

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. А.В. ПЕТРОВСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОБРАЩЕННОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО МАЯТНИКА ПРИ НЕПОТЕНЦИАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Изучено поведение обращенного маятника с вязкоупругим кардановым соединением звеньев при нагружении мертвой и следящей силами. Проведен анализ устойчивости равновесных состояний в зависимости от управляющих параметров (мертвая сила – следящая сила). Изучено послекритическое поведение маятника, в частности, исследована устойчивость периодических движений в плоскости первичной потери устойчивости.

Поведение упругих систем под действием непотенциальных (в частности, следящих) сил изучено достаточно подробно [1–6]. Однако здесь имеется еще немало вопросов, представляющих интерес с точки зрения нелинейной динамики. В этом отношении весьма интересна и показательна задача о поведении обращенного пространственного маятника при нагружении мертвой и следящей силами. Например, маятник может обладать двумя взаимно ортогональными главными плоскостями жесткости и демпфирования. Потеря устойчивости такого маятника происходит в одной из этих плоскостей. При изучении послекритического поведения систем, кроме обычно исследуемых факторов (непотенциальность нагружения, демпфирование), в данной задаче важна роль взаимодействия форм колебаний в двух главных плоскостях. Кроме того, представляет интерес исследование сочетания квазистатического (дивергенция) и динамического (флаттер) типов потери устойчивости. Здесь возможно явление вторичного флаттера в области дивергенции, впервые обнаруженное для аэроупругих систем [7] и в дальнейшем подробно изученное [8–10].

В данной статье проводится полный систематический анализ как равновесных состояний типа дивергенции, так и движений в области флаттера обращенного пространственного двухзвенного маятника. Основное внимание уделяется исследованию устойчивости состояний. В частности, как и в случае аэроупругой системы [7], обнаружено явление вторичного флаттера в области дивергенции. В отличие от аэроупругой системы, где это явление наблюдается лишь при определенных соотношениях парциальных параметров демпфирования, в случае маятника оно присутствует всегда.

1. Уравнения движения. Обращенный пространственный маятник, состоящий из двух прямолинейных стержневых звеньев, нагружен на верхнем конце мертвой вертикальной силой P и следящей силой Q , направленной вдоль оси верхнего звена. Соединения звеньев – кардановые, вязкоупругие. Введем неподвижную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ (X) с началом в узле, соединяющем нижнее звено с основанием, и вертикальной осью X_3 . Оси X_1 и X_2 совпадают с осями нижнего кардана в ненагруженном состоянии.

Наряду с неподвижной системой координат для каждого звена введем жестко связанную со звеном систему $OY_1Y_2Y_3$ (Y). В ненагруженном состоянии оси обеих систем совпадают. Ось Y_2 направлена по оси кардана, жестко связанной с рассматриваемым звеном. Она ортогональна другой оси кардана, жестко связанной с соседним нижним звеном или основанием, и вращается вокруг нее. Относительное движение звена есть сумма вращений вокруг ортогональных осей кардана. Векторы будем задавать компонентами либо в системе X , либо в системе Y ; на используемую систему будет указывать нижний индекс X или Y .

Выберем в качестве обобщенных координат углы поворота звеньев относительно осей соединительных карданов φ_k, ψ_k ($k = 1, 2$): φ_k – угол поворота вокруг оси, жестко связанной с соседним нижним звеном (основанием), ψ_k – угол поворота вокруг оси, жестко связанной с рассматриваемым звеном. Переход к системе Y рассматриваемого звена от системы, жестко связанной с соседним нижним звеном (или основанием) задается матрицей ортогонального преобразования

$$\mathbf{H}(\varphi_k, \psi_k) = \begin{vmatrix} \cos \psi_k & \sin \varphi_k \sin \psi_k & -\cos \varphi_k \sin \psi_k \\ 0 & \cos \varphi_k & \sin \varphi_k \\ \sin \psi_k & -\sin \varphi_k \cos \psi_k & \cos \varphi_k \cos \psi_k \end{vmatrix} \quad (k=1, 2) \quad (1.1)$$

Векторы абсолютных угловых скоростей звеньев определяются соотношениями

$$\omega_{1Y} = \begin{vmatrix} \cos \psi_1 & 0 & -\sin \psi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_1 & 0 & \cos \psi_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\psi}_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \mathbf{W}(\psi_1) \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\psi}_1 \end{vmatrix}$$

$$\omega_{2Y} = \mathbf{H}(\varphi_2, \psi_2) \mathbf{W}(\psi_1) \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\psi}_1 \end{vmatrix} + \mathbf{W}(\psi_2) \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\psi}_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{W}(\psi_k) = \begin{vmatrix} \cos \psi_k & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin \psi_k & 0 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

где штрихом обозначена производная по времени.

Пусть звенья – одинаковые тонкие однородные стержни массы m и длины l . Кинетическая энергия маятника определяется выражением

$$2T = I\{4[\omega_1^2 - (1-a/4)\omega_{1Y,3}^2] + \omega_2^2 - (1-a)\omega_{2Y,3}^2 + 12|\mathbf{H}(\varphi_2, \psi_2)\mathbf{u}_{1Y} + (1/2)\mathbf{u}_{2Y}|^2\} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}_{kY} = \omega_{kY} \times \mathbf{e}_{kY}, \quad \mathbf{e}_{kY} = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Здесь $\omega_k = |\omega_k|$ ($k=1, 2$), $\omega_{kY,3}$ – проекция вектора ω_k на ось OY_3 рассматриваемого звена, $I = ml^2/12$, $a = I_3/I$, $I_1 = I_2 = I$, I_3 – главные моменты инерции звеньев, \mathbf{u}_k – скорость конца единичного вектора \mathbf{e}_k , направленного по оси звена, относительно начала вектора.

