела, имеющего произвольную начальную угловую скорость, из его произвольного заранее незаданного начального углового положения на любую выбранную программную траекторию углового движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории с необходимыми угловыми скоростью и ускорением. При этом переходный процесс должен иметь желаемые качественные и количественные характеристики.

Для решения задачи используются кватернионные модели вращательного движения твердого тела и концепция решения обратных задач динамики, с помощью которой задача построения управляющего момента сводится к задаче синтеза требуемого углового ускорения твердого тела. Последняя задача носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, и поэтому представляет самостоятельный интерес. Требуемое угловое ускорение формируется в виде суммы программного и стабилизирующего угловых ускорений. Построение программного углового ускорения может быть выполнено с помощью методов теории оптимального управления или с помощью других подходов, рассматриваемых в работе (отметим, что в задаче переориентации это ускорение может быть принято равным нулю).

Основное внимание в работе уделяется синтезу стабилизирующего углового ускорения. Оно формируется по принципу обратной связи в виде нелинейной векторной или кватернионной функции компонент кватерниона ошибки ориентации и вектора ошибки по угловой скорости твердого тела так, чтобы нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного углового движения твердого тела, замкнутые законами управления, принимали эталонный вид: вид линейных стационарных дифференциальных уравнений второго порядка относительно векторной или кватернионной переменной, характеризующей конечную ошибку ориентации твердого тела. Постоянные коэффициенты (скалярные, матричные, кватернионные) этих (эталонных) уравнений имеют смысл коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по угловому положению и угловой скорости, реализуемых системой управления угловым движением твердого тела, а сами уравнения описывают эталонную динамику переходных процессов. Это позволяет аналитически точно определять коэффициенты усиления нелинейных обратных связей исходя из желаемых качественных и количественных характеристик переходного процесса.

Центральную роль в построенной теории играют нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного углового движения твердого тела. Применение кватернионов и векторов конечных поворотов позволяет построить компактные и наглядные уравнения возмущенного движения твердого тела, удобные для построения асимптотически устойчивых в большом или в целом управлений ориентацией твердого тела. В работе рассматриваются два кватернионных способа описания ошибок по угловому положению твердого тела: с помощью кватерниона ошибки ориентации, определенного своими компонентами в основной (инерциальной) системе координат, и с помощью кватерниона ошибки ориентации, определенного своими компонентами в связанной с твердым телом системе координат (с помощью собственного кватерниона ошибки ориентации). Кроме этого, рассматриваются два способа описания ошибки по угловой скорости и стабилизирующего углового ускорения твердого тела: векторный, когда ошибка по угловой скорости и стабилизирующее угловое ускорение формируются в виде векторных разностей векторов действительной и программной угловых скоростей твердого тела и векторов требуемого и программного угловых ускорений; формальный, когда ошибка по угловой скорости и стабилизирующее угловое ускорение формируются в виде разностей проекций соответствующих векторов, определенных в разных системах координат. Полученные с помощью этих способов дифференциальные уравнения возмущенного движения различаются как по форме, так и по смыслу используемых переменных, что приводит к разным законам формирования управления.

В работе построены три группы законов управления, использующих различные кинематические параметры вращательного движения твердого тела: векторные части нормированных кватернионов ориентации, векторы конечных поворотов и ненормированные кватернионы поворотов. Использование нормированных кватернионов поворотов в теории и практике управления вращательным движением твердого тела стало общепринятым, поскольку они являются наиболее простым и удобным средством математического описания вращательного движения твердого тела. Использование (при синтезе третьей группы законов управления) ненормированных кватернионов поворотов приводит к необходимости введения расширенного (восьмимерного) вектора состояния твердого тела и расширенного (четырехмерного) вектора управления вместо обычно используемых семимерного вектора состояния и трехмерного вектора управления. Роль переменных состояния твердого тела играют в этом случае ненормированный кватернион ориентации твердого тела и кватернион угловой скорости с ненулевой скалярной частью, а роль управления – кватернион углового ускорения (или кватернион управляющего момента) с ненулевой скалярной частью. Такое расширение вектора состояния и вектора управления позволяет провести синтез четырехмерного стабилизирующего управления в кватернионном виде без разделения кватернионных уравнений движения на скалярную и векторную части. Выделение скалярной и векторной частей, необходимое для построения вектора углового ускорения твердого тела, проводится на конечной стадии (в конечных соотношениях). Решение задачи синтеза стабилизирующего управления на основе кватернионных моделей возмущенного углового движения твердого тела, использующих нормированные кватернионы поворотов, кватернионы угловой скорости и углового ускорения с нулевыми скалярными частями, требует разделения уравнений возмущенного движения на скалярную и векторную части в рамках самой процедуры синтеза, что приводит к более сложному решению задачи синтеза. Кроме этого, законы управления, построенные на основе этих моделей, а также на основе векторных моделей, вырождаются при определенном угловом положении твердого тела в пространстве, в то время как использование при синтезе "четырехмерных" угловых скоростей и ускорений позволяет построить невырождающиеся законы управления.

Отметим, что использование кватернионов поворотов приводит к необходимым и достаточным условиям асимптотической устойчивости установившегося движения твердого тела по уравнениям первого приближения, отличающимся от обычно используемых. Эти условия заключаются в требовании отрицательности скалярных частей двух корней кватернионного квадратного характеристического уравнения вместо требования отрицательности вещественных частей шести корней обычного характеристического уравнения в случае использования для описания вращательного движения твердого тела углов Эйлера-Крылова. Это оказывается полезным при исследовании устойчивости и управления движением твердого тела.

В работе обобщаются и развиваются результаты, полученные в [1–5]. Кватернионный подход использовался также в кинематических задачах управления угловым движением, когда в качестве управления выступает вектор абсолютной угловой скорости твердого тела [9, 27–31], выходного звена робота-манипулятора [32], платформы [33–35].

Предлагаемые законы управления могут быть использованы в инерциальных системах управления угловым движением подвижных объектов, построенных на бесплатформенных принципах, когда подвижный объект имеет на своем борту бесплатформенную инерциальную систему ориентации, измеряющую проекции вектора абсолютной угловой скорости вращения объекта на связанные с ним координатные оси и вырабатывающую с помощью бортового вычислителя компоненты кватерниона действительной ориентации объекта в инерциальной системе координат. Эти законы управления могут быть также реализованы в системах управления движением роботов-манипуляторов, в которых используется принцип управления по абсолютному угловому положению и абсолютной угловой скорости выходного звена робота-манипулятора [32, 36], а также в высокоточных орбитальных платформенных комплексах [33].

Отметим также, что разрабатываемые кватернионные методы решения как кинематических, так и динамических задач управления угловым движением твердого тела могут быть положены в основу новых эффективных методов мультипликационных вращений, используемых для решения задач оживления (анимации) пространственных образов на экране ЭВМ [37].

1. Уравнения движения. Рассмотрим твердое тело, находящееся под действием произвольного главного момента внешних сил, полагая, что выбранный полюс (точка O тела) перемещается в инерциальном пространстве произвольным образом. Угловое движение тела будем рассматривать относительно системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3(\xi)$, перемещающейся относительно инерциальной системы координат $O^*\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*(\xi^*)$ поступательно (одноименные оси систем координат ξ и ξ^* полагаем параллельными), а также относительно опорной (программной) системы координат $OZ_1Z_2Z_3(Z)$, задающей в инерциальном пространстве программное угловое движение твердого тела. С твердым телом жестко свяжем систему координат $OX_1X_2X_3(X)$.

