

УДК 531.76

© 2002 г. Ю.А. ЛИТМАНОВИЧ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УГЛОВОГО И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО  
ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ  
В ФОРМЕ ПРИРАЩЕНИЙ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ  
ОТ ИЗМЕРЯЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ**

Рассматриваются задачи определения параметров углового и поступательного движения твердого тела путем интегрирования кинематических и навигационных уравнений движения в предположении, что инерциальная информация доступна в виде приращений кратных интегралов от угловой скорости и кажущегося ускорения тела в проекциях на оси связанного с ним базиса. Предложены два новых подхода к синтезу численных алгоритмов решения обеих задач – "сглаживающий" и "инвариантный", для каждого из которых изложена методика синтеза алгоритмов, получены примеры алгоритмов и выражения для их погрешностей. Отдельно рассмотрена задача интегрирования скорости в инерциальном базисе и получен точный дискретный алгоритм, который может быть реализован при наличии инерциальной информации в указанном выше виде. Приведены результаты численного моделирования соответствующих традиционных и новых алгоритмов при наличии в показаниях инерциальных измерителей высокочастотных гармонических составляющих, обуславливающих возникновение систематических погрешностей.

**1. Постановка задач.** Общеизвестные подходы к синтезу численных алгоритмов интегрирования кинематических и навигационных уравнений движения твердого тела, которые составляют математическую основу работы бесплатформенных инерциальных навигационных систем, основываются на предположении, что первичная измерительная информация имеет вид приращений квазиординат – интегралов от угловой скорости и кажущегося ускорения – на такте опроса инерциальных измерителей (гироскопов и акселерометров) [1–5]. Данное положение является ограничивающим при синтезе численных алгоритмов, между тем количество выходных сигналов инерциальных измерителей в принципе может быть увеличено. Действительно, при выработке традиционных выходных сигналов текущее значение интеграла от измеряемого параметра обновляется с высокой частотой (тысячи герц) и, следовательно, с этой же частотой оно может быть многократно проинтегрировано. Таким образом, в процессе предварительной обработки могут быть сформированы дополнительные выходные сигналы инерциальных измерителей в виде приращений кратных интегралов от измеряемой величины на такте опроса датчика [6, 7]. Это позволяет по-новому поставить задачу синтеза численных алгоритмов, именно такая постановка и рассматривается автором.

Рассматриваются задачи определения векторов кажущейся скорости  $V_i$  и кажущегося перемещения  $S_i$  некоторой точки твердого тела в проекциях на оси инерциального базиса  $\{i\}$  и матрицы направляющих косинусов  $C_b^i$ , определяющей угловую ориентацию связанного с телом базиса  $\{b\}$  относительно базиса  $\{i\}$ , которые сводятся

к интегрированию навигационных и кинематических уравнений движения, заданных в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{V}}_i = C_b^i \mathbf{a}_b \quad (1.1)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_i = \mathbf{V}_i$$

$$\dot{\Phi} = \omega_b + \frac{1}{2}(\Phi \times \omega_b) + \frac{1}{\Phi_0^2} \left[ 1 - \frac{\Phi_0 \sin \Phi_0}{2(1 - \cos \Phi_0)} \right] \Phi \times (\Phi \times \omega_b) \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{a}_b$ ,  $\omega_b$  – вектора кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости тела, заданные в проекциях на оси связанного с объектом базиса  $\{b\}$ ;  $\Phi$  – вектор ориентации;  $\Phi_0$  – модуль вектора  $\Phi$ .

Вектор ориентации используется как промежуточный кинематический параметр, описывающий вращение связанного базиса на такте решения задач интегрирования. Соответствующий корректирующий кватернион и, окончательно, матрица  $C_b^i$  вычисляются, используя известные соотношения связи разных кинематических параметров [3].

Интегрирование уравнений (1.1) приводит к следующим дискретным алгоритмам вычисления векторов  $\mathbf{V}_i$ ,  $\mathbf{S}_i$  с тактом  $\Delta T$  в моменты времени  $t_k = k\Delta T$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\mathbf{V}_i(k+1) = \mathbf{V}_i(k) + \delta \mathbf{V}_i(k, k+1) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{S}_i(k+1) = \mathbf{S}_i(k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{V}_i(t) dt \quad (1.4)$$

$$\delta \mathbf{V}_i(k, k+1) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_b^i(t) \mathbf{a}_b(t) dt \quad (1.5)$$

Используя приближенное представление матрицы  $C_b^i$  на такте решения задачи, искомый интеграл (1.5) представляется в следующем виде [8]:

$$\delta \mathbf{V}_i(k, k+1) = C_b^i(k) [\Delta \mathbf{V}(k, k+1) + \delta \mathbf{V}_s(k, k+1)] \quad (1.6)$$

$$\Delta \mathbf{V}(k, k+1) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{a}_b(t) dt \quad (1.7)$$

$$\delta \mathbf{V}_s(k, k+1) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta \Theta(t_k, t) \times \mathbf{a}_b(t) dt \quad (1.8)$$

$$\Delta \Theta(t_k, t) = \int_{t_k}^t \omega_b(t) dt \quad (1.9)$$

Кинематическое уравнение (1.2) рассматривается в упрощенном виде, допускающем отбрасывание третьего члена уравнения при одновременной замене во втором члене уравнения вектора ориентации на его приближенное значение, а именно [4, 9]:

$$\dot{\Phi} = \omega_b(t) + \frac{1}{2} \Delta \Theta(t_k, t) \times \omega_b(t) \quad (1.10)$$

Интегрирование уравнения (1.10) приводит к следующему алгоритму вычисления вектора ориентации на интервале  $(t_k, t_{k+1})$ :

$$\Phi(k, k+1) = \Delta \Theta(k, k+1) + \delta \Theta_c(k, k+1) \quad (1.11)$$

$$\delta \Theta_c(k, k+1) = \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta \Theta(t_k, t) \times \omega_b(t) dt \quad (1.12)$$

$$\Delta \Theta(k, k+1) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega_b(t) dt \quad (1.13)$$

Величины  $\Delta\Theta$ ,  $\Delta V$  представляют собой вектора выходных сигналов соответственно гироскопов и акселерометров в форме квазиординат. Поэтому ключевая проблема при определении параметров углового и поступательного движения тела состоит в разработке численных алгоритмов вычисления сходных по структуре интегралов (1.8), (1.12). Полагается, что получаемая от инерциальных измерителей информация имеет вид приращений кратных интегралов от векторов  $\omega_b$  и  $a_b$  на такте опроса  $\Delta T$ , а именно

$$\Delta\Theta^r = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dots \int_{t_k}^{t_{r-1}} \omega(\tau_r) d\tau_r \dots d\tau_1, \quad \Delta V^r = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dots \int_{t_k}^{t_{r-1}} a(\tau_r) d\tau_r \dots d\tau_1 \quad (1.14)$$

Здесь и далее в работе подстрочный индекс у векторов  $\omega_b$  и  $a_b$  опущен для упрощения записи.

