МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2002

УДК 539.3

© 2002 г. **И.Г. ТЕРЕГУЛОВ, С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ**

МЕТОД РИТЦА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Обосновывается применимость метода Ритца к исследованию краевых задач геометрически и физически нелинейной теории упругих непологих тонких оболочек. Особенностью работы является то, что в ней исследования ведутся в некотором функциональном пространстве, отличном от пространств перемещений и усилий, в основе которых лежит идея выражения компонент перемещения и деформаций через вспомогательные функции.

Краевые задачи для непологих оболочек, срединной поверхностью которых являются поверхность вращения, выпуклая развертывающаяся поверхность, изучались в [1–4]. В данной работе предлагается метод исследования задач для произвольных незамкнутых непологих оболочек ненулевой гауссовой кривизны, жестко защемленных по всему краю. Выводятся условия, при которых: существует хотя бы одна точка абсолютного минимума функционала полной энергии системы "оболочка – внешние силы", приближенные решения сходятся к одной из них, точка минимума является обобщенным решением задачи, введенным при помощи вариационного принципа Лагранжа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую модель нелинейной теории тонких оболочек.

Соотношения деформации – перемещения, отнесенные к линиям кривизны

$$\begin{gathered}
\varepsilon^{\circ}_{jj} \equiv \gamma^{\circ}_{jj} = w_{j\alpha^j} - G^k_{jj} w_k - B_{jj} w_3 + \omega_j^2/2 \quad (j = 1,2) \\
2\varepsilon^{\circ}_{12} \equiv \gamma^{\circ}_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G^k_{12} w_k + \omega_1\omega_2 \qquad (1.1) \\
\varepsilon^{1}_{jj} \equiv \gamma^{1}_{jj} = -\omega_{j\alpha^j} + G^k_{jj}\omega_k \quad (j = 1,2) \\
2\varepsilon^{1}_{12} \equiv \gamma^{1}_{12} = -\omega_{1\alpha^2} - \omega_{2\alpha^1} + 2G^k_{12}\omega_k \\
\omega_j = w_{3\alpha^j} + B^j_j w_j
\end{gathered}$$

где B_{ij}, B^j_j – составляющие тензора кривизны; ε°_{ij} и ε^{1}_{ij} – компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности S_0 оболочки; w_k и w_3 – тангенциальное и нормальное перемещения точек S_0; G^k_{ij} – символы Кристоффеля; α^1, α^2 – декартовы координаты точек плоской ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей $\Gamma \in C^1_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, гомеоморфной S_0.

Соотношения напряжения – деформации даются формулами Грина $\sigma^{ij} = \partial F / \partial \varepsilon_{ij}$, которые в рамках гипотез Кирхгофа–Лява при помощи формулы Тейлора первого порядка запишем в виде

$$\sigma^{\lambda\mu} = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{qs} - \sigma_*^{\lambda\mu} \equiv \sigma_\tau^{\lambda\mu} - \sigma_*^{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2) \tag{1.2}$$

$$B^{\lambda\mu qs} = \partial^2 F / \partial\gamma_{\lambda\mu}\partial\gamma_{qs} \,|_{\gamma_{ij}=0}, \qquad \gamma_{\lambda\mu} = \overset{\circ}{\gamma}_{\lambda\mu} + \lambda^3 \overset{1}{\gamma}_{\lambda\mu}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование, F – упругий потенциал, $\sigma_*^{\lambda\mu}$ – нелинейная часть $\sigma^{\lambda\mu}$.

Край оболочки жестко заделан

$$w_1 = w_2 = w_3 = \partial w_3 / \partial \mathbf{m} = 0 \text{ на } \Gamma \tag{1.3}$$

где $\mathbf{m}$ – нормаль к Γ.

На оболочку действуют массовые $\mathbf{F}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ и поверхностные $\mathbf{F}^{\pm}(\alpha^1, \alpha^2)$ силы, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{F}^{\pm} \in L_2(\overline{\Omega}), \qquad \mathbf{F} \in L_2(\overline{\Omega}) \times L_1[-h, h] \tag{1.4}$$

где $2h = \text{const}$ – толщина оболочки.

При исследовании задачи в рамках модели (1.1) – (1.4) существенную роль будет играть функционал $\phi = U - A$ полной энергии системы "оболочка – внешние силы", где U – потенциальная энергия, накопленная во всем объеме V оболочки, A – работа внешних сил, которые даются формулами

$$U = \iiint\limits_V \Pi D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \tag{1.5}$$

$$A = \iint\limits_\Omega [\mathcal{R}^i w_i \,|_{i=1,3} = \mathcal{L}^i w_{3\alpha^i} \,|_{i=1,2}] D d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{1.6}$$

Здесь Π – плотность потенциальной энергии деформации, определенная формулой [5, с. 469]:

$$\Pi = \int\limits_{(0,0,0)}^{(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22})} \sigma^{11} d\gamma_{11} + \sigma^{12} d\gamma_{12} + \sigma^{22} d\gamma_{22} \tag{1.7}$$

где интеграл не зависит от пути интегрирования [5, с. 470]. Отметим, что

$$\partial\Pi / \partial\gamma_{\lambda\mu} = \sigma^{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2) \tag{1.8}$$

где $\mathcal{R}$, $\mathcal{L} \in L_2(\overline{\Omega})$ – известные вектор-функции, зависящие от внешних сил (1.4).

В соответствии с (1.2) плотность Π потенциальной энергии можно записать в виде $\Pi = \Pi_\tau - \Pi_*$, где Π_τ, Π_* даются формулой (1.7) с $\sigma_\tau^{\lambda\mu}, \sigma_*^{\lambda\mu}$ соответственно. Непосредственным вычислением находим $\Pi_\tau = \frac{1}{2} B^{\lambda\mu qs}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{qs}$. Подставляя все это в (1.5), с учетом тонкостенности оболочки для потенциальной энергии U получим представление

$$U \equiv U(\gamma) = \tfrac{1}{2} \iint\limits_\Omega Q\{\gamma; \gamma\} D d\alpha^1 d\alpha^2 - U_*(\gamma) \equiv U_\tau(\gamma) - U_*(\gamma) \tag{1.9}$$

$$Q\{\gamma; \gamma\} \equiv Q\{\gamma\} = 2\int\limits_{-h}^{h} \Pi_\tau d\alpha^3, \qquad \gamma = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22})$$