Взаимную ориентацию введенных систем координат зададим кватернионами $\boldsymbol{\lambda}^\circ$, $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{N})$, $\boldsymbol{\nu}^*(\mathbf{N}^*)$, $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\Lambda})$ в соответствии со схемой поворотов

$$\xi \xrightarrow[\boldsymbol{\omega}^\circ,\boldsymbol{\epsilon}^\circ]{\boldsymbol{\lambda}^\circ} Z \xrightarrow{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{N}),\boldsymbol{\nu}^*(\mathbf{N}^*)} X, \quad \xi \xrightarrow[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\epsilon}]{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\Lambda})} X \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}^\circ$, $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\Lambda})$ – кватернионы поворотов, характеризующие программную и действительную ориентации твердого тела в инерциальной системе координат, $\boldsymbol{\lambda}^\circ$, $\boldsymbol{\lambda}$ – нормированные, а $\boldsymbol{\Lambda}$ – ненормированный кватернионы ориентации; $\boldsymbol{\omega}^\circ$, $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$ – векторы программной абсолютной угловой скорости и программного абсолютного углового ускорения твердого тела; $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ – векторы действительной абсолютной угловой скорости и действительного абсолютного углового ускорения твердого тела; $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{N})$, $\boldsymbol{\nu}^*(\mathbf{N}^*)$ – кватернионы ошибки ориентации твердого тела, характеризующие отклонение действительной ориентации тела от его программной ориентации; $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu}^*$ – нормированные кватернионы ошибки ориентации, а $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^*$ – ненормированные.

Кватернионы поворотов определены своими компонентами в следующих системах координат: $\boldsymbol{\lambda}^\circ$ – в $\xi(Z)$, $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\Lambda}$ – в $\xi(X)$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{N}$ – в ξ, $\boldsymbol{\nu}^*$ и $\mathbf{N}^*$ – в $X(Z)$.

Уравнения абсолютного управляемого углового движения твердого тела при использовании для описания ориентации твердого тела нормированного кватерниона ориентации $\boldsymbol{\lambda}$ в кватернионно-матричной записи имеют вид:

$$\omega_x^{\bullet} = \varepsilon_x = J^{-1}(M_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}) - K(\omega_x)J\omega_x + U_x) \tag{1.2}$$

$$2\boldsymbol{\lambda}^{\bullet} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_v = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \mathbf{i}_k, \quad \boldsymbol{\lambda}^{\bullet} = \lambda_0^{\bullet} + \boldsymbol{\lambda}_v^{\bullet} = \lambda_0^{\bullet} + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^{\bullet} \mathbf{i}_k$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3$$

$$J = \begin{Vmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{Vmatrix}, \quad K(\omega_x) = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

Здесь и далее $\omega_x, \omega_x^{\bullet}, \varepsilon_x, M_x, U_x$ – векторы-столбцы размерами 3 × 1 или кватернионы с нулевыми скалярными частями (в этом случае они обозначаются полужирными), составленные из проекций $\omega_k, \omega_k^{\bullet}, \varepsilon_k, M_k, U_k$ $(k = 1, 2, 3)$ векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}^{\bullet}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, **M**, **U** на оси связанной системы координат X; **U** – вектор управляющего момента, приложенного к твердому телу; $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ – главный момент других приложенных к твердому телу внешних сил и переносных сил инерции, вычисленный относительно точки O твердого тела, полагаемый известной функцией времени t и переменных $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$; J – постоянная матрица инерции твердого тела; $K(\omega_x)$ – кососимметрическая матрица угловых скоростей тела, сопоставляемая вектору $\boldsymbol{\omega}$; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – орты гиперкомплексного пространства [9]; λ_j $(j = \overline{0,3})$ – компоненты кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ (параметры Родрига – Гамильтона), одинаковые в базисах ξ и X; $\mathbf{a}_y$ – отображение вектора **a** на базис $Y(Y = \xi, X, Z)$, определяемое как кватернион $\mathbf{a}_y = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3$, компоненты которого – проекции a_k вектора **a** на базис Y; точка означает производную по времени t (при вычислении производной от кватерниона орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ полагаются неизменными), знак $\circ$ означает кватернионное умножение.

Матричное уравнение (1.2) является динамическим, кватернионное уравнение (1.3) – кинематическим уравнением углового движения твердого тела. Они образуют систему нелинейных, нестационарных дифференциальных уравнений седьмого порядка относительно переменных λ_j и ω_k.

Уравнения абсолютного управляемого углового движения твердого тела, использующие для описания ориентации твердого тела ненормированный кватернион ориентации $\boldsymbol{\Lambda}$, имеют вид:

$$\boldsymbol{\Omega}_x^{\bullet} = \mathbf{E}_x = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon}_x \tag{1.5}$$

$$2\boldsymbol{\Lambda}^{\bullet} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}_x \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_x = J^{-1}(M_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}) - K(\omega_x)J\omega_x + U_x) \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} \Lambda_k \mathbf{i}_k = \Lambda_0 + \boldsymbol{\Lambda}_v, \quad \boldsymbol{\Lambda}^{\bullet} = \Lambda_0^{\bullet} + \sum_{k=1}^{3} \Lambda_k^{\bullet} \mathbf{i}_k = \Lambda_0^{\bullet} + \boldsymbol{\Lambda}_v^{\bullet}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_x = \omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \omega_k \mathbf{i}_k = \omega_0 + \boldsymbol{\omega}_x, \quad \boldsymbol{\Omega}_x^{\bullet} = \omega_0^{\bullet} + \sum_{k=1}^{3} \omega_k^{\bullet} \mathbf{i}_k = \omega_0^{\bullet} + \boldsymbol{\omega}_x^{\bullet}$$

$$\mathbf{E}_x = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \mathbf{i}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{i}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{i}_3 = \varepsilon_0 + \boldsymbol{\epsilon}_x$$

Здесь $\mathbf{\Omega}_x$, $\mathbf{E}_x$ – кватернионы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения тела; ω_0, ε_0 и $\boldsymbol{\omega}_x$, $\boldsymbol{\epsilon}_x$ – их скалярные и векторные части ($\boldsymbol{\omega}_x$, $\boldsymbol{\epsilon}_x$ – отображения векторов абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения тела на связанный базис X).

Компоненты ε_k $(k = 1, 2, 3)$ кватерниона $\mathbf{E}_x$ (его векторной части $\boldsymbol{\epsilon}_x$) определяются матричными соотношениями (1.7), (1.4). В (1.7), как и в (1.2), под $\varepsilon_x, M_x, \omega_x, U_x$ понимаются векторы-столбцы размерами 3×1.

Уравнения (1.5)–(1.7) образуют систему нелинейных, в общем случае нестационарных дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно переменных λ_j, ω_j $(j = \overline{0,3})$.

Кватернионы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\Lambda}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\lambda} = \|\boldsymbol{\Lambda}\|^{-1/2}\,\boldsymbol{\Lambda}, \quad \|\boldsymbol{\Lambda}\| = \boldsymbol{\Lambda} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = \Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2$$

Здесь и далее верхняя черта означает сопряженный кватернион.

Скалярная часть ω_0 кватерниона угловой скорости $\mathbf{\Omega}_x$ определяет собой изменение нормы $\|\boldsymbol{\Lambda}\|$ кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}$. Связь ω_0 с $\|\boldsymbol{\Lambda}\|$ имеет вид дифференциальных соотношений

$$\frac{d}{dt}(\|\boldsymbol{\Lambda}\|) = \omega_0 \|\boldsymbol{\Lambda}\|, \quad \omega_0 = \frac{d}{dt}(\ln \|\boldsymbol{\Lambda}\|) \tag{1.8}$$

вытекающих из уравнения (1.6).

Поведение переменной ω_0 в свою очередь определяется (в силу уравнения (1.5)) выбором скалярной части ε_0 кватерниона углового ускорения $\mathbf{E}_x$. Величина ε_0 может быть задана произвольной функцией времени t и переменных Λ_j, $\dot{\Lambda}_j$ (или ω_j).

При выполнении условий

$$\omega_0 = \varepsilon_0 = 0, \qquad \|\boldsymbol{\Lambda}(t_0)\| = 1$$

кватернион $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda}$, а его компоненты $\Lambda_j = \lambda_j$ будут являться параметрами Родрига – Гамильтона. Уравнения (1.5)–(1.7) переходят в этом случае в уравнения (1.2)–(1.3).

