МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2002

УДК 539.3

© 2002 г. Е.Л. ГУСЕВ

СВОЙСТВО ПЕРИОДИЧНОСТИ СТРУКТУРЫ НЕОДНОРОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ВОЛН

Рассматриваются задачи оптимального проектирования неоднородных конструкций, реализующих предельные возможности при воздействии упругих волн. Задача оптимального синтеза заключается в таком выборе структуры неоднородной конструкции (физических свойств материалов слоев, толщин слоев, число слоев, а также порядка взаимного расположения слоев с различными физическими свойствами), чтобы энергетические характеристики упругой волны были наиболее близки к требуемым зависимостям.

На основе качественного исследования необходимых условий оптимальности, связанных с нелокальными вариациями управляющих параметров, установлено, что взаимосвязь параметров в структурах, реализующих предельные возможности, обладает свойством периодичности.

Априорное знание таких качественных закономерностей позволяет существенно уменьшить размерность исходной задачи оптимального синтеза, что открывает широкие возможности в исследовании предельных возможностей неоднородных конструкций при воздействии упругих волн.

1. При взаимодействии упругих волн с неоднородными структурами, представляющими собой систему упругих слоев значительный интерес представляет изучение возможности эффективного управления энергетическими характеристиками упругих волн на основе направленного выбора структуры неоднородной конструкции, а именно: физических свойств материалов слоев, толщин слоев, числа слоев, а также порядка взаимного сочленения слоев с различными физическими свойствами в конструкции... Задача, например, может заключаться в поиске структуры неоднородной конструкции обеспечивающей предельные возможности по гашению упругих волн в заданном диапазоне частот, либо обеспечивающей предельные возможности по максимальному прохождению упругих волн в заданном диапазоне частот, либо обеспечивающей предельные возможности по максимальному гашению упругих волн в одном диапазоне частот и максимальному прохождению в другом диапазоне частот.

Исследователя в первую очередь интересует каких предельных возможностей по управлению энергетикой волновых процессов различной физической природы (электромагнитных, акустических, температурных, упругих) можно достичь на основе направленного выбора структуры неоднородной среды. От решения этой проблемы зависит не только эффективность функционирования различных устройств, связанных с преобразованием волновой энергии, но и расширение возможностей эффективного применения преобразователей волновой энергии в новых областях физики и техники.

Создание конструкций с уникальными свойствами необходимо связано с эффективным исследованием их предельных возможностей. Предельные возможности соответствуют тому предельному уровню, которого можно достичь на основе направленного управления структурой неоднородной конструкции.

Наиболее общим подходом к исследованию задач оптимального проектирования конструкций различного назначения является вариационный. В вариационной постановке задачи оптимального проектирования конструкций различного назначения могут быть сформулированы как задачи оптимального управления специальной структуры. При этом проблема исследования предельных возможностей сводится к проблеме построения всех решений, доставляющих глобальный минимум функционалу качества, характеризующему меру близости функциональных характеристик проектируемой конструкции к требуемым.

В настоящее время отсутствуют методологические основы, позволяющие достоверно находить глобальный экстремум функционалов даже в относительно простых задачах синтеза. В многоэкстремальных задачах оптимального проектирования, к каковым относятся волновые задачи оптимального синтеза, ограничены возможности предсказания поведения целевого функционала. Локального же предсказания поведения целевого функционала недостаточно для построения эффективных процедур поиска глобально-оптимального решения.

Была выдвинута гипотеза, что взаимосвязь параметров в неоднородных структурах, реализующих предельные возможности по преобразованию энергетического спектра волновых процессов различной физической природы (электромагнитных, акустических, температурных, упругих) может обладать уникальными качественными закономерностями, выделяющими их из множества остальных вариантов. Априорное знание таких качественных закономерностей позволило бы существенно уменьшить размерность исходной задачи оптимального синтеза и упростить ее структуру, что открывает новые возможности в создании эффективных методов исследования предельных возможностей композиционных конструкций.