где $U_*(\gamma)$ имеет вид (1.5) с плотностью Π_*, Q – квадратичная форма, порожденная билинейной формой вида

$$Q\{\gamma_1;\gamma_2\}=\int_{-h}^{h}B^{\lambda\mu qs}\gamma_{1,\lambda\mu}\gamma_{2,qs}d\alpha^3=D_p^{\lambda\mu qs}\overset{\circ}{\gamma}_{1,\lambda\mu}\overset{\circ}{\gamma}_{2,qs}+D_*^{\lambda\mu qs}(\overset{\circ}{\gamma}_{1,\lambda\mu}\gamma^1_{2,qs}+\gamma^1_{1,\lambda\mu}\overset{\circ}{\gamma}_{2,qs})+$$

$$+D_u^{\lambda\mu qs}\gamma^1_{1,\lambda\mu}\gamma^1_{2,qs}\equiv Q_p\{\overset{\circ}{\gamma}_1;\overset{\circ}{\gamma}_2\}+Q_*(\gamma_1;\gamma_2)+Q_u\{\gamma^1_1;\gamma^1_2\} \tag{1.10}$$

где γ_k – векторы с компонентами $\gamma_{k,\lambda\mu}=\overset{\circ}{\gamma}_{k,\lambda\mu}+\alpha^3\gamma^1_{k,\lambda\mu}$.

Пусть выполнены следующие условия:

$$|\sigma^{\lambda\mu}|\leqslant c(|\gamma_{11}|+|\gamma_{12}|+|\gamma_{22}|) \qquad (\lambda,\mu=1,2) \tag{1.11}$$

$$\Pi\geqslant c_1(\gamma_{11}^2+\gamma_{12}^2+\gamma_{22}^2)\equiv c_1\gamma^2 \tag{1.12}$$

$$c_2\gamma^2\leqslant\Pi_\tau\leqslant c_3\gamma^2 \tag{1.13}$$

где c, c_j – положительные постоянные, не зависящие от γ. Заметим, что из (1.13) следует положительная определенность квадратичных форм $Q\{\gamma\}$, $Q_p\{\gamma^\circ\}$, $Q_u\{\gamma^1\}$ в $\overline{\Omega}$.

2. Вывод основных соотношений. Предположим, что гауссова кривизна $K=B_1^1B_2^2$ срединной поверхности S_0 отлична от нуля. Как и в [1], при помощи соотношений

$$w_k=b_k(\omega_k-w_{3\alpha^k}), \qquad b_k=1/B_k^k \qquad (k=1,2) \tag{2.1}$$

в (1.1), (1.6) исключим тангенциальные перемещения w_1, w_2. Пусть $D_\omega(\overline{\Omega})$ есть пространство вектор-функций $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,w_3)$ класса ω_i, $w_{3\alpha^i}\in C(\overline{\Omega})$, $\omega_{i\alpha^j}$, $w_{3\alpha^i\alpha^j}\in L_p(\overline{\Omega})$, $p>2$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\omega_1=\omega_2=w_3=w_{s\alpha^1}=w_{3\alpha^2}=0 \ \text{ на } \Gamma \tag{2.2}$$

эквивалентным (1.3). Каждому вектору $\boldsymbol{\omega}$ из $D_\omega(\overline{\Omega})$ по формулам

$$\varepsilon_1=\omega_{1\alpha^1}-\omega_{2\alpha^2}, \qquad \varepsilon_2=\omega_{1\alpha^2}+\omega_{2\alpha^1}$$

$$\varepsilon_3=-w_{3\alpha^1\alpha^1}-w_{3\alpha^2\alpha^2} \tag{2.3}$$

поставим в соответствие вектор $\boldsymbol{\epsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$. Множество векторов $\boldsymbol{\epsilon}$ обозначим через $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$, которое, очевидно, является линейным пространством.

Введем в рассмотрение комплексные функции $W_1=-w_{3\alpha^1}+iw_{3\alpha^2}$, $W_2=\omega_1+i\omega_2$. Тогда соотношения (2.3) можно представить в комплексной форме

$$W_{j\bar z}=f_j/2 \qquad (j=1,2) \tag{2.4}$$

$$f_1=\varepsilon_3, \quad f_2\equiv\varepsilon_0=\varepsilon_1+i\varepsilon_2, \qquad W_{j\bar z}=(W_{j\alpha^1}+iW_{j\alpha^2})/2$$

Используя формулу (6.10) из [6, с. 42], для функций $W_j(\bar z)$ с учетом (2.4) и $W_j(z)=0$ на Γ ($j=1,2$), будем иметь следующее представление через $\varepsilon\in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$:

$$W_j(z)=(Tf_j)(z)/2 \qquad (j=1,2) \tag{2.5}$$

$$Tf=-\frac{1}{\pi}\iint_\Omega f(\zeta)/(\zeta-z)d\xi d\eta, \qquad z=\alpha^1+i\alpha^2, \qquad \zeta=\xi+i\eta$$

Известно [6, с. 39, 46], что Tf суть вполне непрерывный оператор из $L_p(\overline{\Omega})$ в $L_q(\overline{\Omega})$ ($1\leqslant q\leqslant 2p/(2-p)$), если $1\leqslant p\leqslant 2$ и из $L_p(\overline{\Omega})$ в $C_{(p-2)/p}(\overline{\Omega})$, если $p>2$. Кроме того, можно показать, что Tf – вполне непрерывный оператор из $L_p(\overline{\Omega})$ $(1 < p \leqslant 2)$ в $L_\gamma(\Gamma)$ $(1 < \gamma < p/(2-p))$. Известно также [6, с. 34, 36], что $(Tf)(z)$ имеет обобщенные производные по $\bar{z}, z$, которые определяются по формулам

$$\partial Tf / \partial \bar{z} = f, \qquad \partial Tf / \partial z \equiv Sf = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(\zeta)/(\zeta - z)^2\, d\xi d\eta \tag{2.6}$$

где интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. Отметим [6, с. 67], что Sf суть линейный ограниченный оператор в $L_p(\overline{\Omega})$, $p > 1$.

Через функции $W_j(z)$ компоненты вектора $\boldsymbol{\omega} \in D_\omega(\overline{\Omega})$ выражаются формулами

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re} T\varepsilon_0, \qquad \omega_2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{Jm} T\varepsilon_0, \qquad w_3 = -\tfrac{1}{4} T\overline{T}\varepsilon_3 \equiv \tfrac{1}{2}\tilde{T}\varepsilon_3 \tag{2.7}$$

Здесь учитывалось, что $\partial w_3 / \partial \bar{z} = -\tfrac{1}{4}\overline{T}\varepsilon_3$ и воспользовались формулой (6.10) из [6, с. 42].

