

УДК 539.214; 539.374

© 2002 г. А.И. ХРОМОВ

ДЕФОРМАЦИЯ И РАЗРУШЕНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

На примере задачи о растяжении полосы исследуется возможность описания процесса разрушения в рамках модели идеального жесткопластического тела. Некоторые аспекты развиваемого подхода рассмотрены в [1, 2]. Ниже рассматривается возможность формулировки локального энергетического критерия разрушения.

1. Рассмотрим задачу о растяжении полосы при кинематических граничных условиях. В другой постановке эта задача рассмотрена в [1].

Для исключения неопределенности положения пластической области в начальный момент времени $t = 0$ будем рассматривать полосу с прямоугольной симметричной выточкой (фиг. 1), такой, что точки A, A', B, B' являются точно вершинами квадрата со стороной $2a$.

Пусть верхний и нижний концы полосы движутся поступательно вдоль оси Y в противоположные стороны с равными по модулю скоростями. Свободная граница полосы на участках AB и $A'B'$ в начальный момент времени прямолинейна, поэтому пластическая область заключена в треугольниках OAB и $OA'B'$. Линии $A'OA$ и $B'OB$ являются линиями разрыва скоростей перемещений и прямолинейны. Поля скоростей перемещений и напряжений в пластической области однородны.

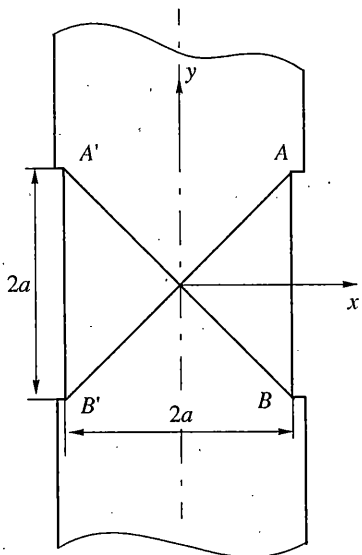
Поле скоростей имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\text{выше линий } OA', OA \quad V_x = 0, V_y = V \\ &\text{ниже линий } OB', OB \quad V_x = 0, V_y = -V \\ &\text{внутри треугольника } OAB \quad V_x = -V, V_y = 0 \\ &\text{внутри треугольника } OA'B \quad V_x = V, V_y = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

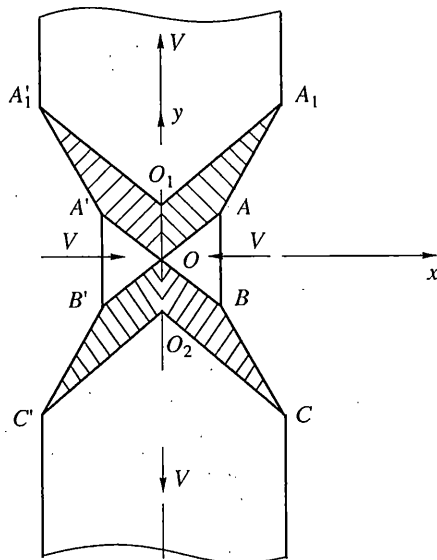
Согласно (1.1) свободные границы полосы AB и $A'B$ движутся вместе с областями OAB и $A'OB'$ как жесткое целое, не изменяя своей формы. Поэтому в течение всего процесса деформирования поле скоростей будет сохранять этот вид.

На фиг. 2 представлено пластическое течение, симметричное относительно осей симметрии полосы (осей координат x и y), соответствующее решению [3]. Отметим, что материал внутри треугольника $A'OB'$ и AOB находится в пластическом состоянии условно, так как эти области движутся как жесткое целое вдоль оси X . Пластическая деформация материала происходит при пересечении изолированных линий скольжения $A'OB$ и $A'OB'$, являющихся линиями разрыва скоростей перемещений и локализована в заштрихованных областях.

