МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2002

УДК 539.3

© 2002 г. В.Ф. АСТАПОВ, А.А. МАРКИН, М.Ю. СОКОЛОВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ИЗ ОПЫТОВ НА СПЛОШНЫХ ЦИЛИНДРАХ

Экспериментально обнаруженным проявлением нелинейности в поведении материалов является эффект Пойнтинга, заключающийся в изменении длины и наружного диаметра проволоки при кручении. Для выявления природы этого явления рассмотрены определяющие соотношения для изотропного упругого материала, учитывающие дилатационные явления и возможное отклонение свойств материалов от частного постулата изотропии А.А. Ильюшина. Построена математическая модель поведения сплошного цилиндра при комбинированном нагружении его осевой силой и крутящим моментом, исследование которой показало, что эффект Пойнтинга можно описать с помощью простейшей модели поведения материала, учитывающей геометрическую нелинейность.

Изучена возможность использования сплошных цилиндров в качестве экспериментальных образцов в опытах на совместное растяжение с кручением при конечных деформациях. Показано, что входящие в определяющие соотношения материальные константы можно найти из двух опытов – на растяжение и на кручение сплошного цилиндра с неподвижными торцами.

1. Формулировка общего варианта определяющих соотношений. Существуют различные варианты описания эффекта Пойнтинга для различных классов материалов. Этот эффект можно объяснить влиянием интенсивности формоизменения на гидростатическое напряжение при сохранении гипотезы о совпадении фаз деформаций и напряжений. В этом случае проявление эффекта Пойнтинга связывается исключительно с дилатацией, тем более, что в опытах Вертгейма и Пойнтинга фиксировалось изменение объема при кручении [1]. Другой подход к описанию этих нелинейных явлений заключается в отказе от гипотезы о соосности тензоров напряжений и деформаций, известной еще и как частный постулат изотропии А.А. Ильюшина [2].

В работе [3] предложен общий вариант соотношений, определяющих свойства изотропного упругого материала при конечных деформациях. Этот вариант соотношений позволяет описывать поведение материала, обладающего дилатацией, и не использует гипотезу о соосности тензоров напряжений и деформаций. Он связывает "левый" обобщенный тензор истинных напряжений $\boldsymbol{\sigma}_R$ с тензором деформации Генки $\mathbf{H}$. Такая пара мер напряжений и деформаций выбрана ввиду их энергетической сопряженности и возможности даже для конечных деформаций использовать первый инвариант меры Генки для характеристики изменения объема $\ln dV/dV_0 = \theta = \mathbf{H} \cdot\cdot\, \mathbf{E}$, а девиатор этой меры $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{E}$ – для характеристики формоизменения.

Определяющие соотношения построены в изображающем пространстве А.А. Ильюшина [2], в котором изменению напряженно-деформированного состояния материала ставится в соответствие образ процесса. Если процесс не сопровождается поворотом главных осей деформации относительно материальных волокон, то его образ является трехмерным.

В пространстве А.А. Ильюшина с декартовым базисом $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ тензору Генки ставится в соответствие вектор деформации $\mathbf{k}$ и вектор формоизменения $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{k} = \theta\mathbf{a}_0 + \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = h_1\mathbf{a}_1 + h_2\mathbf{a}_2, \quad h^2 = \tilde{\mathbf{H}}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{H}}, \quad k^2 = \theta^2 + h^2$$

Процесс нагружения представляется вектором нагружения $\boldsymbol{\sigma}$ и вектором интенсивности напряжений $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0\mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \tau_1\mathbf{a}_1 + \tau_2\mathbf{a}_2, \quad \sigma_0 = \tfrac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_R\cdot\cdot\mathbf{E}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_R = \boldsymbol{\sigma}_R - \sigma_0\mathbf{E}, \quad \tau^2 = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_R\cdot\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_R$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}_R = \mathbf{R}\cdot e^{\theta}\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}^{-1}$ – "левый" обобщенный тензор истинных напряжений, $\mathbf{S}$ – тензор истинных напряжений Коши, $\mathbf{R}$ – ортогональный тензор, входящий в полярное разложение аффинора деформаций $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{R} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{V} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ – левый и правый тензоры искажения.