2. Задачи управления. Поставим следующую задачу: построить допустимое управление $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\lambda}^\circ(t), \boldsymbol{\omega}^\circ(t), \boldsymbol{\epsilon}^\circ(t), \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$, обеспечивающее асимптотически устойчивый в большом или в целом перевод твердого тела из произвольного, заранее незаданного начального состояния $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$, $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ на любую выбранную программную траекторию $\boldsymbol{\lambda}^\circ = \boldsymbol{\lambda}^\circ(t)$, $\boldsymbol{\omega}^\circ = \boldsymbol{\omega}^\circ(t)$ и дальнейшее асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории. При этом переходный процесс (возмущенное движение тела) должен иметь желаемые качественные и количественные характеристики.

Поставленную задачу будем решать, используя концепцию решения обратных задач динамики и принцип управления с обратной связью. Закон формирования управляющего момента в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики получается на основе соотношения (1.2) и имеет вид

$$U_x = J\varepsilon_x + K(\omega_x)J\omega_x - M_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}) \tag{2.1}$$

Второе и третье слагаемые в этом законе управления обеспечивают компенсацию моментов гироскопического взаимодействия и моментов действующих внешних сил и переносных сил инерции. Они могут быть сформированы по известному вектору $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ текущего состояния твердого тела. Входящее в первое слагаемое закона управления (2.1) требуемое абсолютное угловое ускорение $\boldsymbol{\epsilon}$ может быть построено на основе кватернионных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\epsilon}_x, \quad 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x, \quad \boldsymbol{\epsilon}_x = \varepsilon_1 \mathbf{i}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{i}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{i}_3 \tag{2.2}$$

получающихся из (1.2), (1.3) при учете (2.1), или на основе кватернионных уравнений (1.5), (1.6).

Таким образом, задача построения управляющего момента $\mathbf{U}$ в рассматриваемой постановке сводится к синтезу требуемого абсолютного углового ускорения твердого тела $\boldsymbol{\epsilon}$, входящего в качестве управления в уравнения (2.2) или в (1.5), (1.6). Задача синтеза управления $\boldsymbol{\epsilon}$ носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, так как уравнения (2.2) и (1.5), (1.6) справедливы для любого такого движущегося объекта. Специфика объекта (его инерционные и другие характеристики, действующие моменты внешних возмущающих сил, переносные силы инерции) учитываются при построении управляющего момента $\mathbf{U}$ на основе конечного соотношения (2.1).

Управление $\boldsymbol{\epsilon}$ складывается из программного и стабилизирующего управлений. В соответствии с этим вектор $\boldsymbol{\epsilon}$ будем формировать в связанной системе координат X по формуле

$$\boldsymbol{\epsilon}_x = \boldsymbol{\epsilon}_z^\circ(t) + \delta\boldsymbol{\epsilon}_x = \sum_{k=1}^{3} (\varepsilon_k^\circ(t) + \delta\varepsilon_k)\mathbf{i}_k \qquad (2.3)$$

или по формуле

$$\boldsymbol{\epsilon}_x = \boldsymbol{\epsilon}_x^\circ(t) + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = \overline{\boldsymbol{\nu}}^* \circ \boldsymbol{\epsilon}_z^\circ(t) \circ \boldsymbol{\nu}^* + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_x \qquad (2.4)$$

где $\boldsymbol{\epsilon}_z^\circ$ и $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ (или $\boldsymbol{\Delta}\varepsilon_x$) – отображения векторов программного и стабилизирующего угловых ускорений $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$ и $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ (или $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$) (программного и стабилизирующего управлений) на базисы Z и X соответственно; ε_k° и $\delta\varepsilon_k$ (или $\Delta\varepsilon_k$) – проекции векторов $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$ и $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ (или $\boldsymbol{\Delta}\varepsilon$) на оси Z_k и X_k.

Кватернион $\boldsymbol{\lambda}^\circ$ (его компоненты λ_j° одинаковы в базисах ξ и Z) и векторы $\boldsymbol{\omega}^\circ$, $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$, характеризующие программное угловое движение твердого тела, удовлетворяют уравнениям, аналогичным (2.2):

$$d\boldsymbol{\omega}_z^\circ / dt = \boldsymbol{\epsilon}_z^\circ, \quad 2d\boldsymbol{\lambda}^\circ / dt = \boldsymbol{\lambda}^\circ \circ \boldsymbol{\omega}_z^\circ \qquad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^\circ = \lambda_0^\circ + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^\circ \mathbf{i}_k, \quad \boldsymbol{\omega}_z^\circ = \sum_{k=1}^{3} \omega_k^\circ \mathbf{i}_k$$

Величины $\boldsymbol{\lambda}^\circ$, $\boldsymbol{\omega}^\circ$, $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$ строятся на основе уравнений (2.5) в виде явных функций времени: $\boldsymbol{\lambda}^\circ = \boldsymbol{\lambda}^\circ(t)$, $\boldsymbol{\omega}^\circ = \boldsymbol{\omega}^\circ(t)$, $\boldsymbol{\epsilon}^\circ = \boldsymbol{\epsilon}^\circ(t)$. Их построение определяется конкретно решаемой задачей и может быть выполнено с помощью методов оптимального управления (например, с использованием принципа максимума Понтрягина), или с помощью других подходов, некоторые из них рассматриваются во второй части статьи. Отметим, что аналитическое решение задачи построения оптимальных программных углового ускорения, угловой скорости и кватерниона ориентации твердого тела для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольно заданных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости твердого тела не найдено. Отметим также, что если программная траектория разворота твердого тела в пространстве задана в виде кватернионной функции времени $\boldsymbol{\lambda}^\circ = \boldsymbol{\lambda}^\circ(t)$, то программные угловые скорость и ускорение могут быть аналитически определены в соответствии с уравнениями (2.5) и, наоборот, если задано программное ускорение (управление) $\boldsymbol{\epsilon}_z^\circ = \boldsymbol{\epsilon}_z^\circ(t)$, то интегрирование (численное или аналитическое) уравнений (2.5) позволяет построить программную траекторию твердого тела $\boldsymbol{\lambda}^\circ = \boldsymbol{\lambda}^\circ(t)$ и программную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_z^\circ = \boldsymbol{\omega}_z^\circ(t)$.

Стабилизирующее управление $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ строится в виде некоторой функции ошибок по угловому положению и угловой скорости твердого тела на основе принципа обратной связи. Одна из существующих здесь задач заключается в синтезе стабилизирующего управления ориентацией твердого тела, обеспечивающего асимптотическую устойчивость в большом или в целом произвольного программного углового движения и другие требуемые характеристики управляемого движения.

Многие известные решения этой задачи ориентируются на реализацию конкретно выбранного программного углового движения твердого тела, например, на перевод твердого тела из некоторого начального углового положения в другое конечное положение при нулевых угловых скоростях тела в этих положениях, или на реализацию плоского эйлерова поворота твердого тела и других конкретных движений. Стабилизирующие управления строятся в виде линейных или нелинейных функций компонент кватерниона ошибки по положению и проекций вектора ошибки по угловой скорости твердого тела исходя из соображений простоты, накопленного опыта, геометрических и других соображений. Уравнения возмущенного движения твердого тела, замкнутые такими управлениями, получаются нелинейными, а при ненулевых программных угловых скоростях и нестационарными. Устойчивость таких предлагаемых законов управления доказывается с помощью функций Ляпунова. Однако при этом остается открытой проблема обеспечения желаемых динамических характеристик управляемого углового движения твердого тела, поскольку точное нахождение необходимых коэффициентов усиления обратных связей, осуществляемое на основе уравнений возмущенного движения, невозможно в силу сложности этих уравнений.

В работе рассматривается задача аналитического построения асимптотически устойчивого в большом или в целом стабилизирующего управления для любого выбранного программного углового движения твердого тела. В основу решения задачи положен подход, использующий приведение нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела к эталонным линейным стационарным дифференциальным уравнениям. Такой подход позволяет обойти вышеуказанные трудности аналитического синтеза управлений угловым движением твердого тела, проводимого на основе нелинейных уравнений движения. Обсуждаются также возможные пути аналитического построения программного углового движения и управления для произвольно заданных граничных условий по угловому положению и угловой скорости твердого тела.