**2. Традиционный подход.** Общепринятый подход к разработке численных алгоритмов вычисления интегралов (1.8), (1.12) базируется на использовании полиномиальной аппроксимации для векторов угловой скорости и кажущегося ускорения на интервале интегрирования [1–5, 9]. Для изложения новых подходов к синтезу численных алгоритмов и оценки полученных результатов нам потребуется кратко представить традиционную методику вывода алгоритмов и получить несколько примеров алгоритмов. Сделаем это следуя общей методике, представленной в [9], согласно которой решение для искомых интегралов выражается через коэффициенты полиномиальных моделей измеряемых сигналов, которые в свою очередь вычисляются через традиционные выходные сигналы гироскопов и акселерометров в форме квазиординат ( $\Delta\Theta$ ,  $\Delta V$ ) в промежуточных точках внутри интервала интегрирования. Частота опроса измерителей кратна частоте решения задачи, а количество коэффициентов, которые могут быть определены, равно количеству выходных сигналов измерителей, доступных на интервале интегрирования.

В качестве примера вычисления интеграла (1.8) получим алгоритм для линейной модели  $\omega$  и  $a$  на интервале  $(t_k, t_{k+1})$ :

$$\omega(t_k + \tau) = A_\omega + B_\omega \tau, \quad a(t_k + \tau) = A_a + B_a \tau$$

$$A_\omega = \omega(t_k), \quad A_a = a(t_k)$$

$$B_\omega = \dot{\omega}(t_k), \quad B_a = \dot{a}(t_k)$$

В данном случае для определения коэффициентов полиномиальных моделей необходимо иметь по два выходных сигнала от измерителей на такте интегрирования, тогда решение для коэффициентов  $A$ ,  $B$  можно получить, решая идентичные системы из двух линейных неоднородных алгебраических уравнений, записанные для  $\Delta\Theta$  и  $\Delta V$ . В случае, когда моменты опроса измерителей равномерно распределены на интервале  $\Delta T$ , указанное решение имеет следующий вид:

$$\hat{A}_\omega = \frac{1}{\Delta T} (3\Delta\Theta_1 - \Delta\Theta_2), \quad \hat{A}_a = \frac{1}{\Delta T} (3\Delta V_1 - \Delta V_2) \quad (2.1)$$

$$\hat{B}_\omega = \frac{4}{\Delta T^2} (\Delta\Theta_2 - \Delta\Theta_1), \quad \hat{B}_a = \frac{4}{\Delta T^2} (\Delta V_2 - \Delta V_1)$$

где  $\hat{A}_\omega$ ,  $\hat{B}_\omega$ ,  $\hat{A}_a$ ,  $\hat{B}_a$  – оценки соответствующих коэффициентов;  $\Delta\Theta_1$ ,  $\Delta V_1$ ,  $\Delta\Theta_2$ ,  $\Delta V_2$  – выходные сигналы измерителей в моменты времени  $t_k + \Delta T/2$ ,  $t_k + \Delta T$ , соответственно.

Выражая функции под интегралом (1.8) через коэффициенты полиномиальных моделей угловой скорости и ускорения, после интегрирования получим

$$\delta V_s(k, k+1) = (A_\omega \times A_a) \frac{\Delta T^2}{2} + (A_\omega \times B_a) \frac{\Delta T^3}{3} + (B_\omega \times A_a) \frac{\Delta T^3}{6} + (B_\omega \times B_a) \frac{\Delta T^4}{8} \quad (2.2)$$

Подставляя выражения (2.1) в уравнение (2.2), окончательно получим

$$\delta V_s = \frac{1}{2}(\Delta \Theta \times \Delta V) + \frac{2}{3}[(\Delta \Theta_1 \times \Delta V_2) - (\Delta \Theta_2 \times \Delta V_1)] \quad (2.3)$$

$$\Delta \Theta = \Delta \Theta_1 + \Delta \Theta_2, \quad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2.$$

Для константной модели  $\omega$  и  $a$  алгоритм вычисления  $\delta V_s$  определяется первым членом в (2.3) [5]:

$$\delta V_s = \frac{1}{2}(\Delta \Theta \times \Delta V) \quad (2.4)$$

Локальная погрешность вычисления интеграла (1.8) обусловлена принятым усечением полиномиального представления сигналов на интервале интегрирования и состоит из двух составляющих, одна из которых является следствием отбрасывания членов более высокого порядка в выражении (2.2), а другая – обусловлена влиянием производных более высокого порядка на оценки коэффициентов принятых полиномиальных моделей измеряемых сигналов. Удерживая только наиболее значимые составляющие, для локальной погрешности алгоритма (2.3) можно получить

$$\Delta V = \frac{\Delta T^5}{720} [(C_\omega \times B_a) - (B_\omega \times C_a) + \frac{1}{4}(D_\omega \times A_a) - \frac{1}{4}(A_\omega \times D_a)] \quad (2.5)$$

где  $C_\omega$ ,  $D_\omega$ ,  $C_a$ ,  $D_a$  – вторая и третья производные от угловой скорости и ускорения в момент времени  $t_k$ , соответственно.

Методические погрешности алгоритмов интегрирования навигационных уравнений принято оценивать в условиях движения, при которых они являются низкочастотными (в предельном случае – постоянными) функциями времени. Известно, что данная ситуация может возникать при комбинации плоского гармонического углового движения относительно одной из осей инерциального базиса и гармонического линейного ускорения той же частоты по ортогональной оси. Постоянная погрешность по ускорению в этом случае выделяется по третьей оси инерциального базиса. Данное движение, получившее в зарубежной литературе название "sculling", традиционно используется как тестовое при оценке качества алгоритмов [5, 8]. Будем полагать, что имеют место гармоническое угловое движение амплитуды  $\theta_0$  и синфазное ему гармоническое линейное ускорение амплитуды  $a_0$  единой круговой частоты  $\omega_0$ . Заметим, что при данном движении в показаниях одного из акселерометров имеется постоянная составляющая (называемая ускорением "sculling"), и методическая погрешность алгоритма интегрирования навигационных уравнений обусловлена погрешностью вычисления интеграла (1.8), который и обеспечивает компенсацию данной составляющей при преобразовании в инерциальный базис.

Конкретизируя выражения (2.5) для движения типа "sculling", для погрешности по ускорению алгоритма преобразования (2.3)  $\Delta W$ , определяемой как отношение соответствующей проекции погрешности  $\Delta V$  к интервалу интегрирования, можно получить

$$\Delta W = \frac{\theta_0 a_0}{2} \cdot \frac{3(\omega_0 \Delta T)^4}{1440} \quad (2.6)$$

Для погрешности алгоритма (2.4) в тех же условиях имеем

$$\Delta W = \frac{\theta_0 a_0}{2} \cdot \frac{(\omega_0 \Delta T)^2}{6} \quad (2.7)$$

В качестве примера вычисления интеграла (1.12) получим алгоритм для квадратичной модели  $\omega$  на интервале  $(t_k, t_{k+1})$ :

$$\omega(t_k + \tau) = A_\omega + B_\omega \tau + C_\omega \tau^2 / 2, \quad C_\omega = \ddot{\omega}(t_k)$$

В данном случае для определения коэффициентов полиномиальной модели необходимо иметь три выходных сигнала гироскопов на такте интегрирования, тогда решение для коэффициентов  $A, B, C$  можно получить, решая систему из трех линейных неоднородных алгебраических уравнений, записанных для величин  $\Delta\Theta$ . В случае, когда моменты опроса измерителей равномерно распределены на интервале  $\Delta T$ , указанное решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{A}_\omega &= \frac{1}{2\Delta T} (11\Delta\Theta_1 - 7\Delta\Theta_2 + 2\Delta\Theta_3) \\ \hat{B}_\omega &= \frac{9}{\Delta T^2} (-2\Delta\Theta_1 + 3\Delta\Theta_2 - \Delta\Theta_3) \\ \hat{C}_\omega &= \frac{27}{\Delta T^3} (\Delta\Theta_1 - 2\Delta\Theta_2 + \Delta\Theta_3)\end{aligned}\quad (2.8)$$

где  $\hat{A}_\omega, \hat{B}_\omega, \hat{C}_\omega$  – оценки соответствующих коэффициентов;  $\Delta\Theta_1, \Delta\Theta_2, \Delta\Theta_3$  – выходные сигналы гироскопов в моменты времени  $t_k + \Delta T/3, t_k + 2\Delta T/3, t_k + \Delta T$ , соответственно.