Мера Генки определяется через левый тензор искажения

$$\mathbf{H} = \ln\mathbf{U} \tag{1.2}$$

В пространстве А.А. Ильюшина наряду с декартовым базисом вводится естественный косоугольный базис $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{q}$, в котором вектор $\mathbf{q}$ является образом тензора-девиатора $\tilde{\mathbf{Q}}$, определяемого из выражения $\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{H}}^2 - \tfrac{1}{3}h^2\mathbf{E}$. Модуль и ориентация вектора $\mathbf{q}$ в плоскости $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ определяются соотношениями $|\mathbf{q}| = h^2/\sqrt{6}$, $\mathbf{h}\cdot\mathbf{q}/|\mathbf{h}||\mathbf{q}| = \cos 3\alpha$, $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{h}/|\mathbf{h}| = \cos\alpha$, где α – угол вида деформированного состояния (фаза деформации). Раскладывая вектор нагружения по векторам естественного базиса, получим общее уравнение состояния

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0(\theta, h, \alpha)\mathbf{a}_0 + \tau_h(\theta, h, \alpha)\mathbf{h} + \tau_q(\theta, h, \alpha)\mathbf{q} \tag{1.3}$$

Тогда напряженное состояние упругого изотропного материала полностью определено, если установлен вид трех скалярных функций σ_0, τ_h, τ_q от параметров состояния θ, h, α. Если ввести единичный вектор $\mathbf{n}$, ортогональный вектору $\mathbf{h}$, то соотношение (1.3) преобразуется к виду

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0\mathbf{a}_0 + \left(\tau_h + \frac{\tau_q}{\sqrt{6}}h\cos 3\alpha\right)\mathbf{h} + \frac{\tau_q}{\sqrt{6}}h^2\sin 3\alpha\,\mathbf{n} \tag{1.4}$$

Из соотношения (1.4) следуют два общих ограничения, связанные с изотропией материала:

(*1*) если деформация сводится только к объемному изменению, а $h \equiv 0$, то напряженное состояние может быть только гидростатическим. Если же деформация сводится только к формоизменению, а $\theta \equiv 0$, то возможно появление гидростатической составляющей напряжения;

(*2*) существует по крайней мере шесть видов деформированного состояния с фазами, кратными $\pi/3$, для которых векторы формоизменения и интенсивности напряжений соосны.

Кроме того, из соотношения (1.4) следует необходимое условие выполнения частного постулата изотропии А.А. Ильюшина. Так как для соблюдения этого постулата необходима соосность векторов формоизменения и интенсивности напряжений, то функция τ_q должна тождественно обращаться в ноль при выполнении частного постулата.

Выразим элементарную работу напряжений через приращения параметров состояния θ, h, α:

$$d'A = \sigma_0 d\theta + \left(\tau_h h + \frac{\tau_q}{\sqrt{6}} h^2 \cos 3\alpha\right) dh + \frac{\tau_q}{\sqrt{6}} h^3 \sin 3\alpha d\alpha \tag{1.5}$$

и постулируем существование упругого потенциала $W(\theta, h, \alpha)$. Тогда правая часть выражения (1.5) является полным дифференциалом потенциала, а параметры напряженного состояния определяются из следующей системы уравнений:

$$\sigma_0 = \frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad \tau_q = \sqrt{6}\frac{\partial W}{\partial \alpha}\frac{1}{h^3}\sin 3\alpha, \quad h\tau_h = \frac{\partial W}{\partial h} - \frac{\tau_q}{\sqrt{6}} h^2 \cos 3\alpha \tag{1.6}$$

Следствием существования упругого потенциала являются три условия совместности

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial h} = \frac{\partial h\tau_h}{\partial \theta} + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\partial \tau_q}{\partial \theta} h^2 \cos 3\alpha \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\partial \tau_q}{\partial \theta} h^3 \sin 3\alpha \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial h\tau_h}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\partial \tau_q}{\partial \alpha} h^2 \cos 3\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\partial \tau_q}{\partial h} h^3 \sin 3\alpha + \sqrt{6}\tau_q h^2 \sin 3\alpha \tag{1.9}$$

Из условий совместности (1.7)–(1.9) следует, что для потенциальных материалов требование $\tau_q \equiv 0$ приводит к независимости интенсивности напряжений τ и гидростатической составляющей σ_0 от фазы деформаций α.