2. В работах [1, 2] для случаев наклонного падения электромагнитных волн на систему магнитодиэлектрических слоев, а также наклонного падения акустических волн на систему слоев, в которых сдвиговые волны не распространяются, установлены качественные закономерности структуры оптимального решения. В частности, установлено, что взаимосвязь параметров в структурах, реализующих предельные возможности, обладает определенным внутренним порядком, определенной внутренней симметрией, что позволяет эффективно выделять полную совокупность вариантов, реализующих предельные возможности для таких задач. При этом взаимосвязи параметров в оптимальных структурах как при воздействии электромагнитных, так и акустических волн присущ один и тот же тип внутреннего порядка, внутренней симметрии.

Знание таких качественных закономерностей имеет существенное как теоретическое, так и практическое значение [2, 4–9].

Возникает вопрос, сохраняется ли установленный тип симметрии, порядка во взаимосвязи параметров в оптимальных структурах и при переходе к волновым задачам синтеза, описываемым более сложными моделями, в частности, когда возможно преобразование различных типов волн на границах раздела.

Пусть между двумя полупространствами расположен выбор упругих слоев с различными физическими свойствами. Существование в упругой среде продольных и поперечных волн приводит к гораздо более сложной интерференционной картине. По сравнению с рассмотренными ранее случаями [1, 2], значительное усложнение явления интерференции связано прежде всего с возможностью взаимного преобразования двух типов волн на границе раздела.

Пусть требуется сконструировать многослойную структуру, которая реализовывала бы предельные возможности по гашению упругих волн в заданном диапазоне частот $[\omega_{min}, \omega_{max}]$. Полупространства, окаймляющие систему слоев, будем считать идеальными жидкостями. Разработка эффективных методов исследования предельных возможностей для таких задач имеет важное значение для таких областей, как ультразвуковая техника, акустоэлектроника, дефектоскопия, сейсмология, виброизоляция и др.

Распространение упругой волны в системе упругих слоев описывается системой динамических уравнений упругости:

$$\mu_s \Delta u_s + (\lambda_s + 2\mu_s)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u_s = \rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2},\ (s = 1,\ldots,N) \tag{2.1}$$

Здесь $u_s(x, y, z, t)$ – вектор смещения частиц в s-й среде, ρ_s – плотность s-го слоя; λ_s, μ_s – параметры Ламэ s-го слоя; N – число слоев. Векторное поле смещений допускает представление в виде суперпозиции двух полей [3]:

$$u_s = \mathrm{grad}\ \Phi_s + \mathrm{rot}\ P_s \tag{2.2}$$

Здесь Φ_s, P_s – скалярный и векторный потенциалы волнового поля. Плоская волна общего вида может быть представлена в виде суперпозиции плоских гармонических волн, т.е. может быть представлена в виде интеграла Фурье:

$$\Phi_s(x,y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(z,\omega)\exp(i\Delta_0 x + i\Delta_0 y - i\omega t)d\omega$$

$$P_s(x,y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(z,\omega)\exp(i\Delta_0 x + i\Delta_0 y - i\omega t)d\omega \tag{2.3}$$

Здесь $\Delta_0 = k_0 \sin \vartheta_0$, $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число падающей волны, c_0 – скорость распространения волны в первом полупространстве, ϑ_0 – угол падения упругой волны. Тогда задача о распространении упругой волны в системе упругих слоев может быть сведена к нахождению решения следующей краевой задачи относительно спектральных плотностей скалярного и векторного потенциалов:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 f_s(z,\omega)}{\partial z^2} + (k_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega)) f_s(z,\omega) = 0 \\
\frac{\partial^2 g_s(z,\omega)}{\partial z^2} + (\gamma_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega)) g_s(z,\omega) = 0 \\
b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s\ (s = 1,\ \ldots,\ N) \\
f_s(b_{s-1},\omega) = \Phi_1^s f_{s-1}(b_{s-1},\omega) + i\Phi_2^s \frac{\partial g_{s-1}(b_{s-1},\omega)}{\partial z} \\
g_s(b_{s-1},\omega) = \Phi_1^s g_{s-1}(b_{s-1},\omega) - i\Phi_2^s \frac{\partial f_{s-1}(b_{s-1},\omega)}{\partial z} \\
\frac{\partial f_s(b_{s-1},\omega)}{\partial z} = Q_1^s \frac{\partial f_{s-1}(b_{s-1},\omega)}{\partial z} + iQ_2^s g_{s-1}(b_{s-1},\omega) \\
\frac{\partial g_s(b_{s-1},\omega)}{\partial z} = Q_1^s \frac{\partial g_{s-1}(b_{s-1},\omega)}{\partial z} - iQ_2^s f_{s-1}(b_{s-1},\omega)\ (s = 2,\ldots,N) \\
\frac{\partial f_0(0,\omega)}{\partial z} = -i\cos\vartheta_0 \left[k_0 f_0(0,\omega) + \frac{2}{k_0 \rho_0 c_0^2} \right] \\
\frac{\partial f_{N+1}(l,\omega)}{\partial z} = ik_{N+1}\cos\vartheta_{N+1} f_{N+1}(l,\omega)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