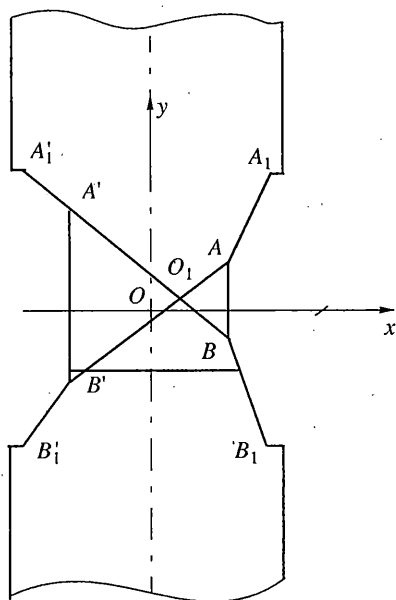
Симметричное пластическое течение является не единственным решением рассматриваемой задачи с учетом изменения геометрии свободной поверхности полосы. В [1] показана возможность построения несимметричных пластических течений полосы, которые в каждый момент времени являются полными решениями (фиг. 3).



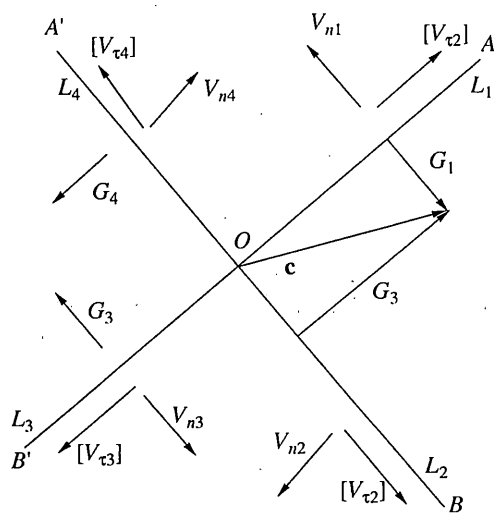
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Эти течения зависят от траектории движения точки O (точки пересечения изолированных линий скольжения AOB' и $A'OB$).

Пусть в начальный момент времени пластическое течение имеет симметричную форму и точка O перемещается со скоростью c (фиг. 4). Тогда линии скольжения: $L_1 - OA$, $L_2 - OB$, $L_3 - OB'$, $L_4 - OA'$ будут перемещаться в плоскости XY с некоторыми нормальными скоростями соответственно G_1, G_2, G_3, G_4 .

Пусть $V_{n1}, V_{n2}, V_{n3}, V_{n4}$ – нормальные компоненты скоростей перемещения, а $[V_{\tau 1}], [V_{\tau 2}], [V_{\tau 3}], [V_{\tau 4}]$ – разрывы тангенциальных компонент скоростей перемещений на соответствующих линиях разрыва. На фиг. 4 представлены положительные направления величины $V_{ni}, [V_{\tau i}]$ и G_i , при этом направления V_{ni} и $[V_{\tau i}]$ согласованы с полем скоростей (1.1), а G_i направлены против V_{ni} ($i = 1, 2, 3, 4$ – номер линии разрыва). Тогда объемная плотность энергии диссипации, получаемой частицей при пересечении соответствующей линии разрыва скоростей, определяется выражением

$$W_i = \frac{[V_{\tau i}]k}{G_i + V_{ni}} \quad (i = 1 - 4) \quad (1.2)$$

где k – предел текучести, $[V_{\tau i}]$ – разрыв тангенциальной составляющей скорости перемещений на соответствующей линии разрыва L_i . Числитель выражения (1.2) определяет работу, совершаемую внутренними силами на единицу площади соответствующей линии разрыва в единицу времени. Знаменатель определяет объем материала, протекающего через единицу площади указанной поверхности в единицу времени.