Положим $\tau_q = m = \mathrm{const}$, тогда функции τ_h и σ_0 представляются в виде

$$\tau_h = 2G + G_1 h + G_2\theta - \sqrt{2/3}\, m h \cos 3\alpha \tag{1.10}$$

$$\sigma_0 = 3K\theta + 1/2\, G_2 h^2$$

где G, G_1, G_2, m, K – константы материала.

Соотношения (1.10) могут описывать дилатационные эффекты в материале (за счет константы G_2) и возможные отклонения свойств материала от частного постулата изотропии (за счет константы m). При малых деформациях определяющие соотношения (1.10) вырождаются в закон Гука.

Входящие в (1.10) материальные константы могут быть определены из двух опытов со сплошными цилиндрами: опыта на растяжение и опыта на кручение цилиндра с неподвижными торцами. Использование сплошных цилиндров в качестве образцов при экспериментальном изучении конечных деформаций обсуждалось в работе [4].

2. Сплошной цилиндр при комбинированном нагружении. Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния сплошного цилиндра при совместном нагружении его осевой силой P и крутящим моментом M.

Вызываемое такими нагрузками состояние оказывается неоднородным, поэтому возникает задача выражения напряжений и деформаций во внутренних точках цилиндра через параметры деформирования наружной поверхности образца, которые могут быть вычислены по результатам непосредственных измерений, а именно

$$\lambda_L = L/L_0, \quad \lambda_R = R/R_0, \quad \psi = (\varphi - \varphi_0)/L_0 \tag{2.1}$$

где L_0, L – длина образца в начальном и деформированном состояниях, R_0, R – радиус наружной поверхности образца в начальном и деформированном состояниях, $\varphi - \varphi_0$ – угол закручивания образца.

В эксперименте также измеряются лишь интегральные характеристики напряженного состояния: осевая сила

$$P = 2\pi \int_0^R S_{zz} \rho d\rho \tag{2.2}$$

и крутящий момент

$$M = 2\pi \int_0^R S_{\varphi z} \rho^2 d\rho \tag{2.3}$$

Задача состоит в том, чтобы связать измеряемые параметры (2.1)–(2.3) и указать возможность определять из этой связи константы, входящие в соотношения (1.10).

При описании деформаций во внутренних слоях цилиндра полагали

$$\rho = \rho(\rho_0, t), \quad z = \lambda_z(t) z_0, \quad \psi = \psi(t) = (\varphi - \varphi_0)/z_0 \tag{2.4}$$

где ρ_0, φ_0, z_0; ρ, φ, z – начальные и текущие цилиндрические координаты точек.

Для определения компонент меры Генки по соотношению (1.2) найден аффинор деформации $\mathbf{\Phi}$, соответствующий (2.4), и выполнено его полярное разложение (1.1). Задачу удалось существенно упростить, представив тензор поворота $\mathbf{R}$ как произведение двух ортогональных тензоров $\mathbf{Q}_z$ и $\mathbf{Q}_\rho$, определяющих вращения относительно оси цилиндра и радиальной оси цилиндрической системы координат соответственно: $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\rho \cdot \mathbf{Q}_z$. Диадные разложения тензоров $\mathbf{Q}_z$ и $\mathbf{Q}_\rho$ по базису цилиндрической системы координат имеют вид

$$\mathbf{Q}_z = \cos(\varphi - \varphi_0)(\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi) + \sin(\varphi - \varphi_0)(\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\rho) + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{Q}_\rho = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho + \cos\chi(\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) + \sin\chi(\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi)$$

Угол $\varphi - \varphi_0$ определяется функцией $\psi(t)$, а угол χ находится из условия симметрии тензора искажения, причем получено, что через функции (2.4) он определяется выражением $\operatorname{tg}\chi = -\rho\psi/(\lambda_\rho + \lambda_z)$, $\lambda_\rho = \rho/\rho_0$. Тензор искажения определяется через аффинор деформации и тензор R:

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}^{-1} = \frac{\partial\rho}{\partial\rho_0} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho + \lambda_\rho \cos\chi \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi - \lambda_\rho \sin\chi(\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi) + (\lambda_z \cos\chi - \rho\psi \sin\chi)\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$$