В этих обозначениях

$$\Phi_1^s = \frac{\mu_{s-1}\gamma_{s-1}^2 + 2\Delta_0^2(\mu_s - \mu_{s-1})}{\mu_s\gamma_s^2}, \quad \Phi_2^s = \frac{2\Delta_0(\mu_s - \mu_{s-1})}{\mu_s\gamma_s^2}$$

$$Q_1^s = \frac{\mu_s\gamma_s^2 - 2\Delta_0^2(\mu_s - \mu_{s-1})}{\mu_s\gamma_s^2}, \quad Q_2^s = \Delta_0 \frac{\mu_s\gamma_s^2 - \mu_{s-1}\gamma_{s-1}^2 - 2\Delta_0^2(\mu_s - \mu_{s-1})}{\mu_s\gamma_s^2}$$

$(s = 2, \ldots, N)$

Здесь $k_s = \omega/c_s$ – волновое число продольной волны в s-м слое, c_s – скорость распространения продольной волны в s-м слое, $\gamma_s = \omega/d_s$ – волновое число сдвиговой волны в s-м слое, b_s ($s = \overline{0, N}$) – координаты границ раздела слоев с различными физическими свойствами.

Пусть задан дискретный набор материалов, которые могут участвовать в проектировании. На дискретном наборе материалов физические свойства материалов не будут являться независимыми, а будут связаны между собой некоторыми функциональными зависимостями. Выберем в качестве независимого физического свойства плотность материала ρ, тогда скорости распространения продольных и поперечных волн в материале будут связаны с его плотностью некоторыми функциональными зависимостями: $c = c(\rho)$, $d = d(\rho)$, позволяющими однозначно восстановить скорость распространения продольных и поперечных волн в материалах допустимого набора по их плотностям. Обозначим через Λ множество плотностей материалов допустимого набора:

$$\Lambda = \{\rho_{\min} = \rho^1 < \rho^2 < \rho^3 < \ldots < \rho^m = \rho_{\max}\}$$

Требуется так подобрать физические свойства материалов слоев ρ_s ($s = 1, \ldots, N$), толщины слоев $\Delta_s^* = b_s^* - b_{s-1}^*$ ($s = 1, \ldots, N^*$), число слоев N^*, а также порядок их взаимного расположения, чтобы зависимость энергетического коэффициента пропускания проектируемой структуры $T(\omega)$ была наиболее близка к требуемой зависимости $\tilde{T}(\omega)$. В математической постановке задача заключается в минимизации критерия качества:

$$J = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \tau(\omega)[T(\omega) - \tilde{T}(\omega)]^2 d\omega \tag{2.5}$$

на решениях системы (2.4), здесь $\tau(\omega)$ $(0 \leqslant \tau(\omega) \leqslant 1)$ весовая функция. Направленным выбором весовой функции можно добиться лучшего приближения требуемой зависимости $\tilde{T}(\omega)$ на отдельных участках частотного интервала $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$:

$$T(\omega) = \frac{c_0\rho_0 \cos\vartheta_{N+1}}{c_{N+1}\rho_{N+1}\cos\vartheta_0} \,|\, f_{N+1}(l, \omega)\,|^2$$