Компоненты деформации также выразим через $\boldsymbol{\epsilon} \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$. С этой целью при помощи формул (2.6) найдем производные по z, $\bar{z}$ функций $W_j(z)$, представленных в виде (2.5), затем через них $\omega_{i\alpha^j}$, $w_{3\alpha^i\alpha^j}$ и подставим их вместе с (2.5), (2.7) в соотношения (1.1), в которых w_j $(j = 1, 2)$ заменены с помощью (2.1). Тогда для компонент деформации получим следующие представления через $\boldsymbol{\epsilon} \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$:

$$\gamma_{\lambda\mu}^k \equiv \gamma_{\lambda\mu}^k(\boldsymbol{\epsilon}) = t_{\lambda\mu}^k(\varepsilon) + \tau_{\lambda\mu}^k(\boldsymbol{\epsilon}) + \varkappa_{\lambda\mu}^k(\boldsymbol{\epsilon}) \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{t} + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\kappa} \quad (k = 0, 1;\ \ \lambda, \mu = 1, 2)$$

$$t_{jj}^{\circ} = \tfrac{1}{2} b_j(\varepsilon_3 - (-1)^j \operatorname{Re} S\varepsilon_3 + \operatorname{Re} S\varepsilon_0 - (-1)^j \varepsilon_1) \qquad (j = 1, 2)$$

$$t_{12}^{\circ} = \tfrac{1}{2}[b_1(\varepsilon_2 - \operatorname{Jm} S\varepsilon_0) + b_2(\varepsilon_2 + \operatorname{Jm} S\varepsilon_0) - (b_1 + b_2)\operatorname{Jm} S\varepsilon_2] \tag{2.9}$$

$$t_{jj}^1 = -\tfrac{1}{2}(\operatorname{Re} S\varepsilon_0 - (-1)^j \varepsilon_1) \quad (j = 1, 2), \qquad t_{12}^1 = -\varepsilon_2$$

$$\tau_{ij}^{\circ} = \operatorname{Re}(\beta_{ij}^{\circ} T\varepsilon_3 + \overline{\beta_{ij}^{\circ} T\varepsilon_0}) - \tfrac{1}{2} B_{ij}\tilde{T}\varepsilon_3 \qquad (B_{12} \equiv 0)$$

$$\tau_{ij}^1 = \operatorname{Re}(\beta_{ij}^1 T\varepsilon_0) \qquad (i, j = 1, 2) \tag{2.10}$$

$$\varkappa_{jj}^{\circ} = \tfrac{1}{2}\omega_j^2(\varepsilon_0) \qquad (j = 1, 2), \qquad \varkappa_{12}^{\circ} = \omega_1(\varepsilon_0)\omega_2(\varepsilon_0) \tag{2.11}$$

$$\varkappa_{ij}^1 \equiv 0 \qquad (i, j = 1, 2)$$

где β_{ij}^k – известные комплексные функции, зависящие от G_{ij}^k, $b_{i\alpha^j}$.

Соотношения (2.5), (2.8) составляют основу предложенного метода и играют ту же роль, что и формулы (1.1) при решении задачи в перемещениях. При их помощи соотношения (1.6), (1.9) представим в виде

$$U(\boldsymbol{\epsilon}) \equiv U(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\epsilon})) = \tfrac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}[Q\{\mathbf{t}(\boldsymbol{\epsilon})\} + Q\{\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\epsilon}) + \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\epsilon});$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{t}(\boldsymbol{\epsilon})\}]D d\alpha^1 d\alpha^2 - U_*(\boldsymbol{\epsilon}) \equiv U_\tau(\boldsymbol{\epsilon}) - U_*(\boldsymbol{\epsilon}) \tag{2.12}$$

$$A \equiv A(\boldsymbol{\epsilon}) = \operatorname{Re}\iint\limits_{\Omega} \mathcal{K}(\mathcal{R}, \mathcal{L}; \boldsymbol{\epsilon}) D d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{2.13}$$

$$\mathcal{K}(\mathcal{R}, \mathcal{L}; \boldsymbol{\epsilon}) = \tfrac{1}{2}[(b_1\mathcal{R}^1 - ib_2\mathcal{R}^2)T\varepsilon_0 + \mathcal{R}^3\tilde{T}\varepsilon_3 + (\mathcal{L}^1 + b_1\mathcal{R}^1 + i(\mathcal{L}^2 + b_2\mathcal{R}^2))T\varepsilon_3]$$

Используя соотношения (2.12), (2.13), с учетом (1.8) и линейности $\mathcal{K}(\mathcal{R}, \mathcal{L}; \boldsymbol{\epsilon})$ относительно $\boldsymbol{\epsilon}$ нетрудно получить представления для вариаций U, A:

$$\delta U = \iint_{\Omega} [Q\{\mathbf{t}(\boldsymbol{\epsilon}); t(\delta\varepsilon)\} + Q\{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\epsilon}); \boldsymbol{\tau}(\delta\boldsymbol{\epsilon}) + \boldsymbol{\kappa}_{\delta}(\boldsymbol{\epsilon}; \delta\boldsymbol{\epsilon})\} + Q\{\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\epsilon}) + \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\epsilon});\ \mathbf{t}(\delta\boldsymbol{\epsilon})\}] D d\alpha^1 d\alpha^2 -$$

$$-\iint_{\Omega} [\sigma_1^{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon})\gamma^{\circ}_{\delta,\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon}; \delta\boldsymbol{\epsilon}) + \sigma_2^{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon})\gamma^{1}_{\delta,\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon}; \delta\boldsymbol{\epsilon})] D d\alpha^1 d\alpha^2, \qquad \delta A = A(\delta\boldsymbol{\epsilon}) \tag{2.14}$$

$$\sigma_k^{\lambda\mu} = \int_{-h}^{h} (\alpha^3)^{k-1} \sigma_*^{\lambda\mu} d\alpha^3 (k = 1, 2), \qquad \delta\gamma^k_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon}) \equiv \gamma^k_{\delta,\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon}; \delta\boldsymbol{\epsilon})$$