Определяя собственные значения и собственные векторы тензора $\mathbf{U}$, находим выражения для компонент тензора Генки через функции (2.4):

$$H_{\rho\rho} = \ln \frac{\partial\rho}{\partial\rho_0}$$

$$\begin{aligned} H_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} \ln \lambda_\rho \lambda_z - \frac{1}{2} \ln \frac{(\lambda_\rho + \lambda_z)^2 + (\rho\psi)^2 - \sqrt{(\lambda_\rho^2 - \lambda_z^2 - (\rho\psi)^2)^2 + 4(\rho\psi)^2 \lambda_\rho^2}}{(\lambda_\rho + \lambda_z)^2 + (\rho\psi)^2 + \sqrt{(\lambda_\rho^2 - \lambda_z^2 - (\rho\psi)^2)^2 + 4(\rho\psi)^2 \lambda_\rho^2}} \times \\ &\times \frac{\lambda_\rho^2 - \lambda_z^2 - (\rho\psi)^2}{\sqrt{(\lambda_\rho^2 - \lambda_z^2 - (\rho\psi)^2)^2 + 4(\rho\psi)^2 \lambda_\rho^2}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} H_{zz} &= \frac{1}{2} \ln \lambda_\rho \lambda_z + \frac{1}{2} \ln \frac{(\lambda_\rho + \lambda_z)^2 + (\rho\psi)^2 - \sqrt{(\lambda_\rho^2 - \lambda_z^2 - (\rho\psi)^2)^2 + 4(\rho\psi)^2 \lambda_\rho^2}}{(\lambda_\rho + \lambda_z)^2 + (\rho\psi)^2 + \sqrt{(\lambda_\rho^2 - \lambda_z^2 - (\rho\psi)^2)^2 + 4(\rho\psi)^2 \lambda_\rho^2}} \times \\ &\times \frac{\lambda_\rho^2 - \lambda_z^2 - (\rho\psi)^2}{\sqrt{(\lambda_\rho^2 - \lambda_z^2 - (\rho\psi)^2)^2 + 4(\rho\psi)^2 \lambda_\rho^2}} \end{aligned}$$

$$H_{\varphi z}=-\frac{1}{2}\ln\frac{(\lambda_\rho+\lambda_z)^2+(\rho\psi)^2-\sqrt{(\lambda_\rho^2-\lambda_z^2-(\rho\psi)^2)^2+4(\rho\psi)^2\lambda_\rho^2}}{(\lambda_\rho+\lambda_z)^2+(\rho\psi)^2+\sqrt{(\lambda_\rho^2-\lambda_z^2-(\rho\psi)^2)^2+4(\rho\psi)^2\lambda_\rho^2}}\times$$

$$\times\frac{2\rho\psi\lambda_\rho}{\sqrt{(\lambda_\rho^2-\lambda_z^2-(\rho\psi)^2)^2+4(\rho\psi)^2\lambda_\rho^2}}$$

Компоненты тензора Генки (2.5) использованы для определения компонент тензора $\boldsymbol{\sigma}_R$ из определяющих соотношений, которые могут быть записаны в тензорном виде

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_R=(2G+G_1h+G_2\theta-\sqrt{2/3}mh\cos3\alpha)\tilde{\mathbf{H}}+m\tilde{\mathbf{Q}} \tag{2.6}$$

$$\sigma_0=3K\theta+{}^1/_2G_2h^2 \tag{2.7}$$

По компонентам тензора $\boldsymbol{\sigma}_R=\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_R+\sigma_0\mathbf{E}$ определяются истинные напряжения в материале, характеризуемые тензором Коши $\mathbf{S}$. Рассматривая комбинированное нагружение сплошного цилиндра осевой силой и крутящим моментом, можно считать напряженное состояние осесимметричным и однородным по оси цилиндра. Тогда в условиях равновесия, записанных в цилиндрической системе координат, следует положить равными нулю производные $\partial/\partial\varphi$ и $\partial/\partial z$, считая, что напряжения зависят только от ρ. В этом случае уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial S_{\rho\rho}}{\partial\rho}+\frac{S_{\rho\rho}-S_{\varphi\varphi}}{\rho}=0,\quad \frac{\partial S_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+\frac{2S_{\rho\varphi}}{\rho}=0,\quad \frac{\partial S_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{S_{\rho z}}{\rho}=0 \tag{2.8}$$