3. Уравнения возмущенного движения. Введем ошибки (отклонения) по угловому положению и угловой скорости твердого тела. В соответствии со схемой поворотов (1.1) и кватернионными формулами сложения конечных поворотов [9] кватернион ошибки ориентации $\boldsymbol{\nu}$, определенный своими компонентами ν_j в абсолютном базисе ξ, находится по формуле

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda} \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ}(t) \tag{3.1}$$

а кватернион ошибки ориентации $\boldsymbol{\nu}^*$, определенный своими компонентами ν_j^* в связанном базисе X, по формуле

$$\boldsymbol{\nu}^* = \overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ}(t) \circ \boldsymbol{\lambda} \tag{3.2}$$

Кватернион ошибки по угловой скорости, определенный своими компонентами в связанном базисе X, может быть введен по одной из следующих формул:

$$\delta\boldsymbol{\omega}_x = \boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t) = \sum_{k=1}^{3} (\omega_k - \omega_k^{\circ}(t))\mathbf{i}_k \tag{3.3}$$

$$\Delta\boldsymbol{\omega}_x = \boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x^{\circ} = \boldsymbol{\omega}_x - \overline{\boldsymbol{\nu}}^* \circ \boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t) \circ \boldsymbol{\nu}^* \tag{3.4}$$

Компоненты кватерниона ошибки по угловой скорости $\Delta\boldsymbol{\omega}_x$, определяемого соотношением (3.4), равны проекциям векторной разности $\Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^{\circ}$ на оси системы координат X, в то время как компоненты кватерниона ошибки по угловой скорости $\delta\boldsymbol{\omega}_x$, определяемого соотношением (3.3), не имеют смысла проекций этой векторной разности, а выражаются линейным образом через проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}^{\circ}$ на оси разных систем координат (X и Z).

Вектор требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\epsilon}$ (управление) формируется в связанной системе координат X либо по формуле (2.3), соответствующей выражению (3.3), либо по формуле (2.4), соответствующей выражению (3.4). В (2.4) кватернион $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$, как и кватернион $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$, фигурирующий в (2.3), имеет смысл стабилизирующего углового ускорения (управления). Стабилизирующее управление $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x = \boldsymbol{\epsilon}_x - \boldsymbol{\epsilon}_x^\circ$ отвечает векторной разности $\Delta\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\circ$ и закон его формирования будет отличаться от закона формирования стабилизирующего управления $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x = \boldsymbol{\epsilon}_x - \boldsymbol{\epsilon}_z^\circ$.

При использовании ненормированных кватернионов ориентации твердого тела ошибки по угловому положению и угловой скорости твердого тела будем определять кватернионными соотношениями (3.5)–(3.7), аналогичными (3.1)–(3.4):

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}^\circ(t), \quad \mathbf{N}^* = \overline{\boldsymbol{\lambda}}^\circ(t) \circ \boldsymbol{\Lambda} \tag{3.5}$$

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_x = \boldsymbol{\Omega}_x - \boldsymbol{\omega}_z^\circ(t) = \omega_0 + \boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_z^\circ(t) = \omega_0 + \sum_{k=1}^{3} (\omega_k - \omega_k^\circ(t))\mathbf{i}_k \tag{3.6}$$

$$\Delta\boldsymbol{\Omega}_x = \boldsymbol{\Omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x^\circ(t) = \omega_0 + \boldsymbol{\omega}_x - (\mathbf{N}^*)^{-1} \circ \boldsymbol{\omega}_z^\circ(t) \circ \mathbf{N}^* \tag{3.7}$$

В этом случае в качестве управления выступает кватернион абсолютного углового ускорения $\mathbf{E}_x = \varepsilon_0 + \boldsymbol{\epsilon}_x$ с ненулевой скалярной частью ε_0, рассматриваемой как дополнительное (четвертое) скалярное управление, отвечающее за поведение нормы кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}$ (а, следовательно, и нормы кватерниона ошибки ориентации $\mathbf{N}$ или $\mathbf{N}^*$). Так же, как и в случае трехмерного управления $\boldsymbol{\epsilon}_x$, будем рассматривать два варианта формирования четырехмерного управления $\mathbf{E}_x$ по формулам (3.8) и (3.9), аналогичным (2.3) и (2.4):

$$\mathbf{E}_x = \boldsymbol{\epsilon}_z^\circ(t) + \delta\mathbf{E}_x = \boldsymbol{\epsilon}_z^\circ(t) + \varepsilon_0 + \delta\boldsymbol{\epsilon}_x = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{3} (\varepsilon_k^\circ(t) + \delta\varepsilon_k)\mathbf{i}_k \tag{3.8}$$

$$\mathbf{E}_x = \boldsymbol{\epsilon}_z^\circ + \Delta\mathbf{E}_x = (\mathbf{N}^*)^{-1} \circ \boldsymbol{\epsilon}_x^\circ(t) \circ \mathbf{N}^* + \varepsilon_0 + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_x \tag{3.9}$$

В этих формулах $\delta\mathbf{E}_x = \varepsilon_0 + \delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ и $\Delta\mathbf{E}_x = \varepsilon_0 + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ – стабилизирующие четырехмерные ускорения.

Четырехмерные величины $\delta\boldsymbol{\Omega}_x$, $\delta\mathbf{E}_x$ и $\Delta\boldsymbol{\Omega}_x$, $\Delta\mathbf{E}_x$ связаны с трехмерными величинами $\delta\boldsymbol{\omega}_x$, $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ и $\Delta\boldsymbol{\omega}_x$, $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ соотношениями

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_x = \omega_0 + \delta\boldsymbol{\omega}_x, \quad \delta\mathbf{E}_x = \varepsilon_0 + \delta\boldsymbol{\epsilon}_x, \quad \Delta\boldsymbol{\Omega}_x = \omega_0 + \Delta\boldsymbol{\omega}_x, \quad \Delta\boldsymbol{\Omega}_x = \varepsilon_0 + \Delta\boldsymbol{\omega}_x$$

Запишем нормальные и осцилляторные формы дифференциальных уравнений возмущенного движения твердого тела, используя введенные переменные.

3.1. Уравнения в нормированных кватернионных переменных $\boldsymbol{\nu}$ *и* $\boldsymbol{\nu}^*$. Нормальные формы уравнений в переменных $\boldsymbol{\nu}$, $\delta\boldsymbol{\omega}_x$ и $\boldsymbol{\nu}^*$, $\Delta\boldsymbol{\omega}_x$ имеют вид (3.10), (3.11) и (3.12), (3.13) соответственно

$$2\boldsymbol{\nu}^\bullet = \delta\boldsymbol{\omega}_\xi \circ \boldsymbol{\nu}, \quad \delta\boldsymbol{\omega}_x^\bullet = \delta\boldsymbol{\epsilon}_x \tag{3.10}$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_\xi = \boldsymbol{\lambda} \circ \delta\boldsymbol{\omega}_x \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\nu} \circ \boldsymbol{\lambda}^\circ(t) \tag{3.11}$$

$$2\boldsymbol{\nu}^{*\bullet} = \boldsymbol{\nu}^* \circ \Delta\boldsymbol{\omega}_x, \quad \Delta\boldsymbol{\omega}_x^\bullet = \Delta\boldsymbol{\omega}_x \times \boldsymbol{\omega}_x + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_x \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \Delta\boldsymbol{\omega}_x + \overline{\boldsymbol{\nu}}^* \circ \boldsymbol{\omega}_z^\circ(t) \circ \boldsymbol{\nu}^* \tag{3.13}$$

Отметим, что в уравнениях (3.10), (3.11) фигурирует кватернион $\boldsymbol{\lambda}^\circ(t)$ программной ориентации твердого тела, в то время как в уравнениях (3.12), (3.13) – кватернион программной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_z^\circ(t)$.