Выражая функции под интегралом (1.12) через коэффициенты полиномиальной модели угловой скорости, после интегрирования получим

$$\delta\Theta_c(k, k+1) = (A_\omega \times B_\omega) \frac{\Delta T^3}{12} + (A_\omega \times C_\omega) \frac{\Delta T^4}{24} + (B_\omega \times C_\omega) \frac{\Delta T^5}{120}\quad (2.9)$$

Подставляя выражения (2.8) в уравнение (2.9), окончательно получим

$$\delta\Theta_c = X(\Delta\Theta_1 \times \Delta\Theta_3) + Y\Delta\Theta_2 \times (\Delta\Theta_3 - \Delta\Theta_1), \quad X = 33/80, Y = 57/80\quad (2.10)$$

Локальная погрешность вычисления интеграла (1.12) обусловлена принятым усечением полиномиального представления угловой скорости на интервале интегрирования и состоит из двух составляющих, одна из которых является следствием отбрасывания членов более высокого порядка в выражении (2.9), а другая – обусловлена влиянием производных более высокого порядка на оценки коэффициентов принятой полиномиальной модели  $\omega$ . Удерживая только наиболее значимые составляющие, для локальной погрешности алгоритма (2.10) можно получить [10]:

$$\Delta_\theta = \frac{\Delta T^5}{6480} (A_\omega \times D_\omega)\quad (2.11)$$

Методические погрешности алгоритмов интегрирования кинематических уравнений традиционно оценивают в условиях конического движения, при котором они носят характер вычислительного дрейфа вдоль оси, которая описывает конус. При коническом движении гироскоп, ориентированный вдоль этой оси, измеряет постоянную угловую скорость и методическая погрешность алгоритма ориентации обусловлена погрешностью вычисления интеграла (1.12), который и обеспечивает компенсацию данной составляющей при вычислении изменения угловой ориентации связанного базиса на такте решения задачи.

Конкретизируя выражение (2.11) для конического движения, для вычислительного дрейфа рассматриваемого алгоритма  $\varepsilon$ , определяемого как отношение проекции погрешности  $\Delta_\theta$  на ось, описывающую конус, к интервалу интегрирования, можно получить [10]:

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 \omega_c}{2} \cdot \frac{(\omega_c \Delta T)^4}{3240}\quad (2.12)$$

где  $\alpha$  – угол полураствора конуса,  $\omega_c$  – круговая частота конического движения.

Данный алгоритм и алгоритмы, полученные с использованием полиномиальных моделей более высокого порядка для аппроксимации угловой скорости, могут быть

оптимизированы под коническое движение путем специальной "настройки" коэффициентов алгоритма без изменения его структуры. Известны две методики оптимизации, одна из которых предполагает получение аналитического выражения для погрешности алгоритма в виде ряда по степеням  $\Delta T$  с последующим определением считающихся неизвестными коэффициентов  $X, Y$  из условия зануления высших членов ряда [9]. Другая методика использует характерные для конического движения векторные соотношения связи между производными от угловой скорости [10]. Для пояснения свойств оптимизированных алгоритмов приведем выражения для погрешностей алгоритма (2.10), оптимизированного под коническое движение. Данный алгоритм отличается значениями коэффициентов, которые в данном случае равны [9]:  $X = 9/20, Y = 27/40$ . Погрешность такого алгоритма в условиях конического движения определяется выражением:

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 \omega_c}{2} \frac{(\omega_c \Delta T)^6}{102060} \tag{2.13}$$

Для общего случая движения локальная погрешность оптимизированного алгоритма такова [8]:

$$\Delta_\theta = \frac{\Delta T^4}{120} (A_\omega \times C_\omega)$$

Данный пример является иллюстрацией общего вывода о том, что в условиях конического движения оптимизированные алгоритмы ориентации на два порядка точнее соответствующих неоптимизированных алгоритмов. В то же время алгоритмы, оптимизированные под коническое движение, в условиях произвольного углового движения демонстрируют более низкую точность, уступая соответствующим неоптимизированным алгоритмам. Заметим, что аналогичным образом оптимизируют и алгоритмы интегрирования навигационных уравнений под движение типа "sculling" [8]. Свойства таких алгоритмов аналогичны свойствам алгоритмов интегрирования кинематических уравнений, оптимизированных под коническое движение. Отметим также, что коэффициенты численных алгоритмов интегрирования навигационных и кинематических уравнений, полученных для полиномиальных моделей сигналов одного и того же порядка, одинаковы [8].

**3. "Сглаживающий" подход.** Согласно традиционному подходу при вычислении интегралов (1.8), (1.12) коэффициенты полиномиальных моделей функций под интегралом определяются через выходные сигналы измерителей в детерминированной постановке, когда количество искомым коэффициентов равно количеству имеющихся выходных сигналов измерителей. Однако более корректной является статистическая постановка данной задачи, которая позволила бы придать алгоритмам сглаживающие свойства.

В качестве примера рассмотрим задачу оценивания коэффициентов  $A_\omega, B_\omega, C_\omega$  квадратичной модели сигнала угловой скорости  $\omega(t)$  в проекции на некоторую ось на фоне аддитивного шума. Представляется вполне естественным использовать для решения данной задачи метод наименьших квадратов (МНК) в пакетном варианте, основанный на ортогональных полиномах Чебышева. В предположении, что измерения угловой скорости доступны с тактом  $\Delta t$  на интервале  $(t_k, t_k + \Delta T)$ , для МНК-оценок искомым параметров можно записать

$$\left\| \begin{matrix} \hat{A}_\omega \\ \hat{B}_\omega \Delta t \\ \hat{C}_\omega \Delta t^2 / 2 \end{matrix} \right\| = K_\omega (3 \times 3) \left\| \begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{matrix} \right\| \tag{3.1}$$

$$S_0 = \sum_{i=1}^N \omega_i, \quad S_1 = \sum_{i=1}^N \omega_i i, \quad S_2 = \sum_{i=1}^N \omega_i i^2 \tag{3.2}$$

Здесь  $K_\omega$  – квадратная матрица с постоянными коэффициентами, являющимися

известными функциями общего количества измерений  $N(N = \Delta T/\Delta t)$ ,  $i$  – текущий номер измерения  $\omega$ .

Очевидно, что сглаживающий эффект может быть достигнут, если количество измерений  $\omega$  превышает количество коэффициентов модели, подлежащих определению.