3. Построение основного пространства. Каждой паре элементов $\boldsymbol{\epsilon}^j = (\varepsilon_1^j, \varepsilon_2^j, \varepsilon_3^j) \in \in D_\varepsilon(\overline{\Omega}) (j = 1, 2)$ поставим в соответствие число

$$(\boldsymbol{\epsilon}^1, \boldsymbol{\epsilon}^2)_H = \iint_{\Omega} Q\{\mathbf{t}(\boldsymbol{\epsilon}^1); \mathbf{t}(\boldsymbol{\epsilon}^2)\} D d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{3.1}$$

где билинейная форма Q дается формулой (1.10). Покажем, что (3.1) удовлетворяет всем условиям скалярного произведения. Пусть $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon})_H = 0$. В силу положительной определенности квадратичной формы $Q\{\mathbf{t}, (\boldsymbol{\epsilon})\}$ имеем $t^k_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$, $k = 0, 1, \lambda$, $\mu = 1, 2$. Тогда из соотношений (2.9) для $t^k_{\lambda\mu}$ легко получаем $\boldsymbol{\epsilon} \equiv \mathbf{0}$. Выполнение остальных условий скалярного произведения очевидно. Замыкание $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ в норме $\|\boldsymbol{\epsilon}\|_H = (\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon})_H^{1/2}$ обозначим через $H(\overline{\Omega})$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $D^{\lambda\mu qs}_{p,*,u}, B^j_j$ $(j = 1, 2)$ ограничены в $(\overline{\Omega})$. Тогда $m_1 \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2_{L_2} \leqslant \leqslant \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2_H \leqslant m_2 \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2_{L_2}$, где m_j – положительные постоянные, не зависящие от $\boldsymbol{\epsilon}$.

Доказательство. Заметим, что соотношения (2.9), выражающие $t^k_{\lambda\mu}$ через переменные ε_3, $\mathrm{Re} S\varepsilon_3$, t°_{12}, $\mathrm{Re}\ S\varepsilon_0$, ε_1, ε_2, представляют собой невырожденные преобразования переменных. В силу этого квадратичная форма $Q\{\mathbf{t}\}$ относительно этих новых переменных также является положительно определенной, откуда следует нижняя оценка леммы 1. Верхняя оценка очевидна.

Из леммы 1 вытекает, что $H(\overline{\Omega})$ – гильбертово пространство. Имеет место утверждение.

Лемма 2. Пусть $\boldsymbol{\epsilon} \in H(\overline{\Omega})$. Тогда правые части формул (2.5) определяют функции $W_j(z) \in L_q(\overline{\Omega})$, $q \geqslant 1$, почти всюду удовлетворяющие граничным условиям (2.2).

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\epsilon} \in H(\overline{\Omega})$. Тогда существует последовательность $\boldsymbol{\epsilon}^n \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ такая, что $\|\boldsymbol{\epsilon}^n - \boldsymbol{\epsilon}\|_H \to 0$, $n \to \infty$. Функции $W^n_j = Tf^n_j / 2$, $n = 1, 2, \ldots$ по формулам (2.7) определяют $\boldsymbol{\omega}^n \in D_\omega(\overline{\Omega})$. Используя свойства оператора Tf, будем иметь: $\|W_j - W^n_j\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$, $\|w_3 - w^n_3\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$, $n \to \infty$, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть $G^k_{ij}, B^j_{j\alpha^k}$ ограничены в $\overline{\Omega}$. Тогда $1 / t^k_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon})$суть линейные ограниченные операторы из $H(\overline{\Omega})$ в $L_2(\overline{\Omega})$ и $\|t^k_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon})\|_{L_2} \leqslant c \|\boldsymbol{\epsilon}\|_H$; $2 / \tau^k_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon})$ и $\varkappa^k_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon})$ суть вполне непрерывные соответственно линейные и нелинейные операторы из $H(\overline{\Omega})$ в $L_q(\overline{\Omega})$, $q \geqslant 1$ и $\|\tau^k_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon})\|_{L_q} \leqslant c \|\boldsymbol{\epsilon}\|_H$, $\|\varkappa^k_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon})\|_{L_q} \leqslant c \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2_H$ $(k = 0, 1, \lambda, \mu = 1, 2)$.

Справедливость леммы 3 легко следует из формул (2.9) – (2.11) с учетом вышеуказанных свойств операторов Tf, Sf и ограниченности функций β_{ij}^{k} в $\overline{\Omega}$.

4. Введение понятия обобщенного решения задачи и сведение его к нелинейному операторному уравнению.

Определение. Обобщенным решением задачи определения Н.Д.С. оболочек в рамках модели (1.1) – (1.4) назовем вектор-функцию $\boldsymbol{\epsilon} \in H(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$(\boldsymbol{\epsilon},\ \boldsymbol{\varphi})_H = A(\boldsymbol{\varphi}) - \iint_{\Omega} [Q\{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\epsilon}); \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\kappa}_\delta(\boldsymbol{\epsilon}; \boldsymbol{\varphi})\} + Q\{\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\epsilon}) + \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\epsilon}); \mathbf{t}(\boldsymbol{\varphi})\}] D d\alpha^1 d\alpha^2 +$$

$$+ \iint_{\Omega} [\sigma_1^{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon}) \gamma^{\circ}_{\delta,\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon}; \boldsymbol{\varphi}) + \sigma_2^{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon}) \gamma^{1}_{\delta,\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon}; \boldsymbol{\varphi})] D d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{4.1}$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} \in H(\overline{\Omega})$.

Здесь $A(\boldsymbol{\varphi})$ дается формулой (2.13), билинейная форма Q – формулой (1.10).

Если принять во внимание соотношения (2.14), (3.1), то видно, что (4.1) с вектором $\boldsymbol{\varphi} = \delta\boldsymbol{\epsilon}$ выражает принцип Лагранжа $\delta U = \delta A$. В силу этого из интегрального соотношения (4.1) вытекают уравнения равновесия, представляющие собой систему нелинейных интегральных уравнений по области Ω относительно независимых функций ε_1, ε_2, ε_3, которая при дополнительных условиях гладкости исходных данных эквивалентна обычной системе уравнений равновесия в перемещениях. Подобная эквивалентность предполагалась в работе [7], в которой топологическим методом доказано существование локального решения более общей задачи. Однако при некоторых вариантах закрепления оболочки этой эквивалентности может и не быть.

Корректность определения обобщенного решения (4.1) следует из следующей леммы.