Из (3.10) и (3.12) получим для возмущенного движения дифференциальные уравнения второго порядка (3.14), (3.15) и (3.16), (3.17):

$$2\boldsymbol{\nu}^{\bullet\bullet} = \delta\mathbf{u}_{\xi} \circ \boldsymbol{\nu} - \tfrac{1}{2}\,|\,\delta\boldsymbol{\omega}\,|^2\,\boldsymbol{\nu} \qquad (3.14)$$

$$\delta\mathbf{u}_{\xi} = \boldsymbol{\lambda} \circ \delta\mathbf{u}_x \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}, \qquad \delta\mathbf{u}_x = \boldsymbol{\omega}_x \times \delta\boldsymbol{\omega}_x + \delta\boldsymbol{\epsilon}_x \qquad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t), \qquad |\,\delta\boldsymbol{\omega}\,|^2 = \delta\boldsymbol{\omega}_x \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_x, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\nu} \circ \boldsymbol{\lambda}^{\circ}(t)$$

$$2\boldsymbol{\nu}^{*\bullet\bullet} = \boldsymbol{\nu}^* \circ \Delta\mathbf{u}_x - \tfrac{1}{2}\,|\,\Delta\boldsymbol{\omega}\,|^2\,\boldsymbol{\nu}^* \qquad (3.16)$$

$$\Delta\mathbf{u}_x = \Delta\boldsymbol{\omega}_x \times \boldsymbol{\omega}_x + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_x, \qquad |\,\Delta\boldsymbol{\omega}\,|^2 = \Delta\boldsymbol{\omega}_x \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x \qquad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \Delta\boldsymbol{\omega}_x + \overline{\boldsymbol{\nu}}^* \circ \boldsymbol{\omega}_z^{\circ}(t) \circ \boldsymbol{\nu}^*$$

Для краткости будем называть такие уравнения уравнениями в осцилляторной форме.

3.2. Уравнения в переменных ν_0, $\boldsymbol{\nu}_{\upsilon}$ *и* ν_0^*, $\boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^*$. Выделяя в первом уравнении (3.10) и в уравнении (3.14) скалярную и векторную части, получим уравнения первого и второго порядков относительно скалярной ν_0 и векторной $\boldsymbol{\nu}_{\upsilon}$ частей кватерниона $\boldsymbol{\nu}$:

$$2\nu_0^{\bullet} = -\boldsymbol{\nu}_{\upsilon} \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_{\xi} \qquad (3.18)$$

$$2\boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^{\bullet} = \nu_0\delta\boldsymbol{\omega}_{\xi} - \boldsymbol{\nu}_{\upsilon} \times \delta\boldsymbol{\omega}_{\xi} \qquad (3.19)$$

$$2\nu_0^{\bullet\bullet} = -\tfrac{1}{2}\,|\,\delta\boldsymbol{\omega}\,|^2\,\nu_0 - \boldsymbol{\nu}_{\upsilon} \cdot \delta\mathbf{u}_{\xi} \qquad (3.20)$$

$$2\boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^{\bullet\bullet} = -\tfrac{1}{2}\,|\,\delta\boldsymbol{\omega}\,|^2\,\boldsymbol{\nu}_{\upsilon} + \nu_0\delta\mathbf{u}_{\xi} - \boldsymbol{\nu}_{\upsilon} \times \delta\mathbf{u}_{\xi} \qquad (3.21)$$

Фигурирующие здесь величины $\delta\boldsymbol{\omega}_{\xi}$ и $\delta\mathbf{u}_{\xi}$, $|\delta\boldsymbol{\omega}|^2$ определяются соотношениями (3.11) и (3.15).

Выделяя в первом уравнении (3.12) и в уравнении (3.16) скалярную и векторную части, получим уравнения первого и второго порядков относительно скалярной ν_0^* и векторной $\boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^*$ частей кватерниона $\boldsymbol{\nu}^*$:

$$2\nu_0^{*\bullet} = -\boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^* \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x \qquad (3.22)$$

$$2\nu_{\upsilon}^{*\bullet} = \boldsymbol{\nu}_0^*\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^* \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \qquad (3.23)$$

$$2\nu_0^{*\bullet\bullet} = -\tfrac{1}{2}\,|\,\Delta\boldsymbol{\omega}\,|^2\,\nu_0^* - \boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^* \cdot \Delta\mathbf{u}_x \qquad (3.24)$$

$$2\boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^{*\bullet\bullet} = -\tfrac{1}{2}\,|\,\Delta\boldsymbol{\omega}\,|^2\,\boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^* + \nu_0^*\Delta\mathbf{u}_x + \boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^* \times \Delta\mathbf{u}_x \qquad (3.25)$$

Фигурирующие здесь величины $\Delta\mathbf{u}_x$, $|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2$ определяются соотношениями (3.17).

3.3. Уравнения в векторных переменных $\boldsymbol{\Theta}_{\xi}$ *и* $\boldsymbol{\Theta}_x$. Введем в рассмотрение вектор конечного поворота $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{e}tg(\varphi/2)$, характеризующий положение связанной системы координат X относительно программной Z. Здесь $\mathbf{e}$ – единичный вектор эйлеровой оси поворота системы координат X относительно Z, φ – угол этого поворота. Так как

$$\nu_0 = \nu_0^* = \cos(\varphi/2), \qquad \boldsymbol{\nu}_{\upsilon} = \mathbf{e}_{\xi}\sin(\varphi/2), \qquad \boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^* = \mathbf{e}_x\sin(\varphi/2)$$

то отображения $\boldsymbol{\Theta}_{\xi}$ и $\boldsymbol{\Theta}_x$ вектора $\boldsymbol{\Theta}$ на базисы ξ и X связаны с кватернионами $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\nu}^*$ равенствами

$$\boldsymbol{\Theta}_{\xi} = \boldsymbol{\nu}_{\upsilon}\,/\,\nu_0, \qquad \boldsymbol{\Theta}_x = \boldsymbol{\nu}_{\upsilon}^*\,/\,\nu_0^* \qquad (3.26)$$

Дифференцируя первое равенство (3.26) по времени и учитывая уравнения (3.18), (3.19) и (3.20), (3.21), получим дифференциальные уравнения первого и второго порядков относительно переменной $\boldsymbol{\Theta}_\xi$:

$$2\boldsymbol{\Theta}_\xi^{\bullet} = (\boldsymbol{\Theta}_\xi \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_\xi)\boldsymbol{\Theta}_\xi - \boldsymbol{\Theta}_\xi \times \delta\boldsymbol{\omega}_\xi + \delta\boldsymbol{\omega}_\xi \tag{3.27}$$

$$2\boldsymbol{\Theta}_\xi^{\bullet\bullet} = 2(\boldsymbol{\Theta}_\xi \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_\xi)\boldsymbol{\Theta}_\xi^{\bullet} + (\boldsymbol{\Theta}_\xi \cdot \delta\mathbf{u}_\xi)\boldsymbol{\Theta}_\xi - \boldsymbol{\Theta}_\xi \times \delta\mathbf{u}_\xi + \delta\mathbf{u}_\xi \tag{3.28}$$

Здесь $\delta\boldsymbol{\omega}_\xi$ и $\delta\mathbf{u}_\xi$ определяются соотношениями (3.11), (3.15), в которых кватернион $\boldsymbol{\nu}$ должен быть выражен через $\boldsymbol{\Theta}_\xi$ в соответствии с (3.26):

$$\boldsymbol{\nu} = (1+\boldsymbol{\Theta}_\xi)/(1+\boldsymbol{\Theta}^2)^{1/2}$$