Кинетическая энергия (1.3) есть квадратичная форма обобщенных скоростей: $2T = I(\mathbf{A}\mathbf{q}', \mathbf{q}')$, где $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \psi_1 \ \psi_2]^T$, \mathbf{A} – инерционная матрица с компонентами

$$a_{11} = \cos^2 q_2 [12 \cos^2 q_3 - 6 \sin 2q_3 \sin q_4 + \sin^2 q_3 (1 - 2 \cos 2q_4)] +$$

$$+ \sin^2 q_2 (9 \cos^2 q_3 - 6 \sin 2q_3 \sin q_4 + 3) + \cos^2 q_3 (4 \cos^2 q_4 + 3) +$$

$$+ 1 + \cos q_2 (12 \cos^2 q_3 \cos q_4 - 2 \sin 2q_3 \sin 2q_4) + a[\mu^2(\mathbf{q}) + \sin^2 q_3]$$

$$a_{12} = \cos q_2 (6 \cos q_3 \cos q_4 - 2 \sin q_3 \sin 2q_4) + 4 \cos q_3 \cos^2 q_4 + a\mu(\mathbf{q}) \sin q_4$$

$$a_{13} = 2 \sin 2q_2 \sin q_3 \cos^2 q_4 + \sin q_2 (2 \cos q_3 \sin 2q_4 + 6 \sin q_3 \cos q_4) - a\mu(\mathbf{q}) \sin q_2 \cos q_4 \quad (1.4)$$

$$a_{14} = \sin q_2 (4 \sin q_3 - 6 \cos q_3 \sin q_4), \quad a_{22} = 4 \cos^2 q_4 + a \sin^2 q_4$$

$$a_{23} = (2 - a/2) \sin q_2 \sin 2q_4, \quad a_{24} = 0$$

Движение описывается уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (1.5)$$

Обобщенные силы Q_j представляют собой суммы сил: $Q_j = Q_{jc} + Q_{jd}Q_{jg} + Q_{jP} + Q_{jQ}$, $Q_{jc} = -c_j q_j$, $Q_{jd} = -b_j q'_j$, где Q_{jc} , Q_{jd} — упругие и диссипативные силы, c_j , b_j — параметры жесткости и демпфирования кардановых соединений; обобщенные силы Q_{jg} , Q_{jP} , Q_{jQ} определяются через виртуальные работы сил тяжести звеньев mg , мертвой силы P и следящей силы Q . Виртуальные перемещения точек приложения сил легко выразить через вариации единичных векторов \mathbf{e}_k . Последние вычисляются по формулам (1.2) и (1.3), в которых производные по времени заменяются вариациями обобщенных координат. В результате получим

$$Q_{jg} = (mgl/2)[f_j(\mathbf{q}) + g_j(\mathbf{q})], \quad Q_{jP} = Plf_j(\mathbf{q}), \quad Q_{jQ} = -Qlh_j(\mathbf{q})$$

$$f_1(\mathbf{q}) = \cos q_1 \sin q_2 \cos q_4 + \sin q_1 (\cos q_2 \cos q_3 \cos q_4 + \cos q_3 - \sin q_3 \sin q_4)$$

$$f_2(\mathbf{q}) = \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 \cos q_4 + \sin q_1 \cos q_2 \cos q_4 \quad (1.6)$$

$$f_3(\mathbf{q}) = \cos q_1 (\cos q_2 \sin q_3 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_4 + \sin q_3)$$

$$f_4(\mathbf{q}) = \cos q_1 (\cos q_2 \cos q_3 \sin q_4 + \sin q_3 \cos q_4) - \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4$$

$$g_1(\mathbf{q}) = 2 \sin q_1 \cos q_3, \quad g_3(\mathbf{q}) = 2 \cos q_1 \sin q_3, \quad g_2(\mathbf{q}) = g_4(\mathbf{q}) = 0$$

$$h_1(\mathbf{q}) = \sin q_2 \cos q_3 \cos q_4, \quad h_3(\mathbf{q}) = \sin q_4, \quad h_2(\mathbf{q}) = h_4(\mathbf{q}) = 0$$

Подставим (1.2) — (1.4) и (1.6) в уравнения (1.5) и введем безразмерные параметры

$$c_j = \sigma_j c, \quad \omega_0^2 = \frac{12c}{ml^2}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \varepsilon_j = \frac{12b_j}{ml^2 \omega_0}$$

$$\alpha = \frac{Pl}{c}, \quad \beta = \frac{Ql}{c}, \quad \gamma = \frac{mgl}{2c}$$

где c — характерная жесткость (например, минимальная из c_j). В результате получим следующие уравнения движения:

$$a_{jk}(\mathbf{q})q''_k + \varepsilon_j q'_j + \sigma_j q_j + \left[\frac{\partial a_{jl}(\mathbf{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right] q'_k q'_l -$$

$$-(\alpha + \gamma)f_j(\mathbf{q}) - \beta h_j(\mathbf{q}) = 0 \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (1.7)$$

Здесь по дважды повторяющимся индексам k и l подразумевается суммирование от 1 до 4, по индексу j нет суммирования. Штрихи обозначают производные по безразмерному времени τ .