Линии L_i не изменяют своего угла наклона к оси X , поэтому

$$[V_{\tau i}] = \sqrt{2} / V, \quad V_{ni} = V / \sqrt{2} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1.3)$$

$$G_1 = c \sin \varphi, \quad G_2 = c \cos \varphi, \quad G_3 = -c \sin \varphi, \quad G_4 = -c \cos \varphi \quad (1.4)$$

где c – модуль скорости движения точки O , φ – угол между вектором \mathbf{c} и линией L_i (фиг. 2).

Согласно (1.2)–(1.4), для рассматриваемой задачи W_i определяются только величиной G_i и являются функциями c и φ , т.е.

$$W_i = 2Vk / (\sqrt{2}G_i + V) \quad (1.5)$$

Область допустимых значений G_i :

$$\infty > G_i \geq -V_{ni} \quad (1.6)$$

При $G_i \rightarrow \infty, W_i \rightarrow 0$, при $G_i \rightarrow -V_{ni}, W_i \rightarrow \infty$, при $G_i = 0, W_i = k$.

В случае $G_i = -V_{ni}$ происходит сдвиг материала вдоль линии скольжения по одним и тем же частицам. В [1] показано, что при $G_i < -V_{ni}$ полного решения рассматриваемой задачи с выбранным полем линий скольжения не существует. Вектор \mathbf{c} может иметь произвольное направление ($0 \leq \varphi < 2\pi$), но ограничен по модулю условием (1.6).

Другой особенностью выражения (1.5) является то, что при $c \neq 0$ хотя бы на двух линиях L_i значения G_i имеют противоположные знаки, поэтому

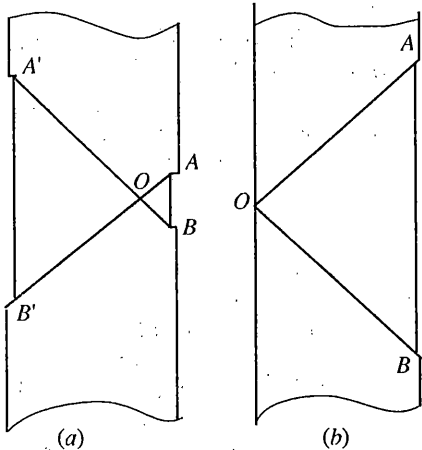
$$\max_{L_i} W > 2k > \min_{L_i} W \quad (1.7)$$

При $c = 0$:

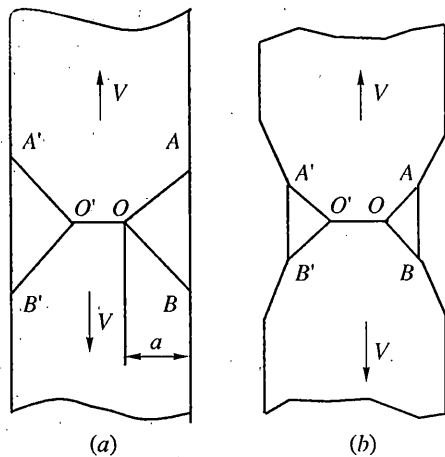
$$\min_{c, \varphi} \max_{L_i} W = \max_{c, \varphi} \min_{L_i} W = 2k \quad (1.8)$$

Условие (1.8) выделяет из возможных пластических течений полосы единственное предпочтительное течение с неподвижной точкой O .

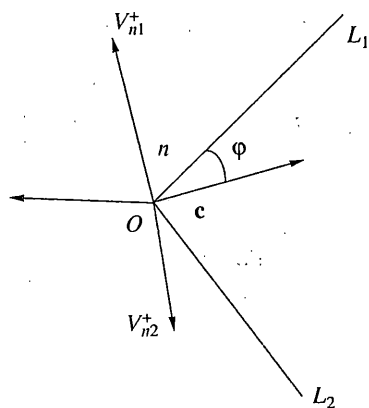
Заметим, что симметричность пластического течения относительно оси u является следствием начальной локализации пластической области симметричными выточками, при несимметричной локализации пластической области (фиг. 5, а), которая в предельном случае может состоять лишь из одного треугольника OAB , когда точка O находится на свободной поверхности полосы (фиг. 5, в).