Поскольку наружная поверхность цилиндра свободна от напряжений, последние два из уравнений (2.8) дают $S_{\rho\varphi}=S_{\rho z}=0$, а ненулевые компоненты $S_{\rho\rho}$, $S_{\varphi\varphi}$, S_{zz}, $S_{\varphi z}$, удовлетворяют первому из условий равновесия и условиям на границе

$$S_{\rho\rho}|_{\rho=R}=0 \tag{2.9}$$

Осевые напряжения S_{zz} и напряжения сдвига $S_{\varphi z}$ связаны с осевой силой и крутящим моментом соотношениями (2.2) и (2.3).

Первое из условий равновесия (2.8) с учетом определяющих соотношений (2.6) приводит к дифференциальному уравнению

$$-\frac{\partial\theta}{\partial\rho_0}\left(\frac{\sigma_0}{3}+\tau_h\tilde{H}_{\rho\rho}+m\tilde{Q}_{\rho\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_0}\left(\frac{\sigma_0}{3}+\tau_h\tilde{H}_{\rho\rho}+m\tilde{Q}_{\rho\rho}\right)+$$

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\rho_0}[\tau_h(\tilde{H}_{\rho\rho}-\tilde{H}_{\varphi\varphi}\cos^2\chi-\tilde{H}_{zz}\sin^2\chi+\tilde{H}_{\varphi z}\sin2\chi)+$$

$$+m(\tilde{Q}_{\rho\rho}-\tilde{Q}_{\varphi\varphi}\cos^2\chi-\tilde{Q}_{zz}\sin^2\chi+\tilde{Q}_{\varphi z}\sin2\chi)]=0 \tag{2.10}$$

Таким образом, полученная система уравнений (2.5)–(2.10) сводится к определению основной неизвестной функции $\rho=\rho(\rho_0,t)$. Параметры $\psi(t)$ и $\lambda_z(t)$ можно считать заданными и определяющими процесс внешнего деформирования. Определив $\rho(\rho_0,t)$, $\psi(t)$, $\lambda_z(t)$, можно найти распределение всех характеристик напряженно-деформированного состояния цилиндра во внутренних его точках, воспользовавшись соотношениями (2.5)–(2.7). При этом обеспечивается точное выполнение условий равновесия в произвольной точке цилиндра.

Наряду с заданием процесса внешнего деформирования можно задать процесс внешнего нагружения, определяемый параметрами $P(t)$ и $M(t)$. Подставляя определяющие соотношения (2.6) в выражения для осевой силы (2.2) и крутящего момента (2.3), получаем

$$P = 2\pi \frac{1}{\lambda_z} \int_0^R \left[\left(\frac{\sigma_0}{3} + \tau_h \tilde{H}_{\varphi\varphi} + m\tilde{Q}_{\varphi\varphi} \right) \sin^2 \chi + \left(\frac{\sigma_0}{3} + \tau_h \tilde{H}_{zz} + m\tilde{Q}_{zz} \right) \cos^2 \chi + \right.$$

$$\left. + (\tau_h \tilde{H}_{\varphi z} + m\tilde{Q}_{\varphi z}) \sin 2\chi \right] \rho_0 d\rho_0 \tag{2.11}$$

$$M = 2\pi \frac{1}{\lambda_z} \int_0^R \left[\frac{1}{2} \tau_h (\tilde{H}_{\varphi\varphi} - \tilde{H}_{zz}) \sin 2\chi + \frac{1}{2} m(\tilde{Q}_{\varphi\varphi} - \tilde{Q}_{zz}) \sin 2\chi + \right.$$

$$\left. + \tau_h \tilde{H}_{\varphi z} \cos 2\chi + m\tilde{Q}_{\varphi z} \cos 2\chi \right] \lambda_\rho \rho_0^2 d\rho_0 \tag{2.12}$$

В этом случае система уравнений (2.10)–(2.12) с учетом выражений (2.5) и соотношений (2.7) служит для отыскания неизвестных функций $\rho = \rho(\rho_0, t)$, $\lambda_z(t)$ и $\psi(t)$, по которым можно определить все характеристики напряженно-деформированного состояния во внутренних точках цилиндра.