3. Задача (2.4), (2.5) относится к числу задач оптимального управления составными системами комбинаторного типа, которые изучались в [2]. В [2] были сформулированы необходимые условия оптимальности для составных систем с такой структурой. При этом аналогом функций Гамильтона [10] являются функции R_s [2], которые для задачи оптимального управления (2.4), (2.5) представимы в виде

$$R_s(;\rho)|_z = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \sum_{i=1}^{8} \alpha_s^i(z,\omega) G_s^i(\omega;\rho) d\omega$$

$$b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s \; (s = 1, \ldots, N) \tag{3.1}$$

В этих обозначениях функции $\alpha_s^i(z,\omega)$ $(i = 1,\ldots,8)$ выражаются через решение $f_s(z, \omega)$,

$g_s(z,\omega)$ ($b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s$, $s = 1,\dots, N$) исходной (2.4) и решение $\psi_s(z,\omega)$, $p_s(z,\omega)$ ($b_{s-1} \leqslant$ $\leqslant z \leqslant b_s$, $s = 1,\dots, N$) сопряженной к (2.4) систем [2]:

$$\alpha_s^1(z,\omega) = \mathrm{Im}\frac{\partial p_s(z,\omega)}{\partial z} f_s(z,\omega),\ \ \alpha_s^2(z,\omega) = \mathrm{Im}\frac{\partial f_s(z,\omega)}{\partial z} p_s(z,\omega)$$

$$\alpha_s^3(z,\omega) = \mathrm{Im}\frac{\partial q_s(z,\omega)}{\partial z} g_s(z,\omega),\ \ \alpha_s^4(z,\omega) = \mathrm{Im}\frac{\partial g_s(z,\omega)}{\partial z} q_s(z,\omega)$$

$$\alpha_s^5(z,\omega) = \mathrm{Re}\, f_s(z,\omega) q_s(z,\omega), \alpha_s^6(z,\omega) = \mathrm{Re}\frac{\partial f_s(z,\omega)}{\partial z}\frac{\partial q_s(z,\omega)}{\partial z}$$

$$\alpha_s^7(z,\omega) = \mathrm{Re}\, p_s(z,\omega) g_s(z,\omega),\ \ \alpha_s^8(z,\omega) = \mathrm{Re}\frac{\partial p_s(z,\omega)}{\partial z}\frac{\partial g_s(z,\omega)}{\partial z} \qquad (3.2)$$

Функции $G_s^i(\omega;\rho)$ являются аналитическими функциями ρ и имеют вид:

$$G_s^1(\omega;\rho) = \frac{\omega}{\gamma_s^2(\omega) - 2\Delta_0^2(\omega)}\left\{-\gamma_s^2(\omega)\left(\frac{\rho_s d_s^2(\omega)}{\rho c^2(\rho)}\gamma_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega)\right) + \right.$$

$$+\gamma_s^2(\omega)\Delta_0^2(\omega)\left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) + 4\gamma_s^2(\omega)\Delta_0^2(\omega)\left(\frac{\rho_s d_s^2(\omega)}{\rho c^2(\rho)} - \frac{d^2(\rho)}{c^2(\rho)}\right) +$$

$$\left. + 4\Delta_0^4(\omega)\left(\frac{\rho d^2(\rho)}{\rho_s d_s^2} - 1 - \frac{\rho d^2(\rho)}{\rho_s d_s^2}\frac{d^2(\rho)}{c^2(\rho)} - \frac{\rho_s d_s^2}{\rho c^2(\rho)} + 2\frac{d^2(\rho)}{c^2(\rho)}\right)\right\}$$

$$G_s^2(\omega;\rho) = \frac{\omega(k_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega))}{\gamma_s^2(\omega) - 2\Delta_0^2(\omega)}\left\{4\Delta_0^2(\omega)\left(\frac{\rho_s d_s^2}{\rho d^2(\rho)} - 1\right) + \frac{\rho}{\rho_s}\gamma_s^2(\omega)\right\}$$