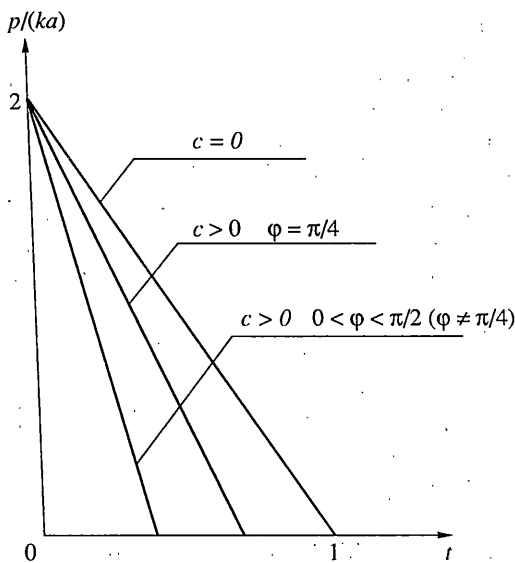
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Условие (1.3) позволяет сформулировать критерий выбора предпочтительного решения задач о пластическом течении с учетом изменений геометрии тела, когда существует несколько (в том числе и бесконечное множество) полных решений: плотность течения разрывается таким образом, что максимальная объемная пластичность энергии диссипации в пластической области Ω (включая поверхности разрыва скоростей) минимальна

$$\max_{\Omega} \min_{\Gamma_i} W_* \quad (1.9)$$

Отметим, что все рассмотренные выше пластические течения являются полными, т.е. допускают продолжение поля напряжений в жесткие области и приводят к одной и той же зависимости усилия, необходимого для растяжения полосы, от перемещения ее концов.

2. В [1, 2] показано, что деформация частиц материала при переходе через линию разрыва скоростей перемещений при плоской деформации полностью определяется объемной плотностью диссипации энергии на линии разрыва W . Поэтому при исследовании процессов разрушения эту величину естественно включить в критерии разрушения. Учитывая (1.8) предположим, что разрушение идеального жесткопластического материала наступает, когда величина W достигает своего критического значения W_* , т.е.

$$W \geq W_* \quad (2.1)$$

Рассмотрим процесс распространения трещин при растяжении полосы.

Пусть в полосе имеется начальная трещина OO' (фиг. 6). В рамках рассматриваемого подхода ее величина и направление не влияют на пластическое течение.

Если при растяжении материал разрушаться не будет, то пластическое течение будет происходить аналогично решению [3] (рис. 6, в).

При разрушении материала вершина трещины O будет перемещаться в направлении вектора \mathbf{c} (фиг. 7).

Будем рассматривать непрерывное развитие трещины при условии

$$W = W_* \quad (2.2)$$

Величина W_* , согласно (1.5), уменьшается только при $G_i > 0$; это возможно, учитывая (1.4), при $0 < \varphi < \pi/2$, т.е. вектор \mathbf{c} должен находиться между линиями L_1, L_2 .

Если вектор \mathbf{c} будет находиться выше оси x ($0 < \varphi \leq \pi/4$), то, согласно (1.4), (1.5), $\max W_i = W_1$ и разрушение материала будет определяться деформацией на линии L_1 .

Если вектор \mathbf{c} находится ниже оси x ($\pi/4 < \varphi < \pi/2$), то $\max W_i = W_2$ и разрушение будет определяться линией L_2 .