Лемма 4. Пусть выполнены условия лемм 1,3 и (1.4), (1.11). Тогда правая часть соотношения (4.1) представляет собой линейный ограниченный функционал в $H(\overline{\Omega})$ относительно $\boldsymbol{\varphi} \in H(\overline{\Omega})$ при фиксированном $\boldsymbol{\epsilon} \in H(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\varphi} \in H(\overline{\Omega})$. Из условия (1.11) вытекает, что $\sigma_k^{\lambda\mu} \in L_2(\overline{\Omega})$. Теперь, если применить к интегралам в правой части (4.1) неравенство Гельдера и учесть лемму 3, то сразу получим утверждение леммы.

В силу леммы 4 по теореме Рисса существует элемент $\mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}) \in H(\overline{\Omega})$ такой, что правая часть (4.1) представляется в виде скалярного произведения $(\mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}),\ \boldsymbol{\varphi})_H$. Так как $\boldsymbol{\varphi}$ – произвольный вектор, то будем иметь соотношение

$$\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

которое представляет собой нелинейное операторное уравнение в $H(\overline{\Omega})$. Таким образом, нахождение обобщенного решения задачи свелось к решению эквивалентного уравнения (4.2).

5. Исследование разрешимости уравнения (4.2). В этом пункте покажем, что существует точка абсолютного минимума функционала $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$, определенного при помощи формул (2.12), (2.13), которая одновременно является решением уравнения (4.2).

Пусть $\{\mathbf{e}^n\}$ – ортонормированный базис в $H(\overline{\Omega})$. Приближенное решение задачи минимизации $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$ ищем в виде

$$\boldsymbol{\epsilon}^n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}^i \equiv \alpha_i \mathbf{e}^i \tag{5.1}$$

где $\alpha_i = \alpha_i(n)$ – неизвестные постоянные, которые определяются из системы Ритца

$$(\operatorname{grad} \Phi(\alpha_i \mathbf{e}^i),\ \ \mathbf{e}^k)_H = 0 \quad (k = \overline{1,\ n}) \tag{5.2}$$

При обосновании метода Ритца будем опираться на лемму 12.2 и теорему 12.5 из [8, с. 169, 175], согласно которым если $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$ – дифференцируемый, возрастающий, непрерывный и слабо полунепрерывный снизу функционал в $H(\overline{\Omega})$, то существует хотя бы одна точка абсолютного минимума $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$ и система (5.2) разрешима при любом n; приближения Ритца (5.1) образуют минимизирующую последовательность, из которой можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке абсолютного минимума.

Докажем ряд утверждений.

Теорема 1. Функционал $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$ дифференцируем в любой точке $\boldsymbol{\epsilon} \in H(\overline{\Omega})$ и $\operatorname{grad}\Phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon})$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\epsilon}$, $\varphi \in H(\overline{\Omega})$. Так как $\gamma(\boldsymbol{\epsilon}+\varphi) = \gamma(\boldsymbol{\epsilon}) + \gamma(\varphi) + \varkappa_\delta(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi)$, то для потенциальной энергии U, определенной формулой (1.5), будем иметь

$$U(\boldsymbol{\epsilon}+\varphi) - U(\boldsymbol{\epsilon}) = \iiint\limits_V D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\Pi\{\gamma(\boldsymbol{\epsilon}) + t[\gamma(\varphi) + \varkappa_\delta(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi)]\}dt$$

Откуда, находя производную $d\Pi/dt$, учитывая при этом (1.8) и формулу $\gamma(\varphi) + \varkappa_\delta(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi) = \gamma_\delta(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi) + \varkappa(\varphi)$, после несложных преобразований получаем

$$\begin{gathered}
U(\boldsymbol{\epsilon}+\varphi) - U(\boldsymbol{\epsilon}) = \iiint\limits_V \sigma^{\lambda\mu}(\gamma(\boldsymbol{\epsilon}))\gamma_{\delta,\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi)D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 + \\
+\psi(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi) = \iint\limits_\Omega Q\{\gamma(\boldsymbol{\epsilon});\ \ \gamma_\delta(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi)\}D d\alpha^1 d\alpha^2 - \\
-\iint\limits_\Omega [\sigma_1^{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon})\overset{\circ}{\gamma}_{\delta,\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi) + \sigma_2^{\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon})\overset{1}{\gamma}_{\delta,\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi)]D d\alpha^1 d\alpha^2 + \psi(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi) \\
\psi(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi) = \iiint\limits_V \sigma^{\lambda\mu}(\gamma(\boldsymbol{\epsilon}))\varkappa_{\lambda\mu}(\varphi)D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 + \\
+\iiint\limits_V D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \int\limits_0^1 \{\sigma^{\lambda\mu}(\gamma(\boldsymbol{\epsilon}) + t(\gamma(\varphi) + \varkappa_\delta(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi))) - \\
-\sigma^{\lambda\mu}(\gamma(\boldsymbol{\epsilon}))\}[\gamma_{\lambda\mu}(\varphi) + \varkappa_{\delta,\lambda\mu}(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi)]dt
\end{gathered} \tag{5.3}$$

Нетрудно видеть, что $|\psi|/\|\varphi\|_H \to 0$ при $\|\varphi\|_H \to 0$. Используя (5.3), с учетом линейности $A(\boldsymbol{\epsilon})$ будем иметь

$$\Phi(\boldsymbol{\epsilon}+\varphi) - \Phi(\boldsymbol{\epsilon}) = (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}),\ \ \varphi)_H + \psi(\boldsymbol{\epsilon};\ \varphi) \tag{5.4}$$

Формула (5.4) означает [9, с. 79], что функционал $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$ дифференцируем в точке $\boldsymbol{\epsilon} \in H(\overline{\Omega})$ и $\operatorname{grad}\Phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon})$. Теорема доказана.

В силу теоремы 1 система (5.2) примет вид

$$\alpha_k - (\mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}^n),\ \ \mathbf{e}^k)_H = 0\ \ (k = \overline{1,\ n})$$

Теорема 2. Пусть для любых двух векторов деформации

$$\gamma_k = (\gamma_{k,11},\ \ \gamma_{k,12},\ \ \gamma_{k,22}) \in L_2(\overline{V}),\ \ \gamma_{k,\lambda\mu} = \overset{\circ}{\gamma}_{k,\lambda\mu} + \alpha^3\overset{1}{\gamma}_{k,\lambda\mu}\ \ (k = 1,\ 2)$$

выполнено условие

$$\iiint\limits_V [\sigma^{\lambda\mu}(\gamma_1) - \sigma^{\lambda\mu}(\gamma_2)](\gamma_{1,\lambda\mu} - \gamma_{2,\lambda\mu})D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3 \geqslant 0 \tag{5.5}$$

Тогда функционал $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$ слабо полунепрерывен снизу в $H(\overline{\Omega})$, т.е. $\Phi(\boldsymbol{\epsilon}^\circ) \leqslant \lim\Phi(\boldsymbol{\epsilon}^n)$ при $n \to \infty$ для любой слабо сходящейся в $H(\overline{\Omega})$ последовательности $\boldsymbol{\epsilon}^n \to \boldsymbol{\epsilon}^\circ$ (здесь и далее одной стрелкой будем обозначать слабую сходимость).