Дифференцируя второе равенство (3.26) по времени и учитывая уравнения (3.22), (3.23) и (3.24), (3.25), получим дифференциальные уравнения первого и второго порядков относительно переменной $\boldsymbol{\Theta}_x$:

$$2\boldsymbol{\Theta}_x^{\bullet} = (\boldsymbol{\Theta}_x \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x)\boldsymbol{\Theta}_x + \boldsymbol{\Theta}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x + \Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{3.29}$$

$$2\boldsymbol{\Theta}_x^{\bullet\bullet} = 2(\boldsymbol{\Theta}_x \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x)\boldsymbol{\Theta}_x^{\bullet} + (\boldsymbol{\Theta}_x \cdot \Delta\mathbf{u}_x)\boldsymbol{\Theta}_x + \boldsymbol{\Theta}_x \times \Delta\mathbf{u}_x + \Delta\mathbf{u}_x \tag{3.30}$$

Здесь $\Delta\boldsymbol{\omega}_x$ и $\Delta\mathbf{u}_x$ определяются соотношениями (3.13), (3.17), в которых кватернион $\boldsymbol{\nu}^*$ должен быть выражен через $\boldsymbol{\Theta}_x$ в соответствии с (3.26):

$$\boldsymbol{\nu}^* = (1+\boldsymbol{\Theta}_x)/(1+\boldsymbol{\Theta}^2)^{1/2}$$

Отметим, что в уравнениях (3.27), (3.28) производные имеют смысл абсолютных производных, а в уравнениях (3.29), (3.30) – локальных.

3.4. Уравнения в ненормированных кватернионных переменных $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}^*$. Нормальные формы уравнений в переменных $\mathbf{N}$, $\delta\boldsymbol{\Omega}_x$ и $\mathbf{N}^*$, $\Delta\boldsymbol{\Omega}_x$ имеют вид (3.31) и (3.32) соответственно:

$$2\mathbf{N}^{\bullet} = \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\lambda}^\circ(t) \circ \delta\boldsymbol{\Omega}_x \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}^\circ(t), \quad \delta\boldsymbol{\Omega}_x^{\bullet} = \delta\mathbf{E}_x \tag{3.31}$$

$$2\mathbf{N}^{*\bullet} = \mathbf{N}^* \circ \Delta\boldsymbol{\Omega}_x, \quad \Delta\boldsymbol{\Omega}_x^{\bullet} = \tfrac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{\Omega}_x \circ \boldsymbol{\Omega}_x - \boldsymbol{\Omega}_x \circ \Delta\boldsymbol{\Omega}_x) + \Delta\mathbf{E}_x \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_x = \Delta\boldsymbol{\Omega}_x + (\mathbf{N}^*)^{-1} \circ \boldsymbol{\omega}_z^\circ(t) \circ \mathbf{N}^*$$

Уравнения (3.31) могут быть записаны в другом виде:

$$2\mathbf{N}^{\bullet} = \delta\boldsymbol{\Omega}_\xi \circ \mathbf{N}, \quad \delta\boldsymbol{\Omega}_x^{\bullet} = \delta\mathbf{E}_x$$

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_\xi = \boldsymbol{\Lambda} \circ \delta\boldsymbol{\Omega}_x \circ \boldsymbol{\Lambda}^{-1}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\lambda}^\circ(t)$$

Из уравнений (3.31) и (3.32) получаем следующие осцилляторные формы дифференциальных уравнений возмущенного движения:

$$2\mathbf{N}^{\bullet\bullet} = \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\lambda}^\circ(t) \circ [\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_z^\circ(t) \circ \delta\boldsymbol{\Omega}_x - \delta\boldsymbol{\Omega}_x \circ \boldsymbol{\omega}_z^\circ(t) + \delta\boldsymbol{\Omega}_x \circ \delta\boldsymbol{\Omega}_x) + \delta\mathbf{E}_x] \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}^\circ(t) \tag{3.33}$$

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_x = 2\overline{\boldsymbol{\lambda}}^\circ(t) \circ \mathbf{N}^{-1} \circ \mathbf{N}^{\bullet} \circ \boldsymbol{\lambda}^\circ(t)$$

$$2\mathbf{N}^{*\bullet\bullet} = \mathbf{N}^* \circ [\tfrac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{\Omega}_x \circ \boldsymbol{\Omega}_x - \boldsymbol{\Omega}_x \circ \Delta\boldsymbol{\Omega}_x + \Delta\boldsymbol{\Omega}_x \circ \Delta\boldsymbol{\Omega}_x) + \Delta\mathbf{E}_x] \tag{3.34}$$

$$\Delta\boldsymbol{\Omega}_x = 2(\mathbf{N}^*)^{-1} \circ \mathbf{N}^{*\bullet}, \quad \boldsymbol{\Omega}_x = \Delta\boldsymbol{\Omega}_x + (\mathbf{N}^*)^{-1} \circ \boldsymbol{\omega}_z^\circ(t) \circ \mathbf{N}^*$$

Запишем уравнения (3.33) и (3.34) в форме, удобной для построения законов управления:

$$2\mathbf{N}^{\bullet\bullet} = \delta\mathbf{U}_\xi \circ \mathbf{N} + \tfrac{1}{2}(\omega_0^2 - |\,\delta\boldsymbol{\omega}\,|^2)\mathbf{N} \tag{3.35}$$

$$\delta\mathbf{U}_\xi = \boldsymbol{\Lambda} \circ \delta\mathbf{U}_x \circ \boldsymbol{\Lambda}^{-1}, \quad \delta\mathbf{U}_x = \omega_0\delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \delta\boldsymbol{\omega}_x + \delta\mathbf{E}_x \tag{3.36}$$

$$2\mathbf{N}^{*\bullet\bullet} = \mathbf{N}^* \circ \Delta\mathbf{U}_x + \tfrac{1}{2}(\omega_0^2 - |\,\Delta\boldsymbol{\omega}\,|^2)\mathbf{N}^* \tag{3.37}$$

$$\Delta\mathbf{U}_x = \omega_0\Delta\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x + \Delta\mathbf{E}_x \tag{3.38}$$

Отметим, что уравнения (3.14) и (3.16) получаются из уравнений (3.35) и (3.37), если в них положить

$$\omega_0 = \varepsilon_0 = 0, \quad \mathbf{N} = \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{N}^* = \boldsymbol{\nu}^*, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \delta\mathbf{E}_x = \delta\boldsymbol{\epsilon}_x, \quad \Delta\mathbf{E}_x = \Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$$

4. Стабилизирующие управления. Выразим стабилизирующие управления из полученных уравнений возмущенного движения. Для этого введем кососимметрическую $K(\mathbf{x})$ и симметрическую $S(\mathbf{x})$ матрицы, сопоставляемые вектору $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} = \boldsymbol{\nu}_\upsilon$, $\boldsymbol{\nu}_\upsilon^*$, $\boldsymbol{\Theta}_x$, $\boldsymbol{\Theta}_\xi$):

$$K(\mathbf{x}) = \begin{Vmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad S(\mathbf{x}) = \begin{Vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{Vmatrix} \tag{4.1}$$

Запишем уравнения (3.19), (3.21), (3.23), (3.25), (3.27)–(3.30) в матричных формах, используя матрицы (4.1):

$$2\nu_\upsilon^\bullet = [\nu_0 E - K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon)]\delta\omega_\xi \tag{4.2}$$

$$[\nu_0 E - K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon)]\delta u_\xi = 2\nu_\upsilon^{\bullet\bullet} + \tfrac{1}{2}|\,\delta\boldsymbol{\omega}\,|^2\,\nu_\upsilon \tag{4.3}$$

$$2\nu_\upsilon^{*\bullet} = [\nu_0^* E + K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon^*)]\Delta\omega_x \tag{4.4}$$

$$[\nu_0^* E + K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon^*)]\Delta u_x = 2\nu_\upsilon^{*\bullet\bullet} + \tfrac{1}{2}|\,\Delta\boldsymbol{\omega}\,|^2\,\nu_\upsilon^* \tag{4.5}$$

$$2\Theta_\xi^\bullet = [E - K(\boldsymbol{\Theta}_\xi) + S(\boldsymbol{\Theta}_\xi)]\delta\omega_\xi \tag{4.6}$$

$$[E - K(\boldsymbol{\Theta}_\xi) + S(\boldsymbol{\Theta}_\xi)]\delta u_\xi = 2\Theta_\xi^{\bullet\bullet} - 2(\boldsymbol{\Theta}_\xi \cdot \delta\omega_\xi)\Theta_\xi^\bullet \tag{4.7}$$

$$2\Theta_x^\bullet = [E + K(\boldsymbol{\Theta}_x) + S(\boldsymbol{\Theta}_x)]\Delta\omega_x \tag{4.8}$$

$$[E + K(\boldsymbol{\Theta}_x) + S(\boldsymbol{\Theta}_x)]\Delta u_x = 2\Theta_x^{\bullet\bullet} - 2(\boldsymbol{\Theta}_x \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x)\Theta_x^\bullet \tag{4.9}$$

Здесь E – единичная матрица размерами 3×3; ν_υ, $\delta\omega_\xi$, δu_ξ, ν_υ^*, $\Delta\omega_x$, Δu_x, Θ_ξ, Θ_x – матрицы-столбцы размерами 3×1.

