МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2001

УДК 534.012

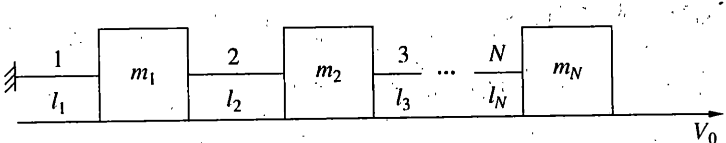
© 2001 г. Б.М. ЖИРНОВ

ОДНОЧАСТОТНЫЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ФРИКЦИОННО ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С N СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

На базе асимптотического метода Крылова–Боголюбова [1] в разработке В.П. Рубаника [2] проводится изучение и расчет динамических режимов томсоновского типа, допустимых в системе с конечным числом взаимосвязанных грузов, колеблющихся в условиях сухого трения скольжения на подвижном основании.

Укажем, что в работах [3–6] приведены результаты исследований для задач данного класса, полученные в рамках различных упрощенных постановок.

1. Формулировка основной задачи. Изучим механическую автоколебательную систему (фигура), представляющую собой цепочку из упруго связанных между собой тел массы m_i $(i=\overline{1,N})$, помещённых на плоское и шероховатое основание,



движущееся поступательно с некоторой постоянной скоростью V_0. Посредством 1-го упругого звена масса m_1 соединена с неподвижной точкой. При рассмотрении квазигармонических или, иначе, томсоновских колебаний, движение такой системы опишем следующими дифференциально-разностными уравнениями:

$$m_i\ddot{x}_i(t)+\varepsilon\Phi_i[z_i(t_i)]+\sum_{n=i}^{i+1}(-1)^{n-i}k_n[x_n(t)-x_{n-1}(t)]=0 \tag{1.1}$$

$$(i=\overline{1,N}, t_i=t+\tau_i, \tau_1=x_0(t)=k_{N+1}\equiv 0,\ 0<\varepsilon<1)$$

Здесь $x_i(t)$ – обобщенная координата i-ой колеблющейся массы; k_i – жесткость i-го соединительного звена, массой которого по сравнению с m_i пренебрегаем; $\Phi_i[z_i(t_i)]$ – нелинейная функция, описывающая силу сухого трения скольжения фрикционно контактирующей пары масса m_i – подвижное основание; $z_i(t_i)=V_0-\dot{x}_i(t_i)$ – относительная скорость перемещения m_i; τ_i – фактор запаздывания начала относительного движения массы m_l $(l=\overline{2,N})$ по сравнению с m_1, выбираемый постоянным и существенно малым по сравнению с периодом колебаний $T=2\pi/\omega_j$ невозмущенной системы, где ω_j – ее собственная частота.

Таким образом, в условиях идеально упругих соединительных связей предполагается, что силы сухого трения скольжения $\Phi_l(z_i)$ $(l=\overline{2,N})$ возникают с запаздыванием как по отношению к инерционным и восстанавливающим упругим силам, так и по отношению к $\Phi_1(z_1)$.

2. Постановка и решение вспомогательной задачи. Если в (1.1) положить $\varepsilon = 0$, то порождающая система уравнений

$$m_i\ddot{x}_i^{(0)}(t)+\sum_{n=i}^{i+1}(-1)^{n-i}k_n[x_n^{(0)}(t)-x_{n-1}^{(0)}(t)]=0 \tag{2.1}$$

опишет малые свободные колебания системы взаимодействующих масс около состояния устойчивого равновесия. Для каждого из ее нормальных колебаний частные решения системы (2.1) представимы в виде

$$x_i^{(0)}(t)=\varkappa_i^{(j)}a\cos\psi(t) \quad (i,j=\overline{1,N}) \tag{2.2}$$