Пусть $0 < \varphi \leq \pi/4$, тогда из условия разрушения (2.2) следует

$$W_1 = W_* = \frac{2}{\sqrt{2c \sin \varphi + 1}}, \quad \bar{W} = \frac{W}{k}, \quad \bar{W}_* = \frac{W_*}{k} \quad (2.3)$$

Из (2.3) можно определить скорость движения вершины трещины

$$c = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \varphi} \left(\frac{2}{\bar{W}_*} - 1 \right) \quad (2.4)$$

Усилие, необходимое для деформации полосы, определяется в виде

$$P = 2[1 - t - 1/2(\operatorname{ctg} \varphi + 1)t] \quad (2.5)$$

Скорость измерения усилия равна

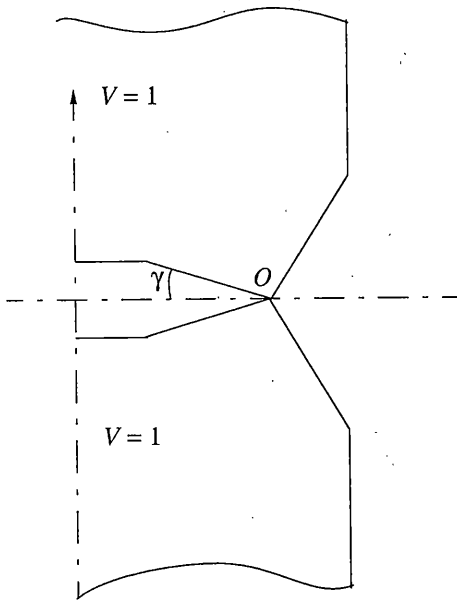
$$dP/dt = -[2 + (\operatorname{ctg} \varphi + 1)(2/\bar{W}_* - 1)] \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что наименьшее падение усилия достигается при $\varphi = \pi/4$. В этом случае работа, затраченная на деформацию полосы до разрушения, будет наибольшей, а, согласно (2.4), скорость распространения трещины наименьшей.

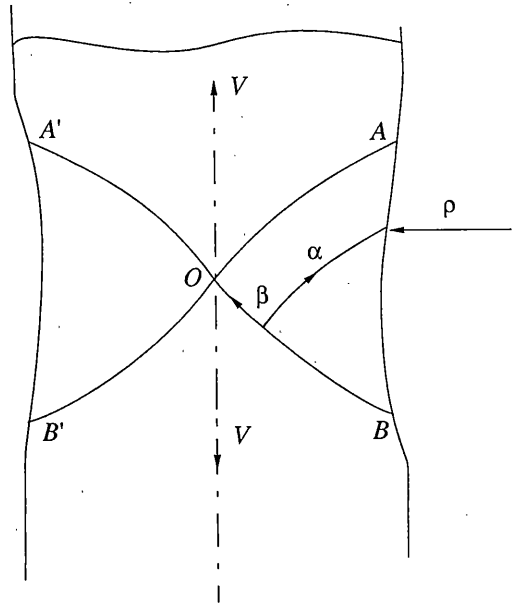
При $\pi/4 \leq \varphi < \pi/2$:

$$\bar{W}_2 = \bar{W}_* = \frac{2}{\sqrt{2c} \cos \varphi + 1}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varphi} \left(\frac{2}{\bar{W}_*} - 1 \right) \quad (2.7)$$

На фиг. 8 представлены зависимости $P(t)$ для различных углов φ . На фиг. 9 показана форма полосы в момент полного разрушения при $\varphi = \pi/4$.



Фиг. 9



Фиг. 10

Основные параметры пластического течения при $\varphi = \pi/4$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\bar{W}_1 = \bar{W}_2 = \bar{W}_* = \frac{2}{c+1}, \quad \bar{c} = \frac{2}{\bar{W}_*} - 1, \quad P(t) = 2 \left[1 - \frac{2t}{\bar{W}_*} \right]$$

$$A = 2/\bar{W}_*, \quad \operatorname{tg} \gamma = \bar{c} \quad (2.8)$$

где A – работа, необходимая для полного разрушения полосы ($a = 1, k = 1$), γ – половина угла раскрытия трещины.