Выразим трехмерные величины δu_ξ, Δu_x, рассматриваемые как новые управления, из матричных уравнений (4.3), (4.5), (4.7), (4.9). При этом учтем уравнения (4.6), (4.8) и соотношения

$$\begin{aligned}
&[\nu_0 E - K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon)]^{-1} = (2\nu_0)^{-1}[E + (C(\boldsymbol{\nu}))^T] \\
&[\nu_0 E - K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon)]^{-1}\nu_\upsilon = \nu_\upsilon / \nu_0 \\
&[\nu_0^* E + K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon^*)]^{-1} = (2\nu_0^*)^{-1}[E + C(\boldsymbol{\nu}^*)] \\
&[\nu_0^* E + K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon^*)]^{-1}\nu_\upsilon^* = \nu_\upsilon^* / \nu_0^* \\
&[E - K(\boldsymbol{\Theta}_\xi) + S(\boldsymbol{\Theta}_\xi)]^{-1} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\varphi)[E + K(\boldsymbol{\Theta}_\xi)] \\
&[E + K(\boldsymbol{\Theta}_x) + S(\boldsymbol{\Theta}_x)]^{-1} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\varphi)[E - K(\boldsymbol{\Theta}_x)] \\
&(1 + \cos\varphi) = 2\nu_0^2 = 2\nu_0^{*2} = 2/(1 + \boldsymbol{\Theta}^2)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь верхний индекс T – символ транспонирования, $C(\boldsymbol{\nu}^*)$ – матрица направляющих косинусов углов между осями систем координат Z и X, имеющая известный вид:

$$C(\boldsymbol{\nu}^*)=\begin{Vmatrix} \nu_0^{*2}+\nu_1^{*2}-\nu_2^{*2}-\nu_3^{*2} & 2(\nu_1^*\nu_2^*+\nu_0^*\nu_3^*) & 2(\nu_1^*\nu_3^*-\nu_0^*\nu_2^*) \\ 2(\nu_1^*\nu_2^*-\nu_0^*\nu_3^*) & \nu_0^{*2}-\nu_1^{*2}+\nu_2^{*2}-\nu_3^{*2} & 2(\nu_2^*\nu_3^*+\nu_0^*\nu_1^*) \\ 2(\nu_1^*\nu_3^*+\nu_0^*\nu_2^*) & 2(\nu_2^*\nu_3^*-\nu_0^*\nu_1^*) & \nu_0^{*2}-\nu_1^{*2}-\nu_2^{*2}+\nu_3^{*2} \end{Vmatrix}$$

Матрица $C(\boldsymbol{\nu})$ имеет такую же структуру, что и матрица $C(\boldsymbol{\nu}^*)$, и построена из компонент ν_j кватерниона $\boldsymbol{\nu}$.

Учтем также, что матрица $C(\boldsymbol{\nu}^*)$ может быть представлена в одном из трех следующих видах:

$$C(\boldsymbol{\nu}^*)=2[\nu_0^{*2}E-\nu_0^*K(\boldsymbol{\nu}_\upsilon^*)+S(\boldsymbol{\nu}_\upsilon^*)]-E$$

$$C(\boldsymbol{\Theta}_x)=(1+\cos\varphi)[E-K(\boldsymbol{\Theta}_x)+S(\boldsymbol{\Theta}_x)]-E$$

$$C(\varphi,\mathbf{e}_x)=\cos\varphi E-\sin\varphi K(\mathbf{e}_x)+(1-\cos\varphi)S(\mathbf{e}_x)$$

$$C(\boldsymbol{\nu}^*)=C(\boldsymbol{\Theta}_x)=C(\varphi,\mathbf{e}_x)$$

где матрицы K и S определяются соотношениями (4.1).

Аналогичное представление имеет и матрица $C(\boldsymbol{\nu})$. При этом $C(\boldsymbol{\nu}) = C(\boldsymbol{\Theta}_\xi) = C(\varphi, \mathbf{e}_\xi)$.

В результате преобразований получаем следующие матричные выражения для δu_ξ, Δu_x:

$$\delta u_\xi=\nu_0^{-1}[E+(C(\boldsymbol{\nu}))^T]\nu_\upsilon^{\bullet\bullet}+(2\nu_0)^{-1}\,|\,\delta\boldsymbol{\omega}\,|^2\,\nu_\upsilon \tag{4.11}$$

$$\Delta u_x=(\nu_0^*)^{-1}[E+C(\boldsymbol{\nu}^*)]\nu_\upsilon^{*\bullet\bullet}+(2\nu_0^*)^{-1}\,|\,\Delta\boldsymbol{\omega}\,|^2\,\nu_\upsilon^* \tag{4.12}$$

$$\delta u_\xi=(1+\cos\varphi)[E+K(\boldsymbol{\Theta}_\xi)]\Theta_\xi^{\bullet\bullet}-(\boldsymbol{\Theta}_\xi\cdot\delta\boldsymbol{\omega}_\xi)\delta\omega_\xi \tag{4.13}$$

$$\Delta u_x=(1+\cos\varphi)[E-K(\boldsymbol{\Theta}_x)]\Theta_x^{\bullet\bullet}-(\boldsymbol{\Theta}_x\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}_x)\Delta\omega_x \tag{4.14}$$

Трехмерные стабилизирующие управления $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ и $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ выражаются через величины $\delta\mathbf{u}_\xi$ и $\Delta\mathbf{u}_x$ по формулам

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_x=\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ\delta\mathbf{u}_\xi\circ\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\omega}_x\times\delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{4.15}$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x=\Delta\mathbf{u}_x+\boldsymbol{\omega}_x\times\Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{4.16}$$

вытекающим из соотношений (3.15), (3.17).

Выразим четырехмерные величины $\delta\mathbf{U}_\xi$ и $\Delta\mathbf{U}_x$, рассматриваемые как новые управления, из кватернионных уравнений (3.35) и (3.37):

$$\delta\mathbf{U}_\xi=2\mathbf{N}^{\bullet\bullet}\circ\mathbf{N}^{-1}+\tfrac{1}{2}(|\,\delta\boldsymbol{\omega}\,|^2-\omega_0^2) \tag{4.17}$$

$$\Delta\mathbf{U}_x=2\mathbf{N}^{*-1}\circ\mathbf{N}^{*\bullet\bullet}+\tfrac{1}{2}(|\,\Delta\boldsymbol{\omega}\,|^2-\omega_0^2) \tag{4.18}$$

Четырехмерные стабилизирующие управления $\delta\mathbf{E}_x$ и $\Delta\mathbf{E}_x$ находятся через величины $\delta\mathbf{U}_\xi$ и $\Delta\mathbf{U}_x$ по формулам

$$\delta\mathbf{E}_x=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\circ\delta\mathbf{U}_\xi\circ\boldsymbol{\Lambda}-\omega_0\delta\boldsymbol{\omega}_x-\boldsymbol{\omega}_x\times\delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{4.19}$$

$$\Delta\mathbf{E}_x=\Delta\mathbf{U}_x-\omega_0\Delta\boldsymbol{\omega}_x+\boldsymbol{\omega}_x\times\Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{4.20}$$

вытекающим из соотношений (3.36), (3.38).