Таким образом, получена система уравнений (2.5)–(2.12), решение которой представляет собой точное решение задачи об определении напряжений и деформаций во внутренних точках цилиндра при кручении с растяжением как при задании процесса внешнего деформирования, так и при задании внешнего нагружения, что соответствует различным типам экспериментальных машин.

3. Программа экспериментальной конкретизации определяющих соотношений. Получено приближенное решение задачи о кручении цилиндра с неподвижными торцами ($\lambda_z = 1$), на основе которого построена система уравнений для определения входящих в определяющие соотношения (2.6), (2.7) материальных констант.

Для функции $\rho = \rho(\rho_0, t)$ использовано разложение в ряд по монотонному параметру ψ, играющему роль времени

$$\rho(\rho_0, \psi) = \rho_0 + \psi R_1(\rho_0) + \psi^2 R_2(\rho_0) + \psi^3 R_3(\rho_0) + \ldots \tag{3.1}$$

где коэффициенты при степенях ψ зависят только от начального радиуса точки ρ_0. Разложение становится тем более точным, чем меньше относительный угол закручивания ψ.

Для входящих в уравнение (2.10) функций на основании (3.1) построены их асимптотические разложения по параметру ψ и получены дифференциальные уравнения для коэффициентов $R_1(\rho_0)$ и $R_2(\rho_0)$. Первое приближение уравнения (2.10) приводит к уравнению $R_1'' + R_1' / \rho_0 - R_1 / \rho_0^2 = 0$, общее решение которого имеет вид $R_1 = C_1^{(1)} \rho_0 + C_2^{(1)} / \rho_0$. Константа $C_2^{(1)} = 0$ в силу ограниченности функции R_1 при $\rho_0 = 0$. Константа $C_1^{(1)} = 0$ в соответствии с граничным условием (2.9). Таким образом, оказалось, что функция $R_1 = 0$. С учетом этого решения из второго приближения уравнения (2.10) получим дифференциальное уравнение для функции $R_2(\rho_0)$

$$R_2'' + \frac{R_2'}{\rho_0} - \frac{R_2}{\rho_0^2} = \frac{1}{4} \frac{6G + 7m - 2G_2}{3K + 4G} \rho_0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$R_2 = C_1^{(2)} \rho_0 + \frac{C_2^{(2)}}{\rho_0} + A\rho_0^3, \quad A = \frac{1}{128} \frac{6G + 7m - 2G_2}{3K + 4G}$$

причем $C_2^{(2)} = 0$ в силу ограниченности функции R_2 при $\rho_0 = 0$, а константа $C_1^{(2)}$ определяется из граничного условия (2.9), что дает

$$C_1^{(2)} = -\frac{R_0^2}{16} \frac{6G(6K + 5G) + 6G_2 G + 3m(6K + G)}{(6K + 2G)(3K + 4G)}$$

Если в разложении (3.1) ограничиться двумя первыми членами, то асимптотическое представление функции $\rho = \rho(\rho_0, \psi)$ имеет вид

$$\rho \approx \rho_0 + (C_1^{(2)}\rho_0 + A\rho_0^3)\psi^2 \tag{3.2}$$

Решение (3.2) позволило получить асимптотические представления для крутящего момента M, осевой силы P и относительного изменения наружного диаметра цилиндра λ_R:

$$\frac{M}{W_0} \approx 2G\phi + \frac{2}{5}\left(\frac{G_1}{\sqrt{2}} - G\right)\phi^2 + Y(G, G_1, G_2, m, K)\phi^3 \tag{3.3}$$

$$\frac{P}{S_0} \approx Z(G, G_2, m, K)\phi^2, \quad \lambda_R = \frac{R}{R_0} \approx 1 - X(G, G_2, m, K)\phi^2$$

$$X(G, G_2, m, K) = \frac{1}{16}\frac{6G + 2G_2 - m}{6K + 2G}$$

$$Y = -2G\frac{288K^2 + 320KG + 110G^2 - m(72K + 159G) + G_2(36K - 66G)}{24(6K + 2G)(3K + 4G)} - G_1\frac{1}{6\sqrt{2}} +$$

$$+\frac{m}{124416}\frac{2G + 7m - 2G_2}{3K + 4G} + \frac{G_2}{48}\frac{2G + 7m - 2G_2}{3K + 4G}$$

$$Z = -\frac{G}{8}\frac{6K - G}{3K + G} + \frac{m}{48}\frac{9K}{3K + G} + \frac{G_2}{8}\frac{G}{3K + G}$$

где $\phi = (\varphi - \varphi_0 / L_0)R_0$ – величина, характеризующая сдвиг на наружной поверхности цилиндра, $S_0 = \pi R_0^2$, $W_0 = \pi R_0^3 / 4$ – площадь и момент сопротивления сечения цилиндра.