где собственные формы $\varkappa_i^{(j)}$ и соответствующая им собственная частота ω_j подлежат определению; нормированные амплитуды $\varkappa_i^{(j)}a$ и сдвиг фаз φ постоянны, а полная фаза $\psi(t) = \omega_j t + \varphi$. Кроме этого, в соответствии с требованиями [1], полагаем, что единственным решением, отвечающим равновесию порождающей системы (2.1), является тривиальное решение $x_i^{(0)}(t)=0$ $(i=\overline{1,N})$ и что для каждого фиксированного j из $j=\overline{1,N}$ выполняется равенство $s\omega_j \neq \omega_r$ $(r\neq j \wedge r,s=\overline{1,N})$, т.е. в изучаемой системе отсутствует внутренний резонанс.

Если продифференцировать выражение (2.2) и подставить полученный результат, а также (2.2) в (2.1), то придем к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых собственных форм

$$-k_i\varkappa_{i-1}^{(j)}+K_{1ij}\varkappa_i^{(j)}-k_{i+1}\varkappa_{i+1}^{(j)}=0 \tag{2.3}$$

$$(i,j=\overline{1,N};K_{1ij}=k_i+k_{i+1}-1m_i\omega_j^2;\ \varkappa_0^{(j)}=k_{N+1}\equiv 0)$$

Необходимое и достаточное условие существования нетривиальных решений системы (2.3) имеет вид

$$\Delta_N=0 \tag{2.4}$$

где главный определитель Δ_N раскрывается по рекуррентному соотношению $\Delta_i=K_{1ij}\Delta_{i-1}-k_i^2\Delta_{i-2}$ $(i=N, N-1, \ldots, 1, \Delta_0=1)$.

Заметим, что если условие (2.4) рассматривать как алгебраическое уравнение N-й степени относительно ω^2, то нетрудно с помощью известных алгоритмов [7, 8] найти его точные или приближенные корни.

Далее, исходя из реальных физических предпосылок, допускаем существование для "векового уравнения" (2.4) хотя бы одного действительного положительного корня, а, значит, и отвечающего ему значения собственной частоты ω_j $(j=\overline{1,N})$.

Для отыскания неизвестных собственных форм, воспользуемся методикой [8] и для определенности положим, что в Δ_N не равен нулю, например, минор $M_{NN}=\Delta_{N-1}$ элемента K_{1Nj}. Тогда из первых $(N-1)$-го уравнения системы (2.3) выражаем $\varkappa_i$ через $\varkappa_N^{(j)}$ и получаем

$$\varkappa_i^{(j)}=\Delta\varkappa_i^{(j)}/\Delta_{N-1} \quad (i=\overline{1,N-1},\ j=\overline{1,N}) \tag{2.5}$$

Подставляя найденные собственные формы (2.5) в условие нормировки

$$\sum_{n=1}^{N} m_n \varkappa_n^{(j)2} = M \tag{2.6}$$

где $M > 0$ – корректирующий множитель, обеспечивающий с любой требуемой точностью фактическое выполнение условий ортогональности

$$\sum_{n=1}^{N} m_n \varkappa_n^{(j)} \varkappa_n^{(e)} = 0 \quad (e, j = \overline{1,N}; e \neq j) \tag{2.7}$$

имеем

$$\varkappa_N^{(j)} = \lambda \Delta_{N-1} \tag{2.8}$$

Подставляя, наконец, соотношение (2.8) в условие (2.6), определяем

$$\varkappa_{N-p}^{(j)} = \lambda(\Delta\varkappa_{N-p}^{(j)} / \varkappa_N^{(j)}) \quad (j = \overline{1,N}, \quad p = \overline{1,N-1}) \tag{2.9}$$

$$\lambda = \sqrt{M}\left[m_N \Delta_{N-1}^2 + \sum_{n=1}^{N-1} m_n \left(\frac{\Delta\varkappa_n^{(j)}}{\varkappa_N^{(j)}}\right)^2\right]^{-0.5}$$

$$\Delta_p = K_{1pj}\Delta_{p-1} - k_p^2 \Delta_{p-2} (K_{1pj} = k_p + k_{p+1} - m_p\omega_j^2; k_{N+1} \equiv 0; \Delta_0 = 1; \Delta_1 = K_{11j})$$

$$\Delta_{\varkappa^{(j)}}(j) = \varkappa_N^{(j)} \Delta_{n-1} \prod_{i=n+1}^{N} k_i \quad (n = \overline{1,N-1})$$