Для гироскопов с выходными сигналами в виде квазиординат данный подход был применен при использовании в качестве измерения значений интеграла от угловой скорости на интервале сглаживания, полиномиальная модель которого аналитически выражается через параметры модели угловой скорости [3, 10]. Однако, для сглаживания высокочастотного шума требуется привлечение очень большого числа дополнительных выходных сигналов на такте решения задачи, что ведет к пропорциональному усложнению алгоритма и делает этот путь практически нереализуемым [3].

Между тем алгоритм МНК может быть приведен к виду, позволяющему использовать приращения кратных интегралов от измеряемого сигнала на интервале сглаживания. Пусть приращения однократного ( $\Delta\Theta^1$ ), двойного ( $\Delta\Theta^2$ ) и тройного ( $\Delta\Theta^3$ ) интегралов от угловой скорости на интервале  $\Delta T$  заданы дискретно, в виде следующих кратных сумм:

$$\Delta\Theta^1 = \Delta t \sum_{i=1}^N \omega_i, \quad \Delta\Theta^2 = \Delta t^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \omega_j; \quad \Delta\Theta^3 = \Delta t^3 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^j \omega_l \quad (3.3)$$

Нетрудно заметить, что величины  $\Delta\Theta^1$ ,  $\Delta\Theta^2$ ,  $\Delta\Theta^3$  можно также представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta\Theta^1 &= \Delta t \tilde{S}_0, & \Delta\Theta^2 &= \Delta t^2 \tilde{S}_1, & 2\Delta\Theta^3 &= \Delta t^3 \tilde{S}_2 + \Delta t \Delta\Theta^2 \\ \tilde{S}_0 &= \sum_{i=1}^N \omega_i, & \tilde{S}_1 &= \sum_{i=1}^N \omega_i (N+1-i), & \tilde{S}_2 &= \sum_{i=1}^N \omega_i (N+1-i)^2 \end{aligned}$$

Поскольку суммы  $\tilde{S}_0$ ,  $\tilde{S}_1$ ,  $\tilde{S}_2$  очевидным образом можно выразить через исходные суммы  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ , используемые в формуле для МНК-оценки (3.1), то, следовательно, можно установить связь между этими суммами и кратными интегралами  $\Delta\Theta^1$ ,  $\Delta\Theta^2$ ,  $\Delta\Theta^3$ . В результате МНК-оценки искомых параметров  $\hat{A}_\omega$ ,  $\hat{B}_\omega$ ,  $\hat{C}_\omega$  можно получить с использованием приращений кратных интегралов от измеряемого сигнала в соответствии с формулой, аналогичной (3.1). Приближенные выражения для искомых оценок, полученные для  $N \rightarrow \infty$ , имеют следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} \hat{A}_\omega &= \frac{3}{\Delta T} \left( \Delta\Theta^1 - \frac{8}{\Delta T} \Delta\Theta^2 + \frac{20}{\Delta T^2} \Delta\Theta^3 \right) \\ \hat{B}_\omega &= \frac{24}{\Delta T^2} \left( -\Delta\Theta^1 + \frac{7}{\Delta T} \Delta\Theta^2 - \frac{15}{\Delta T^2} \Delta\Theta^3 \right) \\ \hat{C}_\omega &= \frac{60}{\Delta T^3} \left( \Delta\Theta^1 - \frac{6}{\Delta T} \Delta\Theta^2 + \frac{12}{\Delta T^2} \Delta\Theta^3 \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Можно показать, что для  $N = 100$  разница между точными и приближенными значениями коэффициентов в соотношениях (3.4) не превышает 1%.

При бесконечном увеличении количества измерений  $\omega$  на интервале интегрирования кратные интегралы, вычисляемые в соответствии с (3.3) путем многократного суммирования измерений с тактом  $\Delta t$ , переходят в свои точные значения, соответствующие формулам многократного непрерывного интегрирования. В связи с этим была установлена связь между приближенными МНК-оценками по формулам (3.4) и оценками параметров  $A_\omega$ ,  $B_\omega$ ,  $C_\omega$ , которые можно получить в детерминированной постановке, решив систему из трех неоднородных линейных алгебраических уравне-

ний, которые устанавливают связь всех используемых кратных интегралов (в данном случае – однократного, двойного и тройного) с искомыми параметрами полиномиальной модели сигнала (угловой скорости). Исходя из принятой модели для угловой скорости, указанная система уравнений такова

$$\begin{aligned}\Delta\Theta^1 &= A_\omega \Delta T + B_\omega \frac{\Delta T^2}{2} + C_\omega \frac{\Delta T^3}{6} \\ \Delta\Theta^2 &= A_\omega \frac{\Delta T^2}{2} + B_\omega \frac{\Delta T^3}{6} + C_\omega \frac{\Delta T^4}{24} \\ \Delta\Theta^3 &= A_\omega \frac{\Delta T^3}{6} + B_\omega \frac{\Delta T^4}{24} + C_\omega \frac{\Delta T^5}{120}\end{aligned}$$

Нетрудно установить, что решение данной системы уравнений совпадает с (3.4). Таким образом, при выработке приращений кратных (кратности от 1 до  $n$ ) интегралов от измеряемого сигнала на некотором интервале  $\Delta T$ , осуществляемой путем многократного суммирования измерений с тактом  $\Delta t$ , оценки коэффициентов полиномиальной модели сигнала, получаемые как решение системы из  $n$  алгебраических уравнений, которые устанавливают связь всех кратных интегралов с искомыми коэффициентами, приобретают свойство МНК-оценок по мере бесконечного увеличения  $N$ .

Естественно, данный подход может быть использован для оценивания коэффициентов полиномиальных моделей сигнала любой сложности. Приведем выражения для оценок коэффициентов линейной модели, которые потребуются в дальнейшем

$$\hat{A}_\omega = \frac{6}{\Delta T^2} \left( \Delta\Theta^2 - \Delta\Theta^1 \frac{\Delta T}{3} \right), \quad \hat{B}_\omega = \frac{12}{\Delta T^3} \left( \Delta\Theta^1 \frac{\Delta T}{2} - \Delta\Theta^2 \right) \quad (3.5)$$

Методика синтеза "сглаживающих" алгоритмов интегрирования навигационных и кинематических уравнений повторяет традиционную методику, отличаясь от последней лишь в части определения коэффициентов полиномиальных моделей сигналов. Ниже в качестве примеров дается вывод алгоритма вычисления интеграла (1.8) для линейной модели  $\omega$  и  $a$  на интервале интегрирования и алгоритма вычисления интеграла (1.12) для квадратичной модели  $\omega$ .

Искомые алгоритмы получим, подставив записанные в векторном виде соотношения (3.5) и аналогичные им соотношения для коэффициентов модели ускорения в уравнение (2.2), а соотношения (3.4) в уравнение (2.9). Окончательно имеем

$$\delta V_s = \frac{1}{2} (\Delta\Theta^1 \times \Delta V^1) - \frac{1}{\Delta T} [(\Delta\Theta^1 \times \Delta V^2) - (\Delta\Theta^2 \times \Delta V^1)] \quad (3.6)$$

$$\delta \Theta_c = \frac{6}{\Delta T^2} (\Delta\Theta^1 \times \Delta\Theta^3) - \frac{3}{\Delta T} \Delta\Theta^2 \times \left( \frac{4}{\Delta T^2} \Delta\Theta^3 - \Delta\Theta^1 \right) \quad (3.7)$$

Напомним, что верхний индекс у  $\Delta\Theta$  и  $\Delta V$  обозначает порядок кратности интеграла, а  $\Delta\Theta^1 = \Delta\Theta$ ,  $\Delta V^1 = \Delta V$ .