Доказательство. Сначала покажем, что U – слабо полунепрерывный снизу функционал в пространстве $L_2(\overline{V})$ векторов деформаций $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22})$. Поступая как при доказательстве теоремы 1, можно показать, что grad $U(\boldsymbol{\gamma}) = D^*(\sigma^{11}(\boldsymbol{\gamma}), \sigma^{12}(\boldsymbol{\gamma}), \sigma^{22}(\boldsymbol{\gamma}))$. Тогда условие (5.5) означает, что grad $U(\boldsymbol{\gamma})$ является монотонным оператором в $L_2(\overline{V})$. Следовательно [8, с. 102], $U(\boldsymbol{\gamma})$ слабо полунепрерывен снизу в $L_2(\overline{V})$. Установив это, предположим, что $\boldsymbol{\epsilon}^n \to \boldsymbol{\epsilon}^\circ$ в $H(\overline{\Omega})$, $n \to \infty$. Тогда из леммы 3 следует, что $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\epsilon}^n) \to \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\epsilon}^\circ)$ в $L_2(\overline{V})$, $n \to \infty$. Следовательно $U(\boldsymbol{\epsilon}^\circ) \equiv U(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\epsilon}^\circ)) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} U(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\epsilon}^n)) \equiv$ $\equiv \underline{\lim}_{n\to\infty} U(\boldsymbol{\epsilon}^n)$, т.е. функционал $U(\boldsymbol{\epsilon})$ слабо полунепрерывен снизу в $H(\overline{\Omega})$. Легко видеть, что функционал $A(\boldsymbol{\epsilon})$ слабо непрерывен в $H(\overline{\Omega})$. Теорема доказана.

Теорема 3. Функционал $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$ непрерывен в $H(\overline{\Omega})$.

Справедливость теоремы 3 непосредственно вытекает из условия (1.11) и леммы 3.

Пусть $\boldsymbol{\epsilon}^\circ \in H(\overline{\Omega})$ есть решение следующей системы нелинейных уравнений относительно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$:

$$\tilde{\gamma}^\circ_{jj} \equiv \tfrac{1}{2} b_j(\varepsilon_3 - (-1)^j \operatorname{Re} S\varepsilon_3) + \operatorname{Re}(\beta^\circ_{jj} T\varepsilon_3) - \tfrac{1}{2} B_{jj}\tilde{T}\varepsilon_3 + \tfrac{1}{2}\omega_j^2 = 0 \quad (j = 1,\ 2)$$

$$\tilde{\gamma}^\circ_{12} \equiv -\tfrac{1}{2}(b_1 + b_2) Fm S\varepsilon_3 + \operatorname{Re}(\beta^\circ_{12} T\varepsilon_3) + \omega_1\omega_2 = 0 \tag{5.6}$$

где ω_j определены формулами (2.7).

Выведем условия, при которых решение $\boldsymbol{\epsilon}^\circ = \mathbf{0}$. С этой целью из первых двух уравнений системы (5.6) исключим $\operatorname{Re} S\varepsilon_3$. Получим

$$\varepsilon_3 - K_1\varepsilon_3 = \tfrac{1}{2} B_j^j B_{jj}\tilde{T}\varepsilon_3 - \tfrac{1}{2} B_j^j \omega_j^2 \tag{5.7}$$

где $K_1\varepsilon_3 = -\operatorname{Re}(B_j^j \beta^\circ_{jj} T\varepsilon_3)$ вполне непрерывен в $L_p(\overline{\Omega})$, $p \geqslant 1$. В (5.7) фиксируем ε_1, ε_2 и исследуем разрешимость уравнения (5.7) относительно ε_3 в $L_1(\overline{\Omega})$. Пусть $\boldsymbol{\epsilon}_3 \in L_1(\overline{\Omega})$ есть нетривиальное решение однородного уравнения

$$\varepsilon_3 - K_1\varepsilon_3 = 0 \tag{5.8}$$

Видно, что это решение $\boldsymbol{\epsilon}_3 \in L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$. Введем $v(z) = (T\varepsilon_3)(z)$, очевидно $v \in C_{(p-2)/p}(\overline{\Omega})$ и $\partial v / \partial \bar{z} = \varepsilon_3$. Подставляя все это в (5.8), получаем $v_{\bar{z}} + Av + B\bar{v} = 0$ (A, B – известные функции), т.е. $v(z)$ – обобщенная аналитическая функция в Ω [6, гл. 3]. Кроме того, $v(z)$ непрерывно продолжается на всю плоскость переменных α^1, α^2, причем она голоморфна вне $\overline{\Omega}$ и обращается в нуль на бесконечности. Тогда в силу обобщенной теоремы Лиувилля [6, с. 128] $v \equiv 0$, откуда $\varepsilon_3 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Следовательно, существует обратный оператор $(I - K_1)^{-1}$ (I – тождественный оператор), ограниченный в $L_1(\overline{\Omega})$ и уравнение (5.7) запишется в виде

$$\varepsilon_3 - K_2\varepsilon_3 = -\tfrac{1}{2}(I - K_1)^{-1}(B_j^j \omega_j^2(\varepsilon_0)) \tag{5.9}$$

$$K_2\varepsilon_3 = \tfrac{1}{2}(I - K_1)^{-1}(B_j^j B_{jj}\tilde{T}\varepsilon_3)$$

Оценим $K_2\varepsilon_3$ в норме $L_1(\overline{\Omega})$:

$$\|K_2\varepsilon_3\|_{L_1} \leqslant \tfrac{1}{4}\left\|(I - K_1)^{-1}\right\|_{L_1}\left\|B_j^j B_{jj} T\overline{T\varepsilon_3}\right\|_{L_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi^2}\left\|(I - K_1)^{-1}\right\|_{L_1} \operatorname*{Sup}_{z\in\Omega}\left[\iint_\Omega \frac{dt_1 dt_2}{|t - z|}\iint_\Omega \frac{|B_j^j B_{jj}|\, d\xi d\eta}{|\zeta - t|}\right]\|\varepsilon_3\|_{L_1} = q_1\|\varepsilon_3\|_{L_1}, \quad t = t_1 + it_2$$