2. Дивергенция и флаттер. Исследуем устойчивость тривиального решения уравнений (1.7) $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$. Линеаризованные уравнения распадаются на две независимые однотипные подсистемы, описывающие плоские возмущения

$$\mathbf{A}\xi + \mathbf{B}\xi' + [\mathbf{C} - (\alpha + \gamma)\mathbf{F} - \gamma\mathbf{G} + \beta\mathbf{H}]\xi = 0 \quad (2.1)$$

где ξ – вектор с компонентами q_1, q_2 или q_3, q_4 , матрицы определяются выражениями

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 32 & 10 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2), \quad (b_1, b_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{или} \quad (\varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

$$\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2), \quad (c_1, c_2) = (\sigma_1, \sigma_2) \quad \text{или} \quad (\sigma_3, \sigma_4)$$

Таким образом, потеря устойчивости происходит в одной из главных плоскостей (X_1X_3 или X_2X_3). Она может быть либо квазистатической (дивергенция), либо динамической (флаттер). Характеристическое уравнение для подсистемы (2.1):

$$\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0 \quad (2.2)$$

с коэффициентами

$$p_1 = (1/7)(b_1 + 8b_2)$$

$$p_2 = (1/28)(4c_1 + 32c_2 - 28\gamma + b_1b_2 - 20\alpha - 10\beta)$$

$$p_3 = (1/28)[c_1b_2 + c_2b_1 - \gamma(b_1 + 4b_2) - \alpha(b_1 + 2b_2)] \quad (2.3)$$

$$p_4 = (1/28)[\alpha^2 + \alpha(\beta - c_1 - 2c_2 + 4\gamma) + \beta\gamma + c_1(c_2 - \gamma) - \gamma(4c_2 - 3\gamma)]$$

имеет в области устойчивости только корни с отрицательными действительными частями. По критерию Рауса – Гурвица для этого необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$p_1 > 0, \quad p_3 > 0, \quad p_4 > 0, \quad H > p_3(p_1p_2 - p_3) - p_1^2p_4 > 0 \quad (2.4)$$

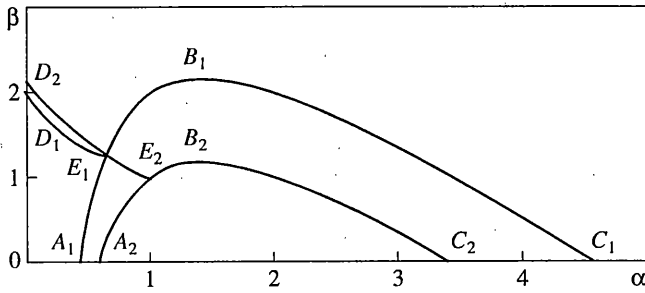
Первое из неравенств (2.4) выполняется всегда, остальные определяют область устойчивости тривиального равновесия. Нарушение неравенства $p_4 > 0$ приводит к потере устойчивости по типу дивергенции. Неравенство $p_3 > 0$ выполняется при $\alpha < \alpha_* = [c_1b_2 + c_2b_1 - \gamma(b_1 + 4b_2)] / (b_1 + 2b_2)$. Кривые $H = 0$ и $p_4 = 0$ ограничивают снизу соответственно область первичного флаттера и область дивергенции на плоскости (α, β) . Границы областей дивергенции и флаттера пересекаются при значениях параметра нагрузки

$$\alpha = \alpha_*$$

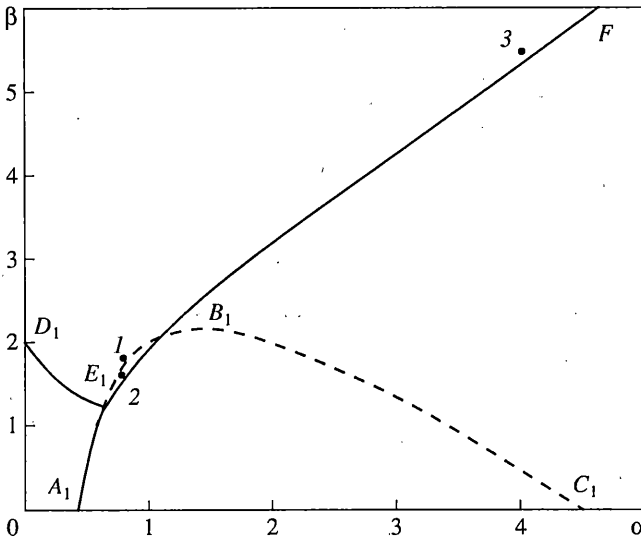
$$\beta = \beta_* = [\gamma(4c_2 - 3\gamma) - c_1(c_2 - \gamma) + a_*(c_1 + 2c_2 - 4\gamma) - a_*^2] / (\alpha_* + \gamma)$$

В этой точке характеристическое уравнение (2.2) имеет два нулевых корня.

На фиг. 1 представлены границы областей устойчивости тривиальных решений уравнений (2.1) для двух главных плоскостей маятника с параметрами: $(\sigma_1, \dots, \sigma_4) = (1, 2, 2, 1)$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4) = (0.05, 0.25, 0.25, 0.05)$, $\gamma = 0$, $a = 0.05$. Параболы $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ ограничивают области дивергенции, кривые D_1E_1 и D_2E_2 – области флаттера подсистем (2.1). В точках E_1 и E_2 характеристическое уравнение (2.2) имеет нулевой корень кратности два. Тривиальное равновесие пространственного маятника устойчиво в области $A_1E_1D_1$. При пересечении границы A_1E_1 происходит статическая потеря устойчивости, при пересечении границы D_1E_1 – динамическая. Первичная потеря



Фиг. 1



Фиг. 2

устойчивости происходит в плоскости обобщенных координат q_1, q_2 . Справа от точки E_1 , в зависимости от величины следящей силы β , маятник может находиться в состоянии либо нетривиального плоского равновесия (дивергенция), либо движения (флаттер). Формы флаттера могут быть как плоскими, так и пространственными. Анализ послекритических состояний возможен только на основе нелинейных уравнений (1.7).