3. Рассмотрим задачу о растяжении полосы с выточкой (например, в виде окружности радиусом ρ) (фиг. 10). Численное решение этой задачи дано В. Прагером [4]. Рассмотрим поле скоростей перемещений в пластической области OAB .

Граничные условия для скоростей

$$\text{на } OA - \alpha \text{ линии } \vartheta = v \cos \theta \quad (3.1)$$

$$\text{на } OB - \beta \text{ линии } u = -v \sin \theta$$

где u, v – проекции скорости соответственно на α, ρ – линии скольжения; θ – угол между касательной к α – линии и осью x .

В пластической области компоненты u, ϑ связаны соотношениями Гейрингер

$$\text{на } \alpha\text{-линии } du - u d\theta = 0; \quad \text{на } \beta\text{-линии } du + u d\theta = 0 \quad (3.2)$$

Линии скольжения OA и OB являются линиями разрыва скоростей перемещений.

Соотношения (3.1), (3.2) позволяют определить касательные компоненты скорости перемещений в окрестности линий OA и OB со стороны пластической области, в частности на линии OA :

$$v_{\bar{z}} = u = \int V \cos \theta d\theta = V \sin \theta + c \quad (3.3)$$

$$u \left(\frac{\pi}{4} \right) = V \sin \frac{\pi}{4} + c = -V \sin \frac{\pi}{4}, \quad c = -V\sqrt{2}, \quad v_{\bar{z}} = V(\sin \theta - \sqrt{2})$$

Касательные компоненты скорости перемещений со стороны жесткой области на линии OA :

$$V_{\tau}^{+} = u = V \sin \theta \quad (3.4)$$

Разрыв тангенциальной составляющей скорости перемещений на линии OA :

$$[V_{\tau}] = V_{\tau}^{+} - V_{\tau}^{-} = \sqrt{2} \quad (3.5)$$

Нормальные компоненты скорости перемещений на линии OA :

$$V_n = v = V \cos \theta \quad (3.6)$$

Объемная плотность энергии диссипации, полученной частицей при пересечении линии разрыва скоростей OA определяется выражением

$$W = \frac{[V_{\tau}]k}{G + V_n} = \frac{V\sqrt{2}k}{G + V \cos \theta} \quad (3.7)$$

При $\rho \rightarrow \infty$ пластическое течение будет стремиться к задаче, рассмотренной в п. 1, где $G = 0$. Поэтому величина W при больших ρ будет определяться выражением

$$W = \sqrt{2} / \cos \theta \quad (3.8)$$

При углах $0 < \theta < \pi/4$, согласно (3.8), наибольшая величина W будет в точке O ($W = 2$). Согласно условию (2.1), эта точка является точкой возможного разрушения материала полосы.

Дальнейший процесс распространения трещины может быть описан аналогично п. 2.

4. Предложенный подход к описанию процесса разрушения включает в себя два условия: первое – ограничение объемной плотности диссипации энергии (или деформации), второе – задание направления разрушения. При решении более сложных задач эти условия могут быть дополнены условием раскрытия трещин

$$[V_n^{+}] = V_{n1}^{+} - V_{n2}^{+} > 0 \quad (4.1)$$

где V_{n1}^{+}, V_{n2}^{+} (фиг. 7) – нормальные к вектору скорости распространения трещины компоненты скорости расхождения границ трещины.

При рассмотрении задачи о растяжении полосы материал считался недеформированным в начальный момент времени. Если полоса имела предварительное деформированное состояние, это должно быть учтено дополнительными соотношениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 98-01-00051).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромов А.И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. Владивосток: Дальнаука, 1996. 181 с.
2. Хромов А.И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 2. С. 202–205.
3. Onat E., Prager W. // The necking of a tension specimen in plane plastic flow // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 4. P. 491–493.
4. Prager W. Probleme der Plastizitätstheorie. Basel: Birkhäuser, 1955. 100 S.
5. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.