Пусть выполнено условие

$$q_1 < 1 \tag{5.10}$$

Тогда $K_2\varepsilon_3$ является сжимающим оператором. Применяя оператор $(I-K_2)^{-1}$ к обеим частям уравнения (5.9), получаем

$$\varepsilon_3 = -\tfrac{1}{2}(I-K_2)^{-1}(I-K_1)^{-1}(B_j^j\omega_j^2(\varepsilon_0))$$

Откуда следует

$$\|\varepsilon_3\|_{L_1} \leqslant \tfrac{1}{2}\left\|(I-K_2)^{-1}\right\|_{L_1}\left\|(I-K_1)^{-1}\right\|_{L_1}\left\| |B_j^j|\,\omega_j^2(\varepsilon_0)\right\|_{L_1} \tag{5.11}$$

Вернемся к системе 5.6, в которой $\boldsymbol{\epsilon}$ заменим решением $\boldsymbol{\epsilon}^\circ$. Первое тождество умножим на $|B_1^1|$, второе – на $|B_2^2|$. Складывая их и интегрируя по области Ω, после несложных преобразований получаем

$$\iint_\Omega |B_j^j|\,\omega_j^2(\varepsilon_0^\circ)d\alpha^1 d\alpha^2 = -\iint_\Omega\left(\frac{1}{2}\bar{T}Tg_1 + \operatorname{Re}Tg_2\right)\varepsilon_3^\circ d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{5.12}$$

$$g_1 = |B_j^j|\,B_{jj},\quad g_2 = (|B_1^1|_{\alpha^1} + |B_j^j|\,G_{jj}^1)/B_1^1 + i(|B_2^2|_{\alpha^2} + |B_j^j|\,G_{jj}^2)/B_2^2$$

Принимая во внимание тот факт, что для решения $\boldsymbol{\epsilon}^\circ = (\varepsilon_1^\circ,\ \varepsilon_2^\circ,\ \varepsilon_3^\circ)$ системы (5.6) справедлива оценка (5.11), из (5.12) будем иметь:

$$\left\| |B_j^j|\,\omega_j^2(\varepsilon_0^\circ)\right\|_{L_1} \leqslant \tfrac{1}{2}\left\|(I-K_1)^{-1}\right\|_{L_1}\left\|(I-K_2)^{-1}\right\|_{L_1}\left\|\tfrac{1}{2}\bar{T}Tg_1 +\right.$$

$$\left.+\operatorname{Re}Tg_2\right\|_C\left\| |B_j^j|\,\omega_j^2(\varepsilon_0^\circ)\right\|_{L_1} \equiv g\left\| |B_j^j|\,\omega_j^2(\varepsilon_0^\circ)\right\|_{L_1}$$

Отсюда при выполнении условия

$$q < 1 \tag{5.13}$$

получаем $\omega_j(\varepsilon_0^\circ) = 0$ $(j=1,\ 2)$, откуда $\varepsilon_0^\circ = 0$ и из (5.11) $\varepsilon_3^\circ = 0$. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 5. Пусть выполнены условия (5.10), (5.13). Тогда если $\boldsymbol{\epsilon}^\circ \in H(\overline{\Omega})$ есть решение системы (5.6), то $\boldsymbol{\epsilon}^\circ = \mathbf{0}$ в $\overline{\Omega}$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия лемм 4,5 и область Ω является соболевской класса (2,2,2). Тогда $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$ суть возрастающий функционал в $H(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Справедливость теоремы будет вытекать из априорной оценки для $\Phi(\boldsymbol{\epsilon})$, которую получим, используя схему, предложенную И.И. Воровичем [10] для оценки подобных функционалов. Прежде всего заметим, что в силу условий (1.12), (1.13) имеет место

$$\Phi(\boldsymbol{\epsilon}) \geqslant \frac{c_1}{c_3}U_\tau(\boldsymbol{\epsilon}) - |A(\boldsymbol{\epsilon})| \equiv \Phi_\tau(\boldsymbol{\epsilon}) \tag{5.14}$$

где U_τ, A определены формулами (2.12), (2.13).

Пусть $Э(R,\ 0)$ есть эллипсоид пространства $L_2(\overline{\Omega})$, заданный при помощи соотношений $\varepsilon_i = R\varepsilon_i^*$ $(i=1,\ 2)$, $\varepsilon_3 = R^2\varepsilon_3^*$, $\left\|\boldsymbol{\epsilon}^*\right\|_{L_2} = 1$, $\boldsymbol{\epsilon}^* = (\varepsilon_1^*,\ \varepsilon_2^*,\ \varepsilon_3^*)$. Получим оценку снизу для Φ_τ на $Э(R,\ 0)$. С этой целью с учетом (1.10) функционал $\Phi_\tau(\boldsymbol{\epsilon})$ представим в виде

$$\Phi_\tau(\boldsymbol{\epsilon}) = \Phi_4(\boldsymbol{\epsilon}) + \tilde{\Phi}_\tau(\boldsymbol{\epsilon}),\quad \Phi_4(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{c_1}{2c_3}\iint_\Omega Q_p\{\tilde{\gamma}^\circ\}Dd\alpha^1 d\alpha^2 \tag{5.15}$$

где $\tilde{\gamma}^\circ$ определен в (5.6). Легко видеть, что $\Phi_4(\boldsymbol{\epsilon})$ на $Э(R, 0)$ представляет собой однородную по R четвертой степени часть функционала Φ_τ, а $\tilde{\Phi}_\tau$ имеет по R степень не выше третьей. Пусть $\tilde{\Phi}_4(\varepsilon_3) \equiv \Phi_4(0,\ 0,\ \varepsilon_3)$ – часть $\Phi_4(\boldsymbol{\epsilon})$, зависящая только от ε_3. Принимая во внимание положительную определенность квадратичной формы Q_p и используя теорему 10.8 из [10, с. 81], получаем

$$\tilde{\Phi}_4(\varepsilon_3) \geqslant m_3 \|\varepsilon_3\|^2_{L_2} \tag{5.16}$$

где постоянная $m_3 > 0$ не зависит от ε_3.