3. Решение основной задачи. Предположим, что в исходной системе возможно установление колебательного режима с одной из собственных частот ω_j $(j = \overline{1,N})$. Тогда решение системы уравнений (1.1), соответствующее одночастотным колебаниям, близким к нормальным свободным колебаниям с частотой ω_j в первом улучшенном асимптотическом приближении запишется так:

$$x_i(t) = \sum_{n=0}^{1} \varepsilon^n X_{ni}[a(t); \psi(t)] = \varkappa_i^{(j)} a(t) \cos\psi(t) + \varepsilon X_{1i}[a(t); \psi(t)] \tag{3.1}$$

Здесь $i, j = \overline{1,N}$; $\varkappa_i^{(j)}$ – собственные ортонормальные формы, удовлетворяющие условиям (2.6) и (2.7); $\psi(t) = \omega_j t + \varphi(t)$ – полная фаза колебаний, а $\varphi(t)$ – ее сдвиг; неизвестные функции X_{1i} предполагаются периодическими с периодом 2π относительно независимой переменной ψ; амплитуда колебаний $a(t)$ и их фаза $\psi(t)$ являются решениями следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{a}(t) = \varepsilon A[a(t)] \tag{3.2}$$

$$\dot{\psi}(t) = \omega_j + \varepsilon B[a(t)] \tag{3.3}$$

Таким образом, в математическом плане, задача построения приближенного решения (3.1) для системы (1.1) сводится к определению выражений для X_{1i}, A, B и последующему интегрированию уравнений (3.2) и (3.3). При этом, если необходимые выражения для $\dot{x}_i(t)$ и $\ddot{x}_i(t)$ получаются как результат непосредственного дифференцирования соотношения (3.1), проводимого с учетом условий (3.2), (3.3), и имеют в рамках ограничения первым порядком малости по параметру ε окончательный вид

$$\dot{x}_i(t) = -\varkappa_i^{(j)} a(t)\omega_j \sin\psi(t) + \varepsilon\{\varkappa_i^{(j)} A[a(t)]\cos\psi(t) -$$
$$-\varkappa_i^{(j)} a(t) B[a(t)] \sin\psi(t) + \omega_j \dot{X}_{1i\psi}[a(t); \psi(t)]\} \tag{3.4}$$

$$\ddot{x}_i(t) = -\varkappa_i^{(j)} a(t)\omega_j^2 \cos\psi(t) + \varepsilon\{-2\varkappa_i^{(j)}\omega_j A[a(t)]\sin\psi(t) -$$
$$-2\varkappa_i^{(j)} a(t)\omega_j B[a(t)]\cos\psi(t) + \omega_j^2 \ddot{X}_{1i\psi^2}[a(t); \psi(t)]\} \tag{3.5}$$

то при отыскании развернутого выражения для

$$x_i(t_i)=\sum_{n=0}^{1}\varepsilon^n X_{ni}[a(t_i);\psi(t_i)]=\varkappa_i^{(j)}a(t_i)\cos\psi(t_i)+\varepsilon X_{1i}[a(t_i);\psi(t_i)]$$

$$(i,j=\overline{1,N};\ t_i=t+\tau_i;\tau_1\equiv 0) \tag{3.6}$$

воспользуемся предположением [2] о допустимости разложений

$$f_r=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_r^{(n)}(t_{0i})(t_i-t_{0i})^n \tag{3.7}$$