Нетрудно убедиться, что для константной модели  $\omega$  и  $a$  алгоритм вычисления  $\delta V_s$  совпадает с традиционным алгоритмом (2.4).

По структуре "сглаживающие" алгоритмы идентичны соответствующим традиционным алгоритмам, но используют несколько последовательных кратных интегралов от измеряемых сигналов вместо такого же числа обычных выходных сигналов измерителей. Заметим, что так же, как и традиционные алгоритмы, "сглаживающие" алгоритмы вычисления интегралов (1.8) и (1.12), полученные для полиномиальных моделей сигналов одного и того же порядка, имеют одинаковые численные значения коэффициентов.



Выражения для локальных погрешностей "сглаживающих" алгоритмов можно получить аналогично тому, как они выводятся для соответствующих традиционных алгоритмов, но с учетом отличий в той составляющей погрешности, которая обусловлена влиянием производных более высокого порядка на оценки коэффициентов принятых полиномиальных моделей измеряемых сигналов. Соотношения, устанавливающие связь используемых при выводе алгоритма оценок коэффициентов моделей с высшими производными измеряемых сигналов, можно получить, решая те же системы линейных алгебраических уравнений, из которых определялись сами оценки искомых коэффициентов модели, но с учетом высших производных в уравнениях для кратных интегралов. Так, например, удерживая только вторые ( $C_\omega$ ) и третьи ( $D_\omega$ ) производные от угловой скорости, можно получить

$$A_\omega = \hat{A}_\omega + C_\omega \Delta T^2 / 12 + D_\omega \Delta T^3 / 30$$

$$B_\omega = \hat{B}_\omega - C_\omega \Delta T / 2 - D_\omega 3\Delta T^2 / 20$$

где  $A_\omega, B_\omega$  – истинные значения коэффициентов линейной модели;  $\hat{A}_\omega, \hat{B}_\omega$  – оценки соответствующих коэффициентов, вычисленные по формулам (3.5).

В итоге для локальных погрешностей алгоритмов (3.6), (3.7) можно получить, соответственно

$$\Delta_V = \frac{\Delta T^5}{720} [(C_\omega \times B_a) - (B_\omega \times C_a)] \quad (3.8)$$

$$\Delta_\theta = \frac{\Delta T^7}{100800} (C_\omega \times D_\omega) \quad (3.9)$$

Конкретизируя полученные выражения для тестовых движений (движения типа "sculling" и конического движения), соответственно имеем

$$\Delta W = \frac{\theta_0 a_0}{2} \cdot \frac{4(\omega_0 \Delta T)^4}{1440} \quad (3.10)$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 \omega_c (\omega_c \Delta T)^6}{2 \cdot 50400} \quad (3.11)$$

Анализируя полученные соотношения можно заключить, что "сглаживающий" алгоритм, полученный для линейной модели измеряемых параметров, приблизительно равнозначен соответствующему традиционному алгоритму. Алгоритм, полученный для квадратичной модели угловой скорости, обладает необычным свойством по сравнению со своим традиционным аналогом. При выводе соотношения (3.9) было обнаружено, что в обеих составляющих погрешности алгоритма (3.7) члены, пропорциональные 5-й и 6-й степеням от  $\Delta T$ , компенсируют друг друга. В результате точность соответствующего традиционного алгоритма (2.10) с коэффициентами, оптимизированными под коническое движение, в данном случае обеспечивается и для произвольного движения объекта, что видно из сравнения выражений (3.9) и (3.11). Таким образом, для "сглаживающих" алгоритмов процедура оптимизации вообще теряет смысл. Для того, чтобы выяснить, является ли данное свойство характерным для всего класса "сглаживающих" алгоритмов, был синтезирован алгоритм, который использует четыре кратных интеграла для выработки оценок коэффициентов кубической модели угловой скорости. Было показано [7], что и в этом случае происходит компенсация соответствующих членов в обеих составляющих локальной погрешности вычисления вектора ориентации.

**4. "Инвариантный" подход.** При вычислении интегралов (1.8), (1.12) традиционно используется полиномиальное разложение обоих сомножителей в подынтегральных

выражениях на интервале интегрирования относительно некоторой точки данного интервала. Математической основой альтернативного подхода к вычислению интегралов такого вида, который мы назвали "инвариантным", является проведение интегрирования с использованием полиномиального разложения только одного из сомножителей, что и обеспечивает инвариантность алгоритмов к другому сомножителю.

В общем случае данный подход позволяет получить два типа квадратурных формул вычисления интегралов рассматриваемого вида в зависимости от того, для какого из сомножителей в подынтегральном выражении используется полиномиальное представление. Соответственно полученные формулы обеспечивают инвариантность к разным параметрам.

Инвариантная к ускорению общая формула определения величины  $\delta V_s$  может быть получена интегрированием по частям в (1.8) при подстановке полиномиального представления для  $\Delta\Theta(t_k, t)$ , на интервале интегрирования. С учетом функциональной связи  $\Delta\Theta(t_k, t)$  и  $\omega(t)$  ( $\Delta\dot{\Theta} = \omega$ ) имеем

$$\delta V_s(k, k+1) = \Delta\Theta^1 \times \Delta V^1 - \omega_{k+1} \times \Delta V^2 + \dot{\omega}_{k+1} \times \Delta V^3 - \ddot{\omega}_{k+1} \times \Delta V^4 + \dots \quad (4.1)$$

Инвариантная к угловой скорости общая формула определения величины  $\delta V_s$ , полученная интегрированием по частям в (1.8) при подстановке полиномиального представления для  $a(t)$  на интервале интегрирования, имеет следующий вид:

$$\delta V_s(k, k+1) = \Delta\Theta^2 \times a_{k+1} - \Delta\Theta^3 \times \dot{a}_{k+1} + \Delta\Theta^4 \times \ddot{a}_{k+1} - \dots \quad (4.2)$$

Применение данного подхода к вычислению интеграла (1.12) приводит к единой квадратурной формуле для обоих вариантов выбора сомножителя, для которого используется полиномиальное представление. Данная формула имеет следующий вид:

$$\delta\Theta_c(k, k+1) = \Delta\Theta^2 \times \omega_{k+1} - \Delta\Theta^3 \times \dot{\omega}_{k+1} + \Delta\Theta^4 \times \ddot{\omega}_{k+1} - \dots \quad (4.3)$$

Наличие функциональной связи сомножителей  $\Delta\Theta(t_k, t)$  и  $\omega(t)$  в (1.12) строго говоря не позволяет считать полученную формулу инвариантной к угловой скорости. Однако, степень инвариантности алгоритмов, реализующих данную формулу, очевидно, будет все же выше, чем у соответствующих традиционных алгоритмов. Результаты исследования инвариантности новых алгоритмов в условиях высокочастотных составляющих в сигналах измерителей будут представлены ниже.