Пусть $Э_1(R,\ 0) = \{\boldsymbol{\epsilon} \in Э(R,\ 0) \mid \|\varepsilon_0\|_{L_2} \leqslant \delta_0 R\}$, $0 < \delta_0 < 1$. Число δ_0 фиксируем так, чтобы на $Э_1(R, 0)$ имела место оценка

$$\Phi_4(\boldsymbol{\epsilon}) \geqslant m_4 R^4, \quad m_4 > 0 \tag{5.17}$$

что возможно в силу (5.16).

Используя (5.17), из (5.15) получаем $\Phi_\tau(\boldsymbol{\epsilon}) \geqslant m_4 R^4 - c(R^3 + R^2 + R)$, откуда при достаточно больших R:

$$\Phi_\tau(\boldsymbol{\epsilon}) \geqslant {}^1\!/_2\, m_4 R^4 \tag{5.18}$$

Теперь $\Phi_\tau(\boldsymbol{\epsilon})$ оценим снизу на $Э_2(R, 0) = Э(R, 0)\backslash Э_1(R, 0)$. При помощи рассуждений, аналогичных примененным при доказательстве леммы 1, получаем

$$\frac{c_1}{2c_3} \iint\limits_{\Omega} Q_u\{\gamma^1\} D d\alpha^1 d\alpha^2 \geqslant m_5 \|\varepsilon_0\|^2_{L_2}, \quad m_5 > 0 \tag{5.19}$$

Множество $Э_2(R,\ 0)$ разобьем на две части: $Э_2(R,\ 0) = Э_2'(R,\ 0) \cup Э_2''(R,\ 0)$, где $Э_2'(R,\ 0)$ есть множество элементов $\boldsymbol{\epsilon} \in Э_2(R,\ 0)$, удовлетворяющих неравенству

$$J(\varepsilon_3) \equiv \iint\limits_{\Omega} \mid \mathfrak{R}^3 \tilde{T}\varepsilon_3 + (\mathcal{L}^1 + b_1\mathfrak{R}^1 + i(\mathcal{L}^2 + b_2\mathfrak{R}^2))T\varepsilon_3 \mid D d\alpha^1 d\alpha^2 > m_5 \delta_0^2 R^2$$

постоянные δ_0, $m_5 > 0$ определены с помощью (5.17), (5.19). На $Э_2''(R,\ 0)$, следовательно, выполняется условие

$$J(\varepsilon_3) \leqslant m_5 \delta_0^2 R^2 \tag{5.20}$$

Покажем, что на $Э_2'(R,\ 0)$ имеет место оценка

$$\Phi_4(\boldsymbol{\epsilon}) \geqslant m_6 R^4, \quad m_6 > 0 \tag{5.21}$$

Действительно, если (5.21) не выполняется, то существует последовательность $\boldsymbol{\epsilon}^n \in Э_2'(R,\ 0)$ такая, что $\Phi_4(\boldsymbol{\epsilon}^n) \to 0$, $n \to \infty$. Пусть $\boldsymbol{\epsilon}^n \to \boldsymbol{\epsilon}^\circ$ в $H(\overline{\Omega})$, $n \to \infty$, $\boldsymbol{\epsilon}^\circ \in \overline{Э_2'}(R,\ 0)$; ($\overline{Э_2'}(R,\ 0)$ – слабое замыкание $Э_2'(R,\ 0)$). Нетрудно заметить, что функционал $\Phi_4(\boldsymbol{\epsilon})$ слабо полунепрерывен снизу в $H(\overline{\Omega})$. Следовательно, $\Phi_4(\boldsymbol{\epsilon}^\circ) = 0$, откуда $\tilde{\gamma}^\circ(\boldsymbol{\epsilon}^\circ) = \mathbf{0}$, т.е. ε° есть решение системы (5.6). В силу леммы 5 $\boldsymbol{\epsilon}^\circ = 0$. С другой стороны, как легко видеть, $\overline{Э_2'(R,\ 0)}$ не может содержать нуля. Полученное противоречие доказывает справедливость (5.21). Тогда из (5.15) будем иметь $\Phi_\tau(\boldsymbol{\epsilon}) \geqslant m_6 R^4 - c(R^3 + R^2 + R)$, откуда при достаточно больших R:

$$\Phi_\tau(\boldsymbol{\epsilon}) \geqslant \frac{1}{2} m_6 R^4, \quad m_6 > 0 \tag{5.22}$$

Пусть для любого $\epsilon \in Э_2''(R,\ 0)$ выполнено условие

$$\iint\limits_{\Omega} [Q_p\{\gamma^\circ\} + Q_*\{\gamma\}] D d\alpha^1 d\alpha^2 \geqslant 0$$

которое, в частности, имеет место для оболочек с симметричной структурой по оси α^3 (т.е. $D_*^{\lambda\mu qs} \equiv 0$). Тогда из (5.14) с учетом (5.19), (5.20) получаем $\Phi_\tau(\epsilon) \geqslant \frac{1}{2} m_5 \delta_0^2 R^2 - cR$, откуда

$$\Phi_\tau(\epsilon) \geqslant \frac{1}{4} m_5 \delta_0^2 R^2 \tag{5.23}$$

если R – достаточно велико.

Из оценок (5.18), (5.22) и (5.23) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Таким образом, приближения Ритца (5.1) образуют минимизирующую последовательность, из которой можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к точке ϵ_* абсолютного минимума функционала $\Phi(\epsilon)$. В силу теоремы 1 точка ϵ_* является обобщенным решением задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда Фундаментальных исследований (проект 99-01-00410) и АН Татарстана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Лебедев Л.П., Шлафман Ш.М.* О некоторых прямых методах и существовании решений в нелинейной теории упругости непологих оболочек вращения // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 339–348.
2. *Ворович И.И., Шлафман Ш.М.* О разрешимости нелинейных уравнений для непологого симметрично загруженного сферического купола // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 944–946.
3. *Шлафман Ш.М.* О существовании решений в нелинейной теории непологих оболочек // Изв. Сев.-Кавказ. научн. центра высшей школы. Сер. естеств. н. 1974. № 4. С. 49–53.
4. *Ворович И.И., Шлафман Ш.М.* О сходимости метода конечных элементов в нелинейной теории оболочек // X Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси, 1975. Т. I. С. 552–561.
5. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
6. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
7. *Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н.* Исследование разрешимости краевых задач геометрически и физически нелинейной теории тонких оболочек // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 6. С. 116–128.
8. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
9. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.
10. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 376 с.

Казань, Наб. Челны

Поступила в редакцию
11.11.1999