$$G_s^3(\omega;\rho) = \omega\left\{\frac{\rho_s d_s^2(\gamma_s^2(\omega) - 2\Delta_0^2(\omega)}{\rho d^2(\rho)} + \frac{\Delta_0^2(\omega)\gamma_s^2(\omega)\rho}{\rho_s(\gamma_s^2(\omega) - 2\Delta_0^2(\omega)} + 2\Delta_0^2(\omega)\right\}$$

$$G_s^4(\omega;\rho) = \frac{\omega(\gamma_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega))}{(\gamma_s^2(\omega) - 2\Delta_0^2(\omega))}\left\{-\frac{\rho\gamma_s^2(\omega)}{\rho_s} + 4\Delta_0^2(\omega)\left[\frac{\rho d^2(\rho) - \rho_s d_s^2}{\rho c^2(\rho)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(1 - \frac{d^2(\rho)}{c^2(\rho)}\right)\left(\frac{\rho d^2(\rho)}{\rho_s d_s^2} - \right)\right]\right\} \qquad (3.3)$$

$$G_s^5(\omega;\rho) = \frac{\omega\Delta_0(\omega)(\gamma_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega))}{\gamma_s^2(\omega) - 2\Delta_0^2(\omega)}\left\{-\gamma_s^2(\omega)\left[\frac{\rho}{\rho_s} - 1 + \frac{2(\rho d^2(\rho) - \rho_s d_s^2}{\rho c^2(\rho)}\right] + \right.$$

$$\left. + 4\Delta_0^2(\omega)\left[1 - \frac{\rho d^2(\rho)}{\rho_s d_s^2} + \frac{\rho_s d_s^2}{\rho c^2(\rho)} + \frac{d^2(\rho)}{c^2(\rho)}\left(\frac{\rho d^2(\rho)}{\rho_s d_s^2} - 2\right)\right]\right\}$$

$$G_s^6(\omega;\rho) = \omega\Delta_0(\omega)\left\{-2\frac{\mu_s}{\mu(\rho)} - \frac{\rho\gamma_s^2(\omega) - 2\Delta_0^2(\omega)\rho_s}{\rho_s(\gamma_s^2(\omega) - 2\Delta_0^2(\omega))} - 1\right\}$$

$$G_s^7(\omega;\rho) = \omega\Delta_0(\omega)(k_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega))\left\{-2\frac{\mu_s}{\mu(\rho)} + \frac{\rho\gamma_s^2(\omega) - 2\Delta_0^2(\omega)\rho_s}{\rho_s(\gamma_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega))} + 1\right\}$$

$$G_s^8(\omega;\rho) = \frac{\omega\Delta_0(\omega)}{\gamma_s^2(\omega) - 2\Delta_0^2(\omega)}\left\{-\gamma_s^2(\omega)\left[\frac{\rho d^2(\rho)}{\rho_s d_s^2} - 1 + 2\frac{d^2(\rho)}{c^2(\rho)} - \frac{\rho d^2(\rho)}{\rho_s d_s^2}\frac{d^2(\rho)}{c^2(\rho)} - \frac{\rho_s d_s^2}{\rho c^2(\rho)}\right]\right\}$$

Можно показать, что функции $\alpha_s^i(z,\omega)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^3\alpha_s^i(z,\omega)}{\partial z^3}+4k_s^2(\omega)\frac{\partial\alpha_s^i(z,\omega)}{\partial z}=0 \quad (i=1,\ldots,4)$$

$$\frac{\partial^4\alpha_s^i(z,\omega)}{\partial z^4}+2(k_s^2(\omega)+\gamma_s^2(\omega)-2\Delta_0^2(\omega))\frac{\partial^2\alpha_s^i(z,\omega)}{\partial z^2}+(k_s^2(\omega)-\gamma_s^2(\omega))\alpha_s^i(z,\omega)=0$$

$$b_{s-1}\leqslant z\leqslant b_s,\ s=1,\ \ldots,\ N\ (i=5,\ \ldots,\ 8) \qquad (3.4)$$

Пусть N^* – оптимальное число слоев, $\rho_s^*\ (s=1,\ldots,N^*)$ – оптимальные физические параметры материалов слоев, $b_s^*\ (s=1,\ldots,N^*-1)$ – оптимальные координаты границ раздела слоев.