Представления (3.3) показывают, что на величину крутящего момента в наибольшей степени влияет константа G, которая в линейной теории является модулем сдвига материала. Влияние константы G_1 имеет второй порядок малости, эта константа может описать нелинейность связи $M(\phi)$. Константы G_2 и m входят в выражение для момента лишь умноженные на ϕ^3, поэтому учет дилатационных эффектов и несоосности тензоров напряжений и деформаций в малой степени влияет на зависимость $M(\phi)$. Представления для осевой силы P и величины λ_R соответствуют экспериментальным данным и указывают на пропорциональность P и λ_R величине ϕ^2. Можно отметить, что даже при использовании значительно более простых определяющих соотношений вида $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_R = 2G\tilde{\mathbf{H}}$, $\sigma_0 = 3K\theta$, когда константы G_1, G_2, m положены равными нулю, удается описать эффект Пойнтинга. При этом возникающая осевая сила оказывается сжимающей, а радиус наружной поверхности уменьшается. Известны материалы, обладающие противоположными эффектами. Описание поведения таких материалов возможно за счет подбора значений констант G_2 и m. Кроме того, и дилатационные явления, и отклонения свойств материала от частного постулата изотропии совместно влияют на проявление эффекта Пойнтинга. Разделить влияние этих свойств возможно лишь при сравнении значений констант G_2 и m для каждого конкретного материала.

Интересен тот факт, что построенная модель кручения сплошного цилиндра с неподвижными торцами указывает на возникновение во внутренних слоях цилиндра самоуравновешенной системы радиальных и тангенциальных напряжений, величины которых также пропорциональны квадрату угла закручивания цилиндра.

Сохраняя в соотношениях (3.3) лишь слагаемые порядка ϕ^2, можно использовать их для обработки экспериментально полученных зависимостей $M(\phi)$, $P(\phi^2)$ и $\lambda_R(\phi^2)$. Из первой зависимости определяются константы G и G_1 при аппроксимации ее квадратной параболой. Две другие зависимости дают два уравнения для определения констант K, G_2, m. Третье, недостающее уравнение можно получить, обрабатывая результаты опыта на растяжение сплошного образца, когда растягивающая сила P_p связана с удлинением λ_L и изменением наружного радиуса λ_R соотношением

$$\frac{P_p}{S_0}=\frac{1}{\lambda_L}\left[K\ln\lambda_L\lambda_R^2+2G\frac{2}{3}\ln\frac{\lambda_L}{\lambda_R}+G_1\sqrt{6}\ln\lambda_R\ln\frac{\lambda_L}{\lambda_R}+\right.$$

$$\left.+G_2\left(\ln\lambda_L\lambda_R^2\cdot\frac{2}{3}\ln\frac{\lambda_L}{\lambda_R}+(\ln\lambda_R)^2\right)+m\left(2\ln\lambda_R\cdot\frac{2}{3}\ln\frac{\lambda_L}{\lambda_R}+\frac{4}{9}\left(\ln\frac{\lambda_L}{\lambda_R}\right)^2-2(\ln\lambda_R)^2\right)\right] \quad (3.4)$$

Таким образом, соотношения (3.3) и (3.4) позволяют провести конкретизацию определяющих соотношений (2.6), (2.7) и указывают программу экспериментов по определению входящих в них материальных констант.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-313).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
2. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
3. *Глаголева М.О., Маркин А.А., Матченко Н.М., Трещев А.А.* Свойства изотропных упругих материалов // Изв. Тульс. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 15–19.
4. *Васин Р.А., Ильюшин А.А., Моссаковский П.А.* Исследование определяющих соотношений и критериев разрушения на сплошных и толстостенных трубчатых цилиндрических образцах // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 177–184.

Тула

Поступила в редакцию
14.12.1999