Нетривиальные состояния равновесия в области дивергенции описываются статистическими решениями системы (1.7). Они удовлетворяют уравнениям

$$-c_1 x_1 + c_2 x_2 + (\alpha + 3\gamma) \sin x_1 - \beta \sin x_2 = 0 \quad (2.5)$$

$$c_2 x_2 - (\alpha + \gamma) \sin(x_1 + x_2) = 0$$

где $(x_1, x_2) = (q_1, q_2)$ или (q_3, q_4) , $(c_1, c_2) = (\sigma_1, \sigma_2)$ или (σ_3, σ_4) . Состояния равновесия развиваются в плоскости минимальной жесткости.

Состояния равновесия отыскивались численно. Из уравнений (2.5) определялись параметры β и x_1 при заданных $0 \leq \alpha \leq 5$ и $0 < x_1 + x_2 < \pi$. В вычислительной системе MATLAB формировалась сетка (матрица) значений параметров α и $x_1 + x_2$, покры-

вающая заданную область. Затем вычислялась соответствующая матрица значений x_2 (а, следовательно, и x_1), определенная вторым уравнением (2.5), после чего из первого уравнения определялась матрица значений β . При каждом значении α множество состояний равновесия определяется неравенством $0 \leq \beta \leq \beta_{\max}$, где β_{\max} – максимальное из всех найденных значений β при заданном α . Все множество значений β_{\max} , соответствующих различным α , образует верхнюю границу области существования состояний равновесия.

Для исследования устойчивости плоских форм равновесия рассмотрим состояния $\tilde{q}_j(t) = q_j + \xi_j(t)$ ($j = 1, 2, 3, 4$), где два из четырех значений q_j (q_3, q_4 или q_1, q_2) равны нулю, остальные два удовлетворяют уравнениями (2.5). Относительно вариаций ξ_j из уравнений (1.7) получим в первом приближении две независимые подсистемы уравнений, отвечающие потере устойчивости без выхода и с выходом из плоскости первоначальной равновесной формы:

$$A_j(x)\xi_j'' + B_j(x)\xi_j' + C_j(x)\xi_j = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (2.6)$$

$$A_1(x) = \begin{vmatrix} 12 \cos x_2 + 20 & 6 \cos x_2 + 4 \\ 6 \cos x_2 + 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_2(x) = \begin{vmatrix} 4 \cos^2 x_2 + 12 \cos x_2 + a \sin^2 x_2 + 16 & 4 \cos x_2 + 6 \\ 4 \cos x_2 + 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$C_{1,2}(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2) \\ \text{diag}(\sigma_3, \sigma_4) \end{array} \right\} - (\alpha + \gamma)F_{1,2}(x) - \gamma G_{1,2}(x) + \beta H_{1,2}(x)$$

$$F_1(x) = \begin{vmatrix} \cos x_1 + \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \\ \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \end{vmatrix}$$

$$F_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x_1(1 + \cos x_2) & \cos x_1 \\ \cos x_1 & \cos(x_1 + x_2) \end{vmatrix}$$

$$G_1(x) = G_2(x) = \begin{vmatrix} 2 \cos x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$H_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad H_2(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Здесь $\xi_1 = [\xi_1 \xi_2]^T$, $\xi_2 = [\xi_3 \xi_4]^T$, $B_1(x) = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $B_2(x) = \text{diag}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $x = [x_1 x_2]^T = [q_1 q_2]^T$ или $[q_3 q_4]^T$, матрицы A_j , F_j , G_j , H_j записаны для случая $x = [q_1 q_2]^T$. В случае $x = [q_3 q_4]^T$ эти матрицы более громоздки и здесь не приводятся.

Каждой из двух подсистем (2.6) отвечает характеристическое уравнение вида (2.2). Коэффициенты характеристических уравнений были получены средствами компьютерной алгебры. Проверка выполнения критерия Рауса–Гурвица для всех состояний равновесия, описываемых уравнениями (2.5), проводилась численно в системе MATLAB. Результаты анализа маятника с параметрами, соответствующими фиг. 1, представлены на фиг. 2. Линия $A_1 E_1 F$ является верхней границей области дивергенции по параметру β . В области G наблюдается вторичный флаттер. Это явление впервые было обнаружено в задаче о панельном флаттере [7].

3. Динамическое послекритическое поведение. Послекритическое поведение маятника исследовалось численным интегрированием уравнений (1.7). Исследовалась

область параметров нагружения до значений $\alpha = 5$, $\beta = 7$. Весьма существенным вопросом является задание начальных условий. Если в начальный момент времени задать нулевые значения координат и скоростей в одной из главных плоскостей маятника, система вырождается в систему с двумя степенями свободы. Плоская форма движения в дальнейшем сохраняется, так как при численном интегрировании два уравнения из четырех на каждом шаге дают тривиальный результат. Исследование движений в плоскости первичной потери устойчивости ($q_3 = q_4 \equiv 0$) обнаружало, что они всегда выходят на периодические режимы (предельные циклы). При некоторых значениях α и β плоские движения оказываются неустойчивыми.