Тогда на оптимальном решении выполняется следующее условие

$$R_s(*;\rho_s^*)\,|_z=\max_{\rho\in\Lambda} R_s(*;\rho),\quad b_{s-1}^*\leqslant z\leqslant b_s^*\quad (s=1,\ldots,N^*) \qquad (3.5)$$

(Пропущенные аргументы у функций R_s подсчитываются на оптимальном решении.)

Исследуем вопрос о возможности существования качественных закономерностей структуры оптимальных решений в задачах оптимального синтеза вида (2.4), (2.5). Будем рассматривать наиболее интересный как в теоретическом, так и прикладном аспектах случай, когда требуемая зависимость $\tilde{T}(\omega)$ такова, что для каждого значения частоты $\omega\in[\omega_{\min},\ \omega_{\max}]$, значение $\tilde{T}(\omega)$ является предельно достижимым значением. То есть требуемая зависимость $\tilde{T}(\omega)$ может принимать только два значения: либо 0 (должно быть полное отражение), либо 1 (должно быть полное пропускание).

К рассматриваемому типу относятся следующие классы задач:

задачи оптимального синтеза, в которых требуется обеспечить максимальное гашение упругой волны в заданном диапазоне частот $[\omega_{\min},\ \omega_{\max}]$;

задачи оптимального синтеза, в которых требуется обеспечить минимальное отражение упругой волны в заданном диапазоне частот $[\omega_{\min},\ \omega_{\max}]$;

задачи оптимального синтеза, в которых требуется обеспечить максимальное гашение упругой волны в одних участках спектра и минимальное отражение в других участках спектра.

4. Рассмотрим первоначально случай наклонного падения гармонической упругой волны с частотой ω на систему упругих слоев. Допустимый набор будем считать состоящим из двух материалов. Для рассматриваемого случая физические свойства материалов четных и нечетных слоев будут равны. С учетом структуры дифференциальных уравнений вида (3.4) для функций $\alpha_s^i(z,\omega)$ $(b_{s-1}\leqslant z\leqslant b_s, s=1,\ldots,N)$, входящих в состав функций $R_s(;\rho)$ (3.1), а также свойств решений исходной системы (2.4) можно найти связь между функциями $\alpha_s^i(z,\omega)$ для соседних слоев с одинаковыми физическими свойствами, то есть для слоев с номерами s и $s+2$. Такой конструктивный анализ дает возможность установить на оптимальном решении справедливость следующих равенств:

$$R_{s-2}(*;\rho)=R_s(*;\rho),\quad b_{s-3}^*\leqslant z\leqslant b_{s-2}^*\quad (s=4,\ldots,N^*-1) \qquad (4.1)$$

Поскольку на оптимальном решении функции R_s для внутренних слоев с одинаковыми физическими свойствами имеют одинаковую структуру, то расстояние между оптимальными координатами границ раздела слоев для рассматриваемых слоев также будет одинаковым. Отметим, что оптимальные координаты границ раздела слоев являются особыми точками для функций R_s, поскольку в этих точках максимальное значение функций R_s одновременно достигается на различных элементах множества Λ.

Поэтому из (4.1) непосредственно получаем

$$\Delta_s^* = \Delta_{s-2}^* (s = 4, \ldots, N^* - 1) \tag{4.2}$$

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть при наклонном падении гармонической упругой волны на систему упругих слоев допустимый набор состоит только из двух материалов. Тогда в оптимальной структуре внутренние слои с одинаковыми физическими свойствами имеют одинаковую толщину.

Очевидно, что данное утверждение справедливо и для случая, когда допустимый набор состоит более чем из двух материалов при условии, что в оптимальную конструкцию входит не более двух материалов допустимого набора.

Следствие. Пусть допустимый набор состоит более чем из двух материалов. Если в случае наклонного падения гармонической упругой волны на систему упругих слоев оптимальная конструкция состоит не более чем из двух материалов допустимого набора, то внутренние слои с одинаковыми физическими свойствами имеют одинаковую толщину.