Заметим, что полученные выше соотношения также можно получить, воспользовавшись частным случаем формулы Коши для неоднородного линейного дифференциального уравнения.

Ограничивая количество членов, удерживаемых в полученных формулах, могут быть получены частные квадратурные формулы вычисления искомых величин различной точности. Требуемые для их реализации значения одного из измеряемых параметров и его производных в конце интервала интегрирования могут быть рассчитаны по выходным сигналам соответствующего инерциального измерителя в форме приращений кратных интегралов от измеряемого параметра на всем интервале интегрирования в соответствии с представленным выше "сглаживающим" подходом.

Так, инвариантный к ускорению алгоритм вычисления интеграла (1.8) для линейной модели угловой скорости можно получить, удерживая три члена в формуле (4.1) и используя записанные в векторном виде выражения (3.5) для коэффициентов модели угловой скорости. Пересчитывая коэффициенты модели с начальной на конечную точку интервала интегрирования, получим

$$\delta V_s = \Delta\Theta^1 \times \Delta V^1 + \frac{6}{\Delta T^2} \left( \Delta\Theta^2 - \frac{2\Delta T}{3} \Delta\Theta^1 \right) \times \Delta V^2 - \frac{12}{\Delta T^3} \left( \Delta\Theta^2 - \frac{\Delta T}{2} \Delta\Theta^1 \right) \times \Delta V^3 \quad (4.4)$$

Алгоритм вычисления интеграла (1.8) для константной модели угловой скорости определяется двумя членами в формуле (4.1). Выражая  $\omega_{k+1}$  через  $\Delta\Theta^1(t_k, t_{k+1})$ , после приведения подобных членов окончательно будем иметь

$$\delta V_s = \Delta\Theta^1 \times (\Delta V^1 - \Delta V^2 / \Delta T) \quad (4.5)$$

Инвариантный к угловой скорости алгоритм вычисления интеграла (1.8) для линейной модели ускорения можно получить, удерживая два члена в формуле (4.2) и используя выражения для коэффициентов модели ускорения, аналогичные (3.5). Пересчитывая коэффициенты модели с начальной на конечную точку интервала интегрирования, получим

$$\delta V_s = -\frac{6}{\Delta T^2} \Delta\Theta^2 \times \left( \Delta V^2 - \frac{2\Delta T}{3} \Delta V^1 \right) + \frac{12}{\Delta T^3} \Delta\Theta^3 \times \left( \Delta V^2 - \frac{\Delta T}{2} \Delta V^1 \right) \quad (4.6)$$

Алгоритм вычисления интеграла (1.8) для константной модели ускорения определяется первым членом в формуле (4.2). Выражая  $a_{k+1}$  через  $\Delta V^1(t_k, t_{k+1})$ , после приведения подобных членов находим

$$\delta V_s = \frac{1}{\Delta T} (\Delta\Theta^2 \times \Delta V^1) \quad (4.7)$$

Алгоритм вычисления интеграла (1.12) для квадратичной модели угловой скорости можно получить, удерживая три члена в формуле (4.3) и используя записанные в векторном виде выражения (3.4) для коэффициентов модели угловой скорости. Пересчитывая коэффициенты модели с начальной на конечную точку интервала интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} \delta\Theta_c = & \frac{18}{\Delta T^2} (\Delta\Theta^1 \times \Delta\Theta^3) - \frac{3}{2\Delta T} \Delta\Theta^2 \times \left( \frac{44}{\Delta T^2} \Delta\Theta^3 - 3\Delta\Theta^1 \right) - \\ & - \frac{30}{\Delta T^2} \left( \Delta\Theta^1 - \frac{6}{\Delta T} \Delta\Theta^2 + \frac{12}{\Delta T^2} \Delta\Theta^3 \right) \times \Delta\Theta^4 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Как следует из анализа полученных алгоритмов, "инвариантные" алгоритмы отличаются по структуре от соответствующих традиционных и "сглаживающих" алгоритмов.

Нетрудно убедиться, что "инвариантные" алгоритмы принимают вид соответствующих традиционных алгоритмов, если использовать полиномиальное представление и для второго измеряемого сигнала. Так, например, алгоритм (4.5) переходит в общеизвестный алгоритм (2.4) с учетом того, что для константной модели кажущегося ускорения справедливо следующее соотношение, устанавливающее связь между дополнительным и основным выходными сигналами акселерометров:  $\Delta V^2 = \Delta V^1 \Delta T / 2$ .

Согласно методике вывода алгоритмов данного класса точность частного алгоритма определяется порядком реализуемой частной квадратурной формулы (количеством членов, удерживаемых в общей квадратурной формуле) и погрешностями ее реализации (погрешностями вычисления коэффициентов полиномиальной модели угловой скорости или кажущегося ускорения). Выражения для локальных погрешностей алгоритмов могут быть получены, если выразить соответствующие кратные интегралы от измеряемого параметра через коэффициенты его полиномиальной модели и учесть соотношения для погрешностей вычисления тех коэффициентов полиномиальной модели другого параметра, которые используются в алгоритме.

Для локальных погрешностей алгоритмов (4.4), (4.6) при учете только наиболее значимых членов можно получить

$$\Delta V = \frac{\Delta T^5}{1440} (C_\omega \times B_a) \quad (4.9)$$

$$\Delta V = \frac{\Delta T^5}{1440} (B_\omega \times C_a) \quad (4.10)$$

Для движения типа "sculling" систематическая погрешность по ускорению рассматриваемых алгоритмов одинакова и определяется следующим образом:

$$\Delta W = \frac{\theta_0 a_0}{2} \frac{(\omega_0 \Delta T)^4}{720} \quad (4.11)$$

Для алгоритмов (4.5), (4.7) погрешность по ускорению в условиях движения типа "sculling" также одинакова и определяется следующим выражением:

$$\Delta W = \frac{\theta_0 a_0}{2} \frac{(\omega_0 \Delta T)^2}{12} \quad (4.12)$$

Для локальной погрешности алгоритма (4.8) можно получить:

$$\Delta_\theta = \frac{\Delta T^7}{201600} (C_\omega \times D_\omega) \quad (4.13)$$

Вычислительный дрейф в условиях конического движения равен:

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 \omega_c}{2} \frac{(\omega_c \Delta T)^6}{100800} \quad (4.14)$$

Таким образом, "инвариантные" алгоритмы, для константной и линейной модели измеряемых параметров, приблизительно равноточны соответствующим традиционным алгоритмам. Алгоритм (4.8), полученный для квадратичной модели угловой скорости, так же, как и соответствующий "сглаживающий" алгоритм (3.7), имеет одинаковую точность и при коническом, и при произвольном угловом движении, причем при коническом движении он равноточен соответствующему традиционному алгоритму (2.10), специально оптимизированному под данное движение, а при произвольном движении превосходит его по точности на три порядка. Исходя из идентичности интегралов (1.8) и (1.12) следует, что данным свойством обладают и "инвариантные" алгоритмы вычисления интеграла (1.8), которые используют квадратичные модели измеряемого сигнала и полиномиальные модели более высокого порядка. На том же основании можно полагать, что алгоритмы вычисления интегралов (1.8) и (1.12), полученные для полиномиальных моделей сигналов одного и того же порядка, имеют одинаковые численные значения коэффициентов.