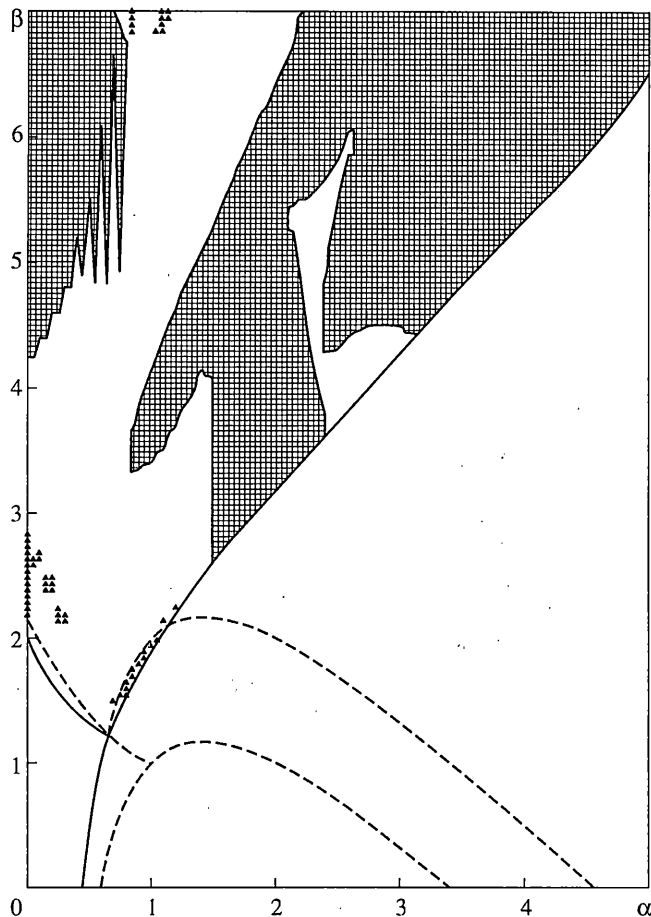
Плоские периодические движения описываются уравнениями, вытекающими из (1.7) при $q_3 = q_4 \equiv 0$:

$$\begin{aligned}
 & a_{jk}(\mathbf{q})q_k'' + \varepsilon_j q_j' + \sigma_j q_j + d_{jkl} q_l' q_k' - \\
 & -(\alpha + \gamma) f_j(\mathbf{q}) - \gamma g_j(\mathbf{q}) + \beta h_j(\mathbf{q}) = 0 \quad (j, k, l = 1, 2) \\
 & a_{11} = 12 \cos q_2 + 20, \quad a_{12} = a_{21} = 6 \cos q_2 + 4, \quad a_{22} = 4 \\
 & d_{111} = d_{112} = d_{222} = 0, \quad d_{211} = -d_{122} = 6 \sin q_2 \\
 & d_{212} = -d_{221} = 3 \sin q_2, \quad d_{121} = -12 \sin q_2 \\
 & f_1 = \sin(q_1 + q_2) + \sin q_1, \quad f_2 = \sin(q_1 + q_2) \\
 & g_1 = 2 \sin q_1, \quad g_2 = 0, \quad h_1 = \sin q_2, \quad h_2 = 0, \quad \mathbf{q} = [q_1 q_2]^T
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для исследования устойчивости этих движений составим уравнения относительно возмущений $\xi_j(t)$ ($j = 1, 2, 3, 4$). В первом порядке по ξ_j они имеют вид (2.6), но элементы матриц \mathbf{B}_j и \mathbf{C}_j нужно дополнить слагаемыми, содержащими скорости и ускорения невозмущенного движения. Система (2.6) имеет блочно-диагональную структуру, вследствие чего возмущения в плоскости и из плоскости первоначального движения не влияют друг на друга. Устойчивость по отношению к возмущениям в плоскости очевидна: в противном случае было бы невозможно численно получить установившиеся периодические движения. Поэтому нужно исследовать лишь поведение возмущений из плоскости первоначального движения, удовлетворяющих второй паре уравнений (2.6) (при $j = 2$):

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\xi'' + \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\xi' + \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'')\xi = 0$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= - \begin{vmatrix} \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & \varepsilon_4 \end{vmatrix} + \sin x_2 \begin{vmatrix} x_2'(12 + 8 \cos q_2 - 2a \cos q_1) & a(x_1' + x_2') \\ [8x_2' - a(x_1' + x_2')] & 0 \end{vmatrix} \\
 \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') &= \mathbf{C}_2(\mathbf{x}) + \sin x_2 \begin{vmatrix} -x_1''[(4-a)\cos x_2 + 6] & (4-a)(x_1'' + x_2'') \\ -4x_1'' & 6x_1'' \end{vmatrix} - \\
 & - x_1'^2 \begin{vmatrix} (4-a)\cos^2 x_2 + 12 \cos x_2 + 16 - a & (4-a)\cos x_2 + 6 \\ (4-a)\cos x_2 + 6 & 6 \cos x_2 + 4 - a \end{vmatrix} - \\
 & - x_1' x_2' \begin{vmatrix} 8 \cos^2 x_2 + 12 \cos x_2 - a \cos 2x_2 & (8-2a)\cos x_2 \\ (8-a)\cos x_2 & 8-2a \end{vmatrix} - \\
 & - x_2'^2 \begin{vmatrix} 0 & (4-a)\cos x_2 \\ 0 & (4-a) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{x} = [x_1 x_2]^T = [q_1 q_2]^T
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