Таким образом, во взаимосвязи параметров в оптимальной упругой системе существует внутренний порядок или внутренняя симметрия. Установленное свойство внутренней симметрии описывает закономерности внутренней взаимосвязи разнотипных групп параметров в оптимальной структуре: если физические свойства внутренних слоев оптимальной структуры одинаковы $\rho_s^* = \rho_{s-2}^* (s = 4, \ldots, N^* - 1)$, то одинаковы и их толщины $\Delta_s^* = \Delta_{s-2}^* (s = 4, \ldots, N^* - 1)$. Установленное свойство внутренней симметрии в оптимальных структурах позволяет существенно уменьшить размерность исходной задачи синтеза и свести многопараметрическую задачу синтеза, размерность которой определяется общим числом слоев оптимальной структуры, к трехпараметрической. Независимыми тремя варьируемыми параметрами являются толщины внутренних слоев с различными физическими свойствами и толщина одного из граничных слоев. Следовательно, для рассматриваемого случая может быть эффективно выделена полная совокупность параметров, реализующих предельные возможности.

5. Вернемся к рассмотрению общего случая наклонного падения немонохроматической упругой волны на систему упругих слоев. Задачу оптимального синтеза (2.4), (2.5) будем рассматривать при дополнительном предположении, что при некоторой частоте $\omega = \omega^* \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ значение энергетического коэффициента пропускания проектируемой структуры $T(\omega)$ должно быть предельно достижимым, т.е.:

$$T(\omega^*) = T_{\omega^*}^* (\omega^*) \tag{5.1}$$

где $T_{\omega^*}^* (\omega^*)$ – предельно достижимое значение энергетического коэффициента пропускания при частоте $\omega = \omega^*$.

Очевидно, что наиболее близким к требуемому при частоте $\omega = \omega^*$ значение коэффициента пропускания будет для случая гармонического воздействия с этой частотой. Поэтому множество глобально-оптимальных решений в задаче оптимального синтеза (2.4), (2.5) при дополнительном условии вида (5.1) будет являться подмножеством глобально-оптимальных решений для случая гармонического воздействия с частотой $\omega = \omega^*$.

Поэтому для рассматриваемого случая структура оптимальных решений обладает теми же качественными закономерностями, что и для случая гармонических воздействий.

Таким образом и для более общего случая наклонного падения упругих волн на систему упругих слоев, взаимосвязь параметров в структурах, реализующих предельные возможности, обладает теми же качественными закономерностями, в частности, обладает тем же типом внутренней симметрии, что и для рассмотренных ранее случаев электромагнитных и акустических волн [2].

Таким образом для рассмотренных выше случаев поставленная задача оптимального синтеза может быть полностью решена, то есть эффективно может быть выделена полная совокупность вариантов слоистых структур, реализующих предельные возможности.

Введем три функциональные зависимости: $\rho(z)$, $c(z)$ и $d(z)$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$; $\rho(z)$ есть распределение плотности по толщине конструкции; $\rho(z) = \rho_s$ $(b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s,\ s = 1,\ldots, N)$ $c(z)$ есть распределение скорости распределения продольных волн по толщине конструкции; $c(z) = c_s$ $(b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s,\ s = 1, \ldots, N)$, $d(z)$ есть распределение скорости сдвиговых волн по толщине конструкции $d(z) = d_s$ $(b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s,\ s = 1, \ldots, N)$. Введем вектор-функцию $u(z) = (\rho(z), c(z), d(z))$ $(0 \leqslant z \leqslant l)$. Вектор-функция $u^*(z)$ характеризует распределение физических свойств вдоль направления стратификации слоистой среды. Обозначим $\tau = \Delta_2^* + \Delta_3^*$. Тогда из утверждения 1 следует, что на оптимальном решении выполняется условие