$$\mathcal{F}_r=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[(f_1-f_{01})\frac{\partial}{\partial a}+(f_2-f_{02})\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(n)}\mathcal{F}_{0r}(f_{01};f_{02}) \tag{3.8}$$

$$r=1,2;\ t_i=t+\tau_i;\ i=\overline{1,N};\ \tau_1\equiv 0;\ t_{0i}=(t+\tau_i)_0;\ f_1=a(t_i);\ f_2=\psi(t_i)$$

$$f_1^{(n)}(t_{0i})=a^{(n)}(t_{0i});\ f_2^{(n)}(t_{0i})=\psi^{(n)}(t_{0i});\ f_{01}=a_0(t_i)=a(t);f_{02}=$$
$$=\psi_0(t_i)=\psi(t)+\omega_j\tau_i=\psi_{\tau_i}(t);\ \mathcal{F}_1=X_{0i}(f_1;f_2);\ \mathcal{F}_2=X_{1i}(f_1;f_2)$$

Выражения (3.7) и (3.8) при выполнении равенства $(t+\tau_i)_0=t$, а также соблюдения условий (3.2), (3.3) и ограничения первым порядком по ε, преобразуются к виду

$$f_r=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_n^{(n)}(t)\tau_i^n=\varepsilon^0 f_{0r}+\varepsilon\tau_i\sigma_r+\varepsilon^2\ldots \tag{3.9}$$

$$\mathcal{F}_r=\sum_{n=0}^{1}\frac{1}{n!}(\varepsilon\tau_i)^n\left(\sigma_1\frac{\partial}{\partial a}+\sigma_2\frac{\partial}{\partial\psi}\right)^{(n)}\mathcal{F}_{0r}(f_{01};f_{02}) \tag{3.10}$$

Здесь в дополнение к принятым обозначениям для формул (3.7) и (3.8) введено $f_1^{(n)}(t)=a^{(n)}(t)$; $f_2^{(n)}(t)=\psi^{(n)}(t)$; $\sigma_1=A[a(t)]$; $\sigma_2=B[a(t)]$; $\mathcal{F}_{01}(f_{01};f_{02})=X_{0i}(f_{01};f_{02})$; $\mathcal{F}_{02}(f_{01};f_{02})=X_{1i}(f_{01};f_{02})$.

Теперь выражение (3.6) с учетом представлений (3.9), (3.10) и первого порядка малости по ε в окончательной редакции запишется так:

$$x_i(t_i)=\varkappa_i^{(j)}a(t)\cos\psi_{\tau_i}(t)+\varepsilon\{\tau_i A[a(t)]\varkappa_i^{(j)}\cos\psi_{\tau_i}(t)-$$
$$-\tau_i B[a(t)]\varkappa_i^{(j)}a(t)\sin\psi_{\tau_i}(t)+X_{1i}[a(t);\psi_{\tau_i}(t)]\}\ (i=\overline{1,N};\tau_1\equiv 0) \tag{3.11}$$

Если продифференцировать равенство (3.11) с учетом условий (3.2), (3.3) и первого порядка по ε, то как конечный результат здесь имеем

$$\dot{x}_i(t_i)=-\varkappa_i^{(j)}\omega_j a(t)\sin\psi_{\tau_i}(t)+\varepsilon\{\varkappa_i^{(j)}A[a(t)]\cos\psi_{\tau_i}(t)- \tag{3.12}$$
$$-\tau_i\varkappa_i^{(j)}\omega_j a(t)B[a(t)]\cos\psi_{\tau_i}(t)-\varkappa_i^{(j)}\tau_i\omega_j A[a(t)]\sin\psi_{\tau_i}(t)-$$
$$-\varkappa_i^{(j)}a(t)B[a(t)]\sin\psi_{\tau_i}(t)+\omega_j\dot{X}_{1i\psi}[a(t);\psi_{\tau_i}(t)]\}\ (i=\overline{1N};\tau_1\equiv 0)$$

Важно отметить, что поскольку выражения (3.11) и (3.12) при $\tau_i\equiv 0$ $(i=\overline{1,N})$ совпадают с (3.1) и (3.4), то получаемые в процессе дальнейшего решения данные будут содержать, как частные, результаты, верные и в условиях отсутствия запаздывающих факторов τ_i. Отмеченная особенность, в свою очередь, позволит проводить сравнительную оценку, оказываемую τ_i на специфику развития динамических процессов в изучаемой механической системе.