**5. Интегрирование скорости.** Для реализации алгоритма (1.4) выработки перемещения  $S_i$  необходимо осуществлять непрерывное интегрирование скорости на интервале  $(t_k, t_{k+1})$ . Однако, значения  $V_i$ , определяемые в соответствии с (1.3), известны только в дискретные моменты времени  $t_k$ , поэтому алгоритм (1.4) точно реализован быть не может. Известные алгоритмы вычисления перемещения реализуют те или иные методы численного интегрирования в (1.4). Так, простейший алгоритм, использующий интегрирование методом прямоугольников, имеет вид

$$S_i(k+1) = S_i(k) + V_i(k) \Delta T \quad (5.1)$$

Может использоваться интегрирование методом трапеций или методы интегрирования более высокого порядка точности. Существенным является тот факт, что вне зависимости от используемого метода численного интегрирования значения  $S_i$  в точках  $t_k$  будут определяться с методическими погрешностями, величина которых зависит от такта решения задачи. Поэтому на частоту решения задачи накладывается ограничение – она должна превышать частоту наиболее высокочастотной значимой составляющей в спектре скорости.

Между тем алгоритм (1.4) тривиальном образом может быть преобразован к виду

$$S_i(k+1) = S_i(k) + \bar{V}_i(k) \Delta T + \delta S_i(k, k+1) \quad (5.2)$$

$$\delta S_i(k, k+1) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^t C_b^j a_b(\tau) d\tau dt \quad (5.3)$$

Соотношение (5.2) представляет собой другую, отличную от (1.4) форму точного дискретного алгоритма интегрирования скорости. При отсутствии погрешностей выработки величин  $\delta S_i$ , данный алгоритм позволяет точно, без методических погрешностей вычислять перемещение в моменты времени  $t_k$  вне зависимости от величины такта решения задачи  $\Delta T$ . В этом состоит принципиальное отличие данного алгоритма от алгоритмов вида (5.1). Возможность и точность реализации алгоритма (5.2) полностью определяется возможностью и точностью выработки величины  $\delta S_i$ , которые можно назвать частными приращениями кажущегося перемещения на такте решения задачи (в отличие от полных приращений перемещения, которые определяются вторым членом в (1.4) или суммой последних двух слагаемых в (5.2)).

При неизменной ориентации связанного с телом и инерциального базисов величины  $\delta S_i$  могут быть выработаны при наличии дополнительных выходных сигналов акселерометров в виде приращений двойного интеграла от кажущегося ускорения на такте  $\Delta T$ . В общем случае вычисление интеграла (5.3) сводится к вычислению следующего интеграла:

$$\delta S_{s_i}(k, k+1) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^t \Delta \Theta(t_k, \tau) \times a(\tau) d\tau dt \quad (5.4)$$

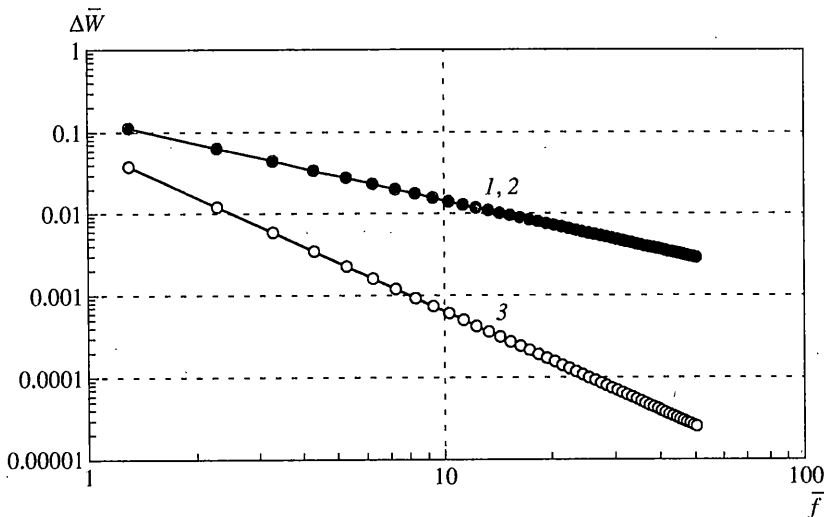
Численные алгоритмы вычисления величин  $\delta S_{s_i}$  могут быть разработаны с использованием и "сглаживающего", и "инвариантного" подходов аналогично тому, как и описанные выше алгоритмы вычисления величин  $\delta V_{s_i}$ .

Отметим, что использование точного алгоритма интегрирования скорости (5.2) совместно с простейшими инвариантными к ускорению алгоритмами вычисления величин  $\delta V_{s_i}$ ,  $\delta S_{s_i}$  оказалось весьма эффективным в случае, когда высокочастотные составляющие вызываются изолированно действующей линейной вибрацией и потому присутствуют только в измеряемом ускорении. Оказалось возможным обеспечить необходимую точность выработки параметров поступательного движения при частоте решения задач, определяемой динамикой углового движения, т.е. не превышающей частоту вибрации [6]. При этом потребовалось формирование только одного дополнительного сигнала акселерометров в виде приращений двойного интеграла от ускорения на такте решения задачи интегрирования навигационных уравнений.

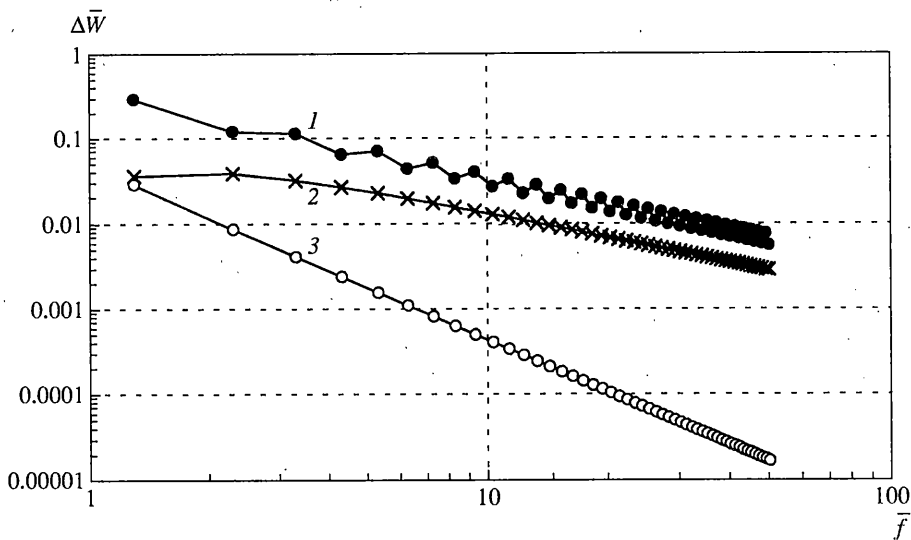
**6. Результаты моделирования.** Известно, что при наличии в исходной измерительной информации высокочастотных составляющих, обусловленных, в частности, инструментальными шумами измерителей, в процессе интегрирования навигационных и кинематических уравнений могут возникать систематические погрешности, называемые, соответственно, "pseudo-coning" и "pseudo-sculling" [4]. Действительно, пусть в показаниях одного из акселерометров и одного из гироскопов, ориентированных по ортогональным осям, имеются гармоники одной круговой частоты  $\omega_h$  и амплитуд  $\omega_{ps0}$  и  $a_{ps0}$ , соответственно, причем эти гармоники сдвинуты друг относительно друга по фазе на 90 градусов. Нетрудно заметить, что рассматриваемый случай похож на движение типа "sculling", однако в отличие от последнего в измерениях акселерометра, ориентированного по третьей оси связанного базиса, постоянный сигнал, равный ускорению "sculling", отсутствует. Поэтому при решении задачи с частотой, превышающей частоту гармонических составляющих  $f_h = \omega_h/2\pi$ , по одноименной оси инерциального базиса будет иметь место постоянная погрешность по ускорению, равная

$$\Delta W_{ps} = 1/2 \frac{\omega_{ps0} a_{ps0}}{\omega_h} \quad (6.1)$$

Очевидно, что по мере того, как частота решения будет становиться ниже частоты  $f_h$ , гармонические составляющие будут сглаживаться алгоритмом, и, следовательно, указанные систематические погрешности будут ослабляться с уменьшением частоты решения задачи.