Полученные выражения (4.11)–(4.16) и (4.17)–(4.20) определяют собой стабилизирующие управления $\delta\boldsymbol{\epsilon}_x$, $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_x$ и $\delta\mathbf{E}_x$, $\Delta\mathbf{E}_x$ в виде функций ошибок по угловому положению и угловой скорости твердого тела и вторых производных по времени от ошибок по угловому положению. Подстановка в эти выражения таких законов изменения вторых производных по времени от ошибок по угловому положению, которые отвечают желаемым динамическим характеристикам переходных процессов, позволяет получить нужные законы стабилизирующих управлений. Во второй части статьи рассматриваются различные варианты задания вторых производных по времени от ошибок по угловому положению твердого тела в виде линейных функций ошибок по угловому положению твердого тела и их первых производных по времени. При таком их задании желаемая динамика управляемого углового движения твердого тела описывается линейными стационарными дифференциальными уравнениями второго порядка относительно ошибки по угловому положению твердого тела (относительно одной из выбранных переменных $\boldsymbol{\nu}_\upsilon$, $\boldsymbol{\nu}_\upsilon^*$, $\boldsymbol{\Theta}_x$, $\boldsymbol{\Theta}_\xi$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^*$). Соответствующий выбор постоянных коэффициентов этих уравнений, являющихся коэффициентами усиления нелинейных обратных связей, обеспечивает желаемые динамические характеристики управляемого углового движения твердого тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00192) и ФЦП "Интеграция" (проект 96.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 7–14.
2. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения ошибок, законы и алгоритмы коррекции (стабилизации) // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 3–12.
3. *Челноков Ю.Н.* Управление ориентацией космического аппарата, использующее кватернионы // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 3. С. 21–32.
4. *Челноков Ю.Н.* Кватернионный синтез нелинейного управления ориентацией движущегося объекта // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 2. С. 145–150.
5. *Челноков Ю.Н.* Кватернионы и динамика управляемого движения твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 13–23.
6. *Соловьев В.П.* Об оптимальном развороте космического аппарата вокруг произвольной неподвижной оси // Космич. исслед. 1969. Т. 7. Вып. 1. С. 42–50.
7. *Гурман В.И., Лавровский Э.К., Сергеев С.И.* Оптимальное управление ориентацией осесимметричного вращающегося космического аппарата // Космич. исслед. 1970. Т. 8. Вып. 3. С. 341–349.
8. *Петров Б.Н., Боднер В.А., Алексеев К.Б.* Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // Докл. АН СССР. 1970. 192. № 6. С. 1235–1238.
9. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
10. *Шкляр В.Н., Малышенко А.М.* К задаче оптимального пространственного разворота космического аппарата относительно центра масс // Космич. исслед. 1975. Т. 13. Вып. 4. С. 473–480.
11. *Алексеев К.Б.* Экстенсивное управление ориентацией космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1977. 121 с.
12. *Vadali S.R., Junkins J.L.* Spacecraft large angle rotational maneuvers with optimal momentum transfer // J. Astronaut. sci. 1983. V. 31. № 2. P. 217–235.
13. *Бранец В.Н., Казначеев Ю.В., Черток М.Б.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
14. *Dwyer T.A.W.* Exact nonlinear control of spacecraft slewing maneuvers with internal momentum transfer // J. Guidance, Control and Dynamics. 1986. V. 9. № 2. P. 240–247.
15. *Гуляев В.И., Кошкин В.Л., Савилова И.В.* Оптимальное по быстродействию управление трехосной ориентацией твердого тела при ограниченных параметрах управления // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 11–15.

16. *Redding D.C. and Adams N.J.* Optimized rotation-axis attitude maneuver controller for the space shuttle orbiter // J. Guidance, Control and Dynamics. 1987. V. 10. № 1. P. 4–13.
17. *Лебедев Д.В., Ткаченко А.И.* Системы инерциального управления. Алгоритмические аспекты. Киев: Наук. думка, 1991. 208 с.
18. *Зубов Н.Е.* Оптимальное управление терминальной переориентацией космического аппарата на основе алгоритма с прогнозирующей моделью // Космич. исслед. 1991. Т. 29. Вып. 3. С. 340–351.
19. *Mortensen R.E.* A globally stable linear attitude regulator // Intern. J. Control. 1968. V. 8. № 3. P. 297–302.
20. *Лебедев Д.В.* Управление ориентацией твердого тела с использованием параметров Родрига – Гамильтона // Автоматика. 1974. № 4. С. 29–32.
21. *Гаврилова Н.Л., Ткаченко А.И.* О стабилизации положения твердого тела // Автоматика. 1974. № 6. С. 3–8.
22. *Лебедев Д.В.* К задаче управления ориентацией твердого тела // Прикл. механика. 1976. Т. 12. Вып. 2. С. 76–82.
23. *Лебедев Д.В.* Об управлении трехосной ориентацией твердого тела // Автоматика. 1981. № 3. С. 77–80.
24. *Wie B., Barba P.M.* Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers // J. Guidance, Control and Dynamics. 1985. V. 8. № 3. P. 360–365.
25. *Ви Б., Уэйс Х., Эрэпостатис Э.* Управление поворотами космического аппарата вокруг собственной оси с обратной связью по компонентам кватерниона // Аэрокосмич. техника. 1990. № 3. С. 3–11.
26. *Мартыненко В.В., Пушкова С.В.* Синтез оптимального управления вращением космического аппарата // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып. 1. С. 52–59.
27. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах управления положением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 24–31.
28. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Кинематические задачи ориентации во вращающейся системе координат // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 3. С. 36–43.
29. *Плотников П.К., Сергеев А.Н., Челноков Ю.Н.* Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 9–18.
30. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
31. *Панков А.А., Челноков Ю.Н.* Исследование кватернионных законов кинематического управления ориентацией твердого тела по угловой скорости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 3–13.
32. *Yuan J.* S-C. Closed-loop manipulator control using quaternion feedback // IEEEJ. Rob. and Autom. 1988. № 4. P. 434–440.
33. *Зубенко Г.И., Пейсахович Г.А., Власов Ю.Б., Челноков Ю.Н., Панков А.А.* Принципы и задачи управления движением комплекса манипулятор – трехосная стабилизированная платформа по информации о движении выходного звена манипулятора // Тез. докл. 3-й научной школы "Автоматизация создания математического обеспечения и архитектуры систем реального времени". М.: ГосНИИАС, 1992. С. 84–85.
34. *Панков А.А., Пейсахович Г.А., Рудаков Р.Н., Уткин Г.В., Федосеев С.В., Челноков Ю.Н., Ярошевский В.С.* Модели и алгоритмы ориентации и управления движением платформенного комплекса "ТСП – АРГУС" проекта "МАРС" // Материалы 7-й НТК "Экстремальная робототехника". С. Пб.: Изд-во СПбГТУ, 1996. С. 186–196.
35. *Челноков Ю.Н., Батурин В.В., Садомцев Ю.В., Панков А.А., Пейсахович Г.А., Рудаков Р.Н., Федосеев С.В., Уткин Г.В., Ярошевский В.С.* Модели и алгоритмы ориентации и управления движением платформенного комплекса "ТСП – АРГУС" проекта "МАРС" // Материалы Междунар. конф. "Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении". Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. С. 68–69.
36. *Fu K.S., Gonzalez R.C., Lee C.S.G.* Robotics: control, sensing, vision and intelligence. N.J.: VcGraw-Hill, 1987. 624 p.
37. *Нильсон Г.М., Хейланд Р.В.* Мультипликационные вращения на 4-мерной сфере с помощью кватернионов и сплайнов // Программирование. 1992. № 4. С. 17–27.

Саратов

Поступила в редакцию
8.12.1999