При соблюдении условий (3.4) и (3.12), каждую из квазилинейных функций $\varepsilon\Phi_i(z_i)$, характеризующих силу сухого трения скольжения, в области аналитичности заменим приближающим ее многочленом в наиболее общей из его возможных аппроксимативных форм [9]:

$$\varepsilon\Phi_i(z_i) = \varepsilon\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}\Phi_{iz_i}^{(n)}(z_{0i})(z_i - z_{0i})^n = \varepsilon R_0 +$$

$$+\varepsilon\sum_{r=1}^{2}\sum_{l=0}^{1}\sum_{\gamma=1}^{\nu_r}(-1)^r R_{rl\gamma}\cos\left[(2\gamma - Q)\psi(t) - l\frac{\pi}{2}\right] \tag{3.13}$$

$$i, j = \overline{1, N};\; t_i = t + \tau_i;\; \tau_1 \equiv 0;\; z_i = V_0 - \dot{x}_i(t_i);\; z_{0i} = (z_i)_0;\; \nu_1 = f;\; \nu_2 = \gamma_m$$

$$\bar{R}_0 = \Phi_0(M_i) + \sum_{\gamma=1}^{\gamma_m}(0.5)^{2\gamma-1}\Omega_i^{2\gamma}\Phi_{2\gamma}(M_i)\sum_{n=0}^{\gamma-1}(-1)^{1+\gamma+n}C_{2\gamma}^{n};\; \Omega_i = \varkappa_i^{(j)}a\omega_j$$

$$\Phi_s(M_i) = (-1)^s\sum_{n=s}^{q}\frac{1}{n!}C_n^s M_i^{n-s}\Phi_{iz_i}^{(n)}(z_{0i})(s = \overline{0, q};\; M_i = V_0 - z_{0i})$$

$$R_{rl\gamma} = \sum_{n=\gamma}^{\nu_r}(-1)^{\lambda-\gamma}\delta_r C_\lambda^{n-\gamma}\Omega_i^\lambda\Phi_\lambda(M_i)\sin\left[(2\gamma - Q)\omega_j\tau_i + (l + r - 1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\delta_r = (0.25)^{n-1}\delta_{1r} + (0.5)^{2n-1}\delta_{2r},\quad \lambda = 2(n-1) + r,\qquad Q = 2 - r$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},\quad \gamma_m = \begin{cases} f, & q = 2f \\ f - 1, & q = 2f - 1\end{cases},\quad \delta_{sr} = \begin{cases} 1, & s = r \\ 0, & s \neq r\end{cases}$$

В дальнейшем для определенности в (3.13) ограничимся рассмотрением случая $q = 2f$. Тогда, подставляя выражения (3.1), (3.5), (3.13) в систему (1.1); приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε; перенося слагаемые, не содержащие X_{1i} и ее производные в правые части уравнений и обозначая последние через G_i, получаем

$$m_i\omega_j^2\ddot{X}_{1i\psi^2}(a;\psi) + \sum_{n=i}^{i+1}(-1)^{n-i}k_n[X_{1n}(a;\psi) - X_{1(n-1)}(a;\psi)] = G_i(a;\psi) \tag{3.14}$$

$$(i = \overline{1, N}; \tau_1 = k_{N+1} = X_{10} = X_{1(N+1)} \equiv 0)$$

Если представить правые части системы (3.14) полиномами

$$G_i(a;\psi) = \sum_{s=0}^{2f} V_{si}(a)\cos s\psi + W_{si}(a)\sin s\psi \tag{3.15}$$