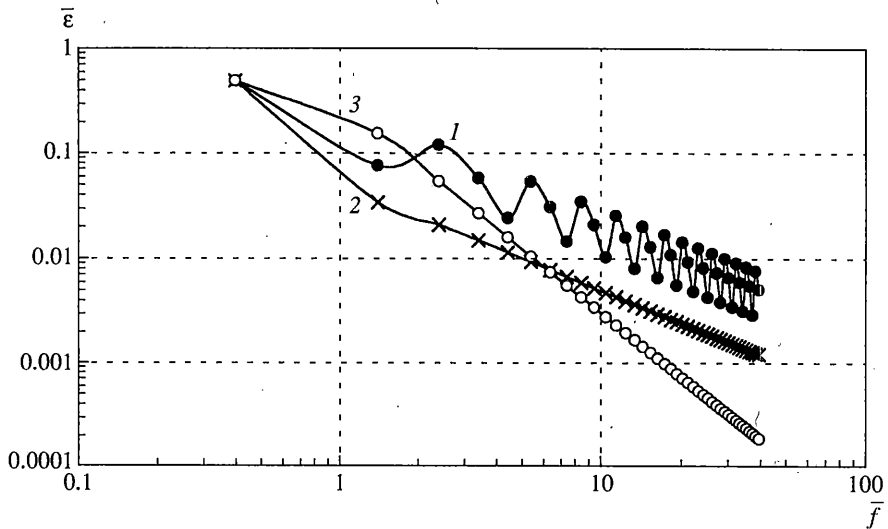


Фиг. 1



Фиг. 2

Степень ослабления рассматриваемой погрешности алгоритмами разных классов была оценена по результатам моделирования. На фиг. 1, 2 в логарифмическом масштабе приведены результаты численного моделирования алгоритмов интегрирования навигационных уравнений, использующих полученные в статье алгоритмы вычисления интеграла (1.8) трех классов – традиционных (1), "сглаживающих" (2) и "инвариантных" (3) – для константной и линейной моделей измеряемых сигналов, соответственно. Определялась зависимость относительной погрешности по ускорению  $\Delta \bar{W}$  (равной отношению систематической погрешности по ускорению к ее максимальному значению  $\Delta W_{ps}$ ) от относительной частоты высокочастотной гармоники  $\bar{f}$  (равной отношению частоты данной гармоники  $f_h$  к частоте решения задачи  $f$ ).



Фиг. 3

Данную зависимость можно трактовать как своеобразную амплитудно-частотную характеристику, характеризующую сглаживающие свойства алгоритмов. Соотношение частот  $f_h$  и  $f$  выбиралось таким, что транспонированная частота высокочастотной гармоники  $\tilde{f}_h$  ( $\tilde{f}_h = f_h - nf$ ,  $n$  – целое число) равнялась 0.3 $f$ .

Для исследования погрешностей "pseudo-coning" было проведено моделирование алгоритмов интегрирования кинематических уравнений, использующих полученные в статье алгоритмы вычисления интеграла (1.12) трех классов – традиционных, "сглаживающих" и "инвариантных" – при наличии высокочастотных гармонических составляющих круговой частоты  $\omega_h$  и амплитуды  $\omega_{pc0}$  в показаниях двух гироскопов, ориентированных по ортогональным осям. Определялась зависимость относительного дрейфа  $\bar{\epsilon}$  от относительной частоты возмущающего воздействия. Под относительным дрейфом понималось отношение вычислительного дрейфа к угловой скорости "pseudo-coning" ( $\epsilon_{pc}$ ), равной

$$\epsilon_{pc} = 1/2(\omega_{pc0}^2 / \omega_h) \quad (6.2)$$

Результаты численного моделирования рассматриваемых алгоритмов для значения транспонированной частоты высокочастотной составляющей  $\tilde{f}_h$ , равной 0.4 $f$ , приведены в логарифмическом масштабе на фиг. 3. При моделировании частота  $f_h$  изменялась в широком диапазоне при неизменной частоте решения задачи.

Результаты моделирования свидетельствуют о заметном преимуществе новых алгоритмов над соответствующими традиционными алгоритмами в плане ослабления рассматриваемых систематических погрешностей. Среди предложенных "инвариантные" алгоритмы являются более эффективными, чем соответствующие "сглаживающие" алгоритмы, причем их преимущество возрастает с увеличением частоты возмущающего воздействия.

Дополнительно было проведено сравнительное моделирование соответствующих традиционных и полученных в статье новых алгоритмов в условиях конического движения и движения типа "sculling". Результаты моделирования очень близко совпали с полученными аналитическими оценками, подтвердив заключение о равнозначности соответствующих алгоритмов всех трех классов в этих условиях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев Д.В., Ткаченко А.И. Системы инерциального управления. Алгоритмические аспекты. Киев: Наук. думка, 1991. 203 с.
2. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев: Наук. думка, 1995. 279 с.
3. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
4. Savage P.G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design Pt 1. Attitude algorithms // Guidance, Control, and Dynamics. 1998. V. 21. № 1. P. 19–28.
5. Savage P.G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design Pt 2. Velocity and position algorithms // Guidance, Control, and Dynamics. 1998. V. 21. № 2. P. 208–221.
6. Лесючевский В.М., Литманович Ю.А. Новые подходы в разработке дискретных алгоритмов выработки параметров поступательного движения объекта в инерциальных навигационных системах // Гироскопия и навигация. 1994. № 2. С. 39–58.
7. Litmanovich Yu.A. Use of angular rate multiple integrals as input signals for strapdown attitude // Proc. Symp. Gyro Technology. 1997. P. 20.0–20.9.
8. Ignagni M.B. Duality of optimal strapdown sculling and coning compensation algorithms // Navigation. 1998. V. 45. № 2. P. 85–96.
9. Miller R.B. A new strapdown attitude algorithm // Guidance, Control and Dynamics. 1983. V. 6. № 4. P. 287–291.
10. Gusinsky V.Z., Lesyuchevsky V.M., Litmanovich Yu.A., Musoff H., Schmidt G.T. New procedure for deriving optimized strapdown attitude algorithms // Guidance, Control and Dynamics. 1997. V. 20. № 4. P. 673–680.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
22.12.1999