$$u^*(z+\tau) = u^*(z) \ (b_1^* \leqslant z \leqslant b_{N^*-1}^* - \tau)$$

Таким образом, функциональная зависимость, описывающая оптимальное распределение физических свойств вдоль направления стратификации слоистой среды есть периодическая функция с периодом τ. Следовательно, для того чтобы неоднородная среда, взаимодействующая с волновым процессом, реализовывала предельные возможности по преобразованию данного волнового процесса, оказывала максимально предельное влияние на данный волновой процесс, необходимо, чтобы неоднородная среда имела периодическую структуру, т.е. определенный элемент неоднородности в данной неоднородной среде периодически повторялся бы вдоль направления стратификации среды. Следовательно предельные возможности по управлению энергетическими характеристиками упругой волны, в частности по максимальному гашению энергии упругой волны, при определенных условиях реализуются только на периодических структурах. При этом такой вывод справедлив для волновых процессов различной физической природы (электромагнитных, акустических, упругих). Определенное усложнение математической модели не приводит к нарушению такого рода закономерностей. Знание таких свойств оптимальных структур существенно облегчает решение широкого круга задач оптимального проектирования композиционных конструкций, реализующих предельные возможности при волновых воздействиях.

Проведенный анализ позволяет заключить, что необходимые условия оптимальности (3.5) несут в себе существенную информацию о структуре оптимальной конструкции. При этом несмотря на значительную сложность структуры функций Гамильтона для исследуемой задачи оптимального синтеза (2.4)–(2.5), тем не менее на основе конструктивного анализа их структуры удается выявить качественную структуру оптимального решения.

6. Если допустимый набор состоит из двух материалов, то в случае наклонного падения гармонической упругой волны на систему упругих слоев в оптимальной структуре проявляется свойство внутренней периодичности. Функциональная зависимость, характеризующая распределение физических свойств вдоль направления стратификации неоднородной среды, на оптимальном решении является периодической функцией. Данное свойство справедливо и для случая наклонного падения немонохроматической упругой волны на систему упругих слоев при дополнительном предположении вида (5.1).

Знание свойства периодичности оптимальной структуры неоднородной среды позволяет для рассмотренных выше случаев полностью решить проблему оптимального синтеза, то есть эффективно выделить всю совокупность вариантов, реализующих предельные возможности.

Таким образом, свойство периодичности оптимальной структуры неоднородной среды, установленное ранее для случая электромагнитных и акустических волн [2, 4], оказывается имеет достаточно общий характер и справедливо для волновых процессов, взаимодействие которых с неоднородными структурами описывается более сложными моделями, чем рассмотренные ранее в [2, 4]. В частности, оно справедливо и для случая наклонного падения упругих волн на систему упругих слоев, в которых могут возникать сдвиговые волны.

Установленные закономерности могут быть использованы и для исследования общего случая наклонного падения немонохроматических упругих волн на систему упругих слоев без введения каких-либо предположений вида (5.1). В этом случае предварительный поиск на подмножестве вариантов, выделенном установленными закономерностями, может позволить находить эффективные решения, которые могут служить достаточно хорошими начальными приближениями к оптимальному решению исходной задачи синтеза (2.4), (2.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гусев Е.Л.* Априорные оценки в задачах синтеза многослойных структур при воздействии волн: Препринт Якутск: ЯФ СО АН СССР, 1990. 52 с.
2. *Гусев Е.Л.* Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука, 1993. 268 с.
3. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
4. *Гусев Е.Л.* Качественные закономерности взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 3. С. 324–326.
5. *Гусев Е.Л.* Об априорном сужении допустимого набора материалов в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 3. С. 329–331.
6. *Гусев Е.Л.* Качественные закономерности оптимальной структуры конструкций в задачах оптимального синтеза акустических систем // Акуст. ж. 1997. Т. 43. № 5. С. 705–708.
7. *Gusev E.L.* Narrowing of the region of search in problems of optimal synthesis of layered structures with a set of properties // J. Appl. Mech. and Techn. Phys. 1997. V. 38. № 5. P. 768–773.
8. *Гусев Е.Л.* Свойство внутренней симметрии во взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур при волновых воздействиях // Тр. Междунар. конф. "Симметрия в естествознании". Красноярск, 1998. С. 47–48.
9. *Гусев Е.Л.* Качественные закономерности взаимосвязи параметров в слоистых структурах, реализующих предельные возможности // Акуст. ж. 1999. Т. 45. № 4. С. 499–503.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

Якутск

Поступила в редакцию
28.12.1999