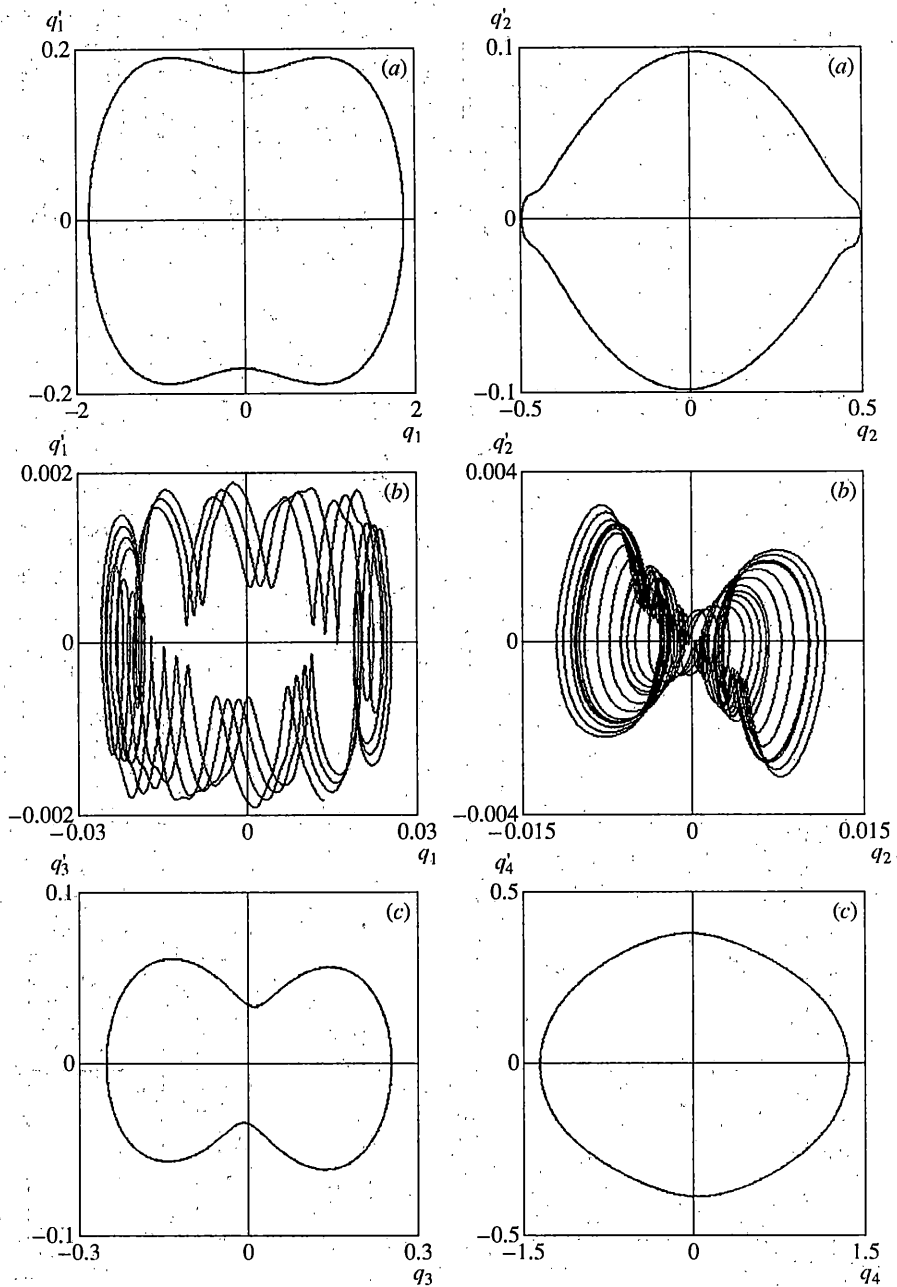


Фиг. 3

В данном случае $\xi = [\xi_3 \xi_4]^T$ – вектор возмущений из плоскости первоначального движения, матрицы A_2 и C_2 определены в (2.7).

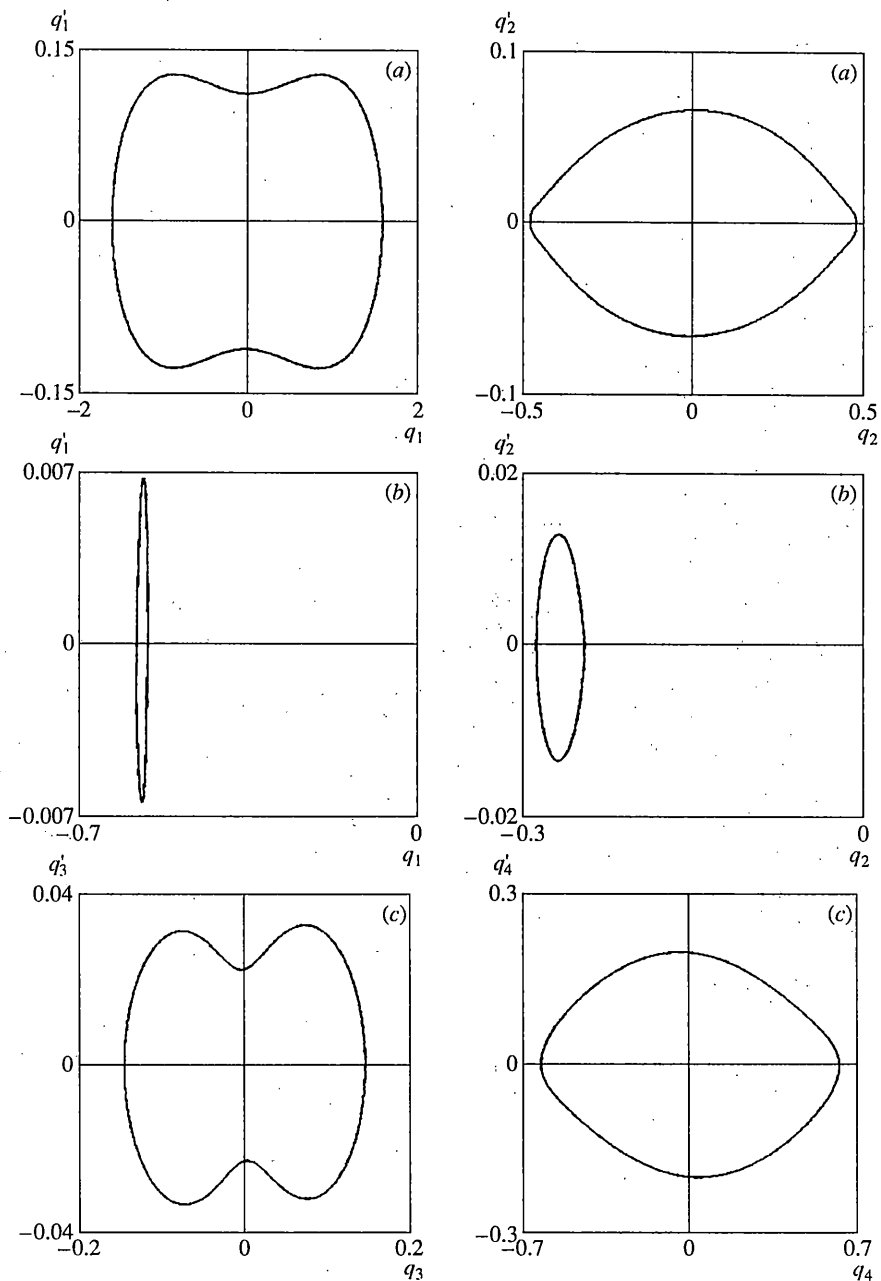
Таким образом, задача сводится к исследованию устойчивости тривиального решения уравнения с периодическими коэффициентами (3.2). Применим теорию Флоке–Ляпунова [11]. Будем вычислять матрицу монодромии и определять ее собственные значения (мультипликаторы). Плоская форма движения будет устойчивой, если все мультипликаторы по модулю меньше единицы, и неустойчивой, если модуль хотя бы одного мультипликатора превысит единицу. Заметим, что вариации движения являются дополнительными степенями свободы. При этом среди мультипликаторов нет таких, которые вдали от точек первичной бифуркации системы располагались бы строго на единичной окружности [12].

Численная реализация состояла в следующем. При заданных значениях параметров α и β проводилось численное интегрирование системы уравнений (3.1) до установления периодического режима. Затем вычислялся период колебаний, после чего матрица монодромии вычислялась путем интегрирования системы уравнений (3.2) в течение первого периода. Система приводилась к нормальной форме Коши. Искомым объектом в этой системе является матрицант, который в начале периода равен единичной матрице. Матрица монодромии есть значение матрицанта в конце периода. Далее вычислялись собственные значения матрицы монодромии (мультипликаторы).



Фиг. 4

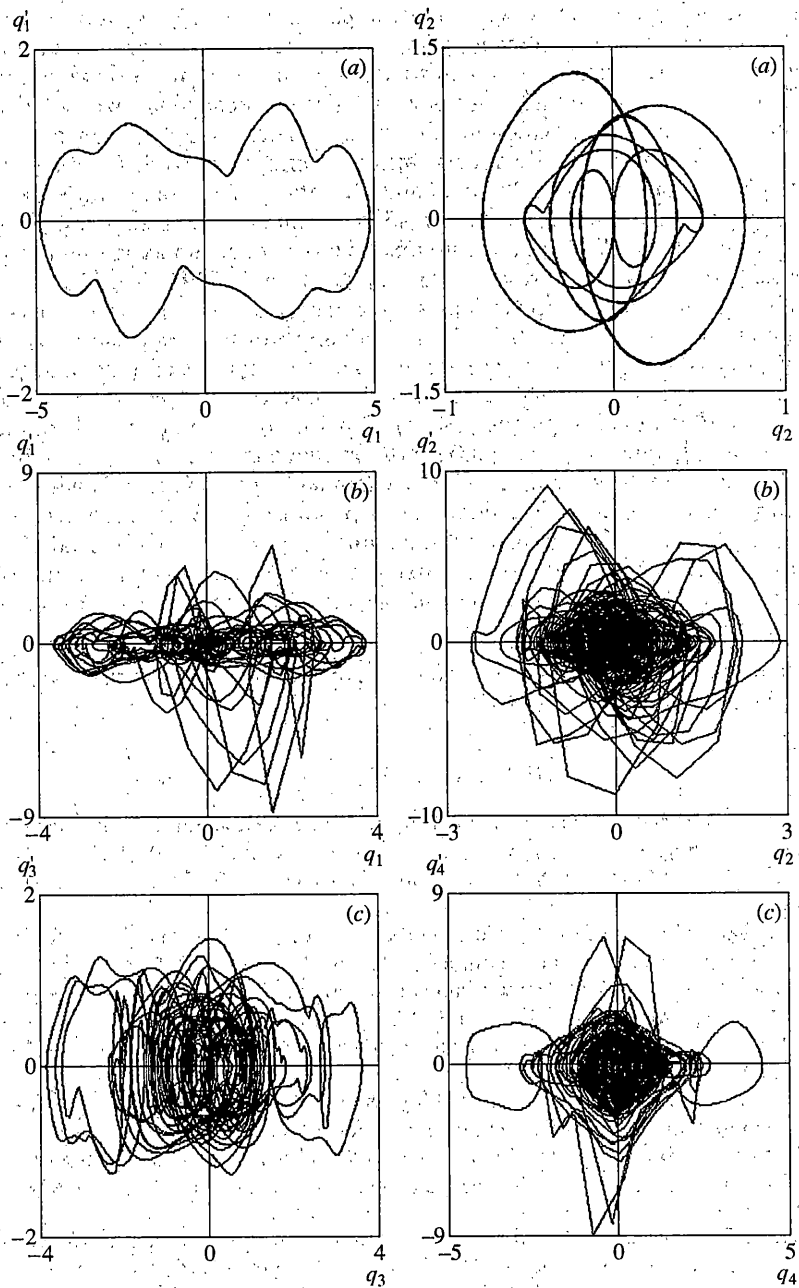
На фиг. 3 области неустойчивости периодических движений маятника в плоскости первичной потери устойчивости покрыты сеткой, отдельные маленькие островки неустойчивости отмечены точками. Характерны существование островков устойчивости и неустойчивости в окружении альтернативной области и полосовое чередование областей в левом верхнем углу графика. Для полной уверенности в достоверности результатов, представленных на фиг. 3, был проведен дополнительный вычисли-



Фиг. 5

тельный эксперимент. В нем при выборочных значениях α и β интегрировались уравнения (1.8) при $q_3 = q_4 \equiv 0$ до установления периодического режима, после чего задавались малые возмущения из плоскости первоначального движения, и интегрирование продолжалось. Результаты эксперимента контролировались по реализациям и фазовым портретам решений.

Иллюстрация типов послекритического поведения маятника дана на фиг. 4–6, где представлены фазовые портреты для трех точек (1, 2 и 3, фиг. 2), взятых соответ-



Фиг. 6

ственно вблизи границы неустойчивости в областях первичного и вторичного флаттера и в дальней закритической области.

Фазовые портреты на фиг. 4–6, а получены при задании плоского начального отклонения ($q_1 = 0.1, q_2 = 0.2$ при нулевых начальных скоростях) в плоскости первичной потери устойчивости. По мере удаления от границы области флаттера D_1E_1 (фиг. 1, 2) предельные циклы становятся более сложными. Остальные фазовые портреты на

фиг. 4–6 получены при тех же самых начальных значениях q_1 и q_2 и при $q_3 = 0.01$, $q_4 = 0.02$. В ближних к границе области первичной неустойчивости точках 1 и 2 движение остается периодическим, но происходит перекачка энергии от координат q_1 , q_2 к координатам q_3 , q_4 . Предельные циклы по q_3 и q_4 весьма похожи на предельные циклы плоского движения. Колебания по координатам q_1 и q_2 происходят с существенно меньшей амплитудой и существенно большей частотой. В области вторичного флаттера (точка 2 на фиг. 2) колебания в плоскости первичной потери устойчивости (координаты q_1 , q_2) происходят вблизи динамически неустойчивого положения равновесия. Два симметричных положения равновесия находятся из уравнений (2.5). В точке 2 (фиг. 2) им соответствуют $(q_1; q_2) = \pm (0.5295; 0.2932)$. На фиг. 5, *b* хорошо видно, что предельные циклы по координатам q_1 и q_2 охватывают положение равновесия с $(q_1; q_2) = -(0.5295; 0.2932)$. Колебания могли бы происходить и вблизи другого (симметричного) положения равновесия. Это зависит от начальных условий. Совсем иной характер имеет движение в близкой к точке 2 точке 1, находящейся в области первичного флаттера (фиг. 4, *b*). В этой точке существует единственное динамически неустойчивое (тривиальное) положение равновесия. Колебания по q_1 , q_2 в точке 1, в отличие от точки 2, имеют нерегулярный характер. Предельные циклы на фиг. 4, *b* охватывают тривиальное положение равновесия. В дальней закритической области (точка 3 на фиг. 2) характер колебаний – хаотический. Аттракторы, представленные на фиг. 6, *b* и *c* – типично хаотические с редкими выбросами по координатам и скоростям. Распределение энергии между степенями свободы приближается к равномерному.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00–01–00102).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. О колебаниях и устойчивости стержней, находящихся под действием неконсервативных сил // Колебания в турбомашинах. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 23–42.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to non-conservative forces // Intern. J. Solid and Structures. 1969. V. 5. № 9. P. 965–989.
4. Жинжер Н.И. Влияние диссипативных сил с неполной диссипацией на устойчивость упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 149–155.
5. Jin J.-D. Bifurcation analysis of double pendulum with a follower force // J. Sound and Vibrat. 1992. V. 154. № 2. P. 191–204.
6. Kounadis A.N. On the failure of static stability analyses of nonconservative systems in regions of divergence instability // Intern. J. Solids and Structures. 1994. V. 31. № 15. P. 2099–2120.
7. Bolotin V.V., Petrovsky A.V., Grishko A.A. Secondary bifurcations and global instability of an aeroelastic nonlinear system in the divergence domain // J. Sound and Vibrat. 1996. V. 191. № 3. P. 431–451.
8. Гришко А.А., Петровский А.В., Радин В.П. О влиянии внутреннего трения на устойчивость панели в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 173–181.
9. Bolotin V.V., Grishko A.A., Kounadis A.N., Gantes Ch. Nonlinear panel flutter in remote post-critical domain // Intern. J. Non-Linear Mechanics. 1998. V. 33. № 5. P. 753–764.
10. Bolotin V.V., Grishko A.A., Kounadis A.N., Gantes Ch., Roberts J.B. Influence of initial conditions on the postcritical behavior of nonlinear aeroelastic system // J. Nonlinear Dynamics. 1998. V. 15. № 1. P. 63–81.
11. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
12. Гришко А.А., Дубовских Ю.А., Петровский А.В. О послекритическом поведении диссипативных нелинейных систем // Прикл. механика. 1998. Т. 34. № 6. С. 92–98.