тогда получим

$$V_{0i} = -R_0;\; \Omega_i = \varkappa_i^{(j)}a\omega_j;\; k = \overline{1, f};\; i, j = \overline{1, N};\; \tau_1 = \varkappa_0^{(j)} = k_{N+1} \equiv 0 \tag{3.16}$$

$$V_{si} = 2\delta_{s1}m_i\Omega_i B(a) + \sum_{n=k}^{f} C_{k(2n-1)}\sin s\omega_j\tau_i\;\; (s = 2k - 1)$$

$$W_{si} = 2\delta_{s1}m_i\varkappa_i^{(j)}\omega_j A(a) + \sum_{n=k}^{f} C_{k(2n-1)}\cos s\omega_j\tau_i\;\; (s = 2k - 1)$$

$$V_{si} = -\sum_{n=k}^{f} C_{k(2n)}\cos s\omega_j\tau_i\;\; (s = 2k),$$

$$W_{si} = \sum_{n=k}^{f} C_{k(2n)}\sin s\omega_j\tau_i\;\; (s = 2k)$$

$$C_{k(2n-1)} = (-1)^{2n-(k+1)}(0.25)^{n-1}C_{2n-1}^{n-k}\Omega_i^{2n-1}\Phi_{2n-1}(M_i) \tag{3.17}$$

$$C_{k(2n)} = (-1)^{2n-k}(0.5)^{2n-1}C_{2n}^{n-k}\Omega_i^{2n}\Phi_{2n}(M_i)$$

Вследствие (3.14), неизвестные функции X_{1i} естественно также представить полиномами Фурье

$$X_{1i}(a;\psi)=\sum_{s=0}^{2f} f_{si}(a)\cos s\psi+g_{si}(a)\sin s\psi \tag{3.18}$$

где f_{si} и g_{si} подлежат определению. Дифференцируя для этого равенство (3.18) и подставляя полученный результат, а также (3.18) в систему (3.14), с учетом (3.15) имеем

$$-k_i y_{l(i-1)}-E_{sij}y_{li}-k_{i+1}y_{l(i+1)}=D_{sli}\quad \left(i=\overline{1,N};\ l=1,2\right) \tag{3.19}$$

$$y_{1i}=f_{si}(a),\quad y_{2i}=g_{si}(a),\quad D_{s1i}=V_{si}(a),\quad D_{s2i}=W_{si}(a)$$

$$E_{sij}=k_i+k_{i+1}-sm_i\omega_j^2,\quad s=\overline{0,2f},\quad y_{l0}=k_{N+1}\equiv 0$$

Если в (3.19) $s=1$, то $E_{1ij}=K_{1ij}$ и система (3.19) либо имеет бесчисленное множество различных решений, либо несовместна. Известно [1], что последнее обстоятельство устраняется введением дополнительных ограничений

$$\int_0^{2\pi} X_{1i}(a;\psi)\sin\left[\psi+(r-1)\frac{\pi}{2}\right]d\psi=0\quad \left(i=\overline{1,N};\ r=1,2\right) \tag{3.20}$$

укорачивающих полиномы (3.18) и обеспечивающих однозначное определение выражений $A(a)$ и $B(a)$.

Если же в (3.19) $s\neq 1$, то $E_{sij}\neq K_{1ij}$ и в силу (2.3), (2.4) главный определитель $\tilde{\Delta}_N$ системы (3.19) не равен нулю, а, значит, система (3.19) имеет единственное решение

$$y_{li}=\frac{1}{\tilde{\Delta}_N}\sum_{m=1}^{2}\Delta_{mi} \tag{3.21}$$

$$\left(i=\overline{1,N}\right)\quad \tilde{\Delta}_\mu=E_{s\mu j}\tilde{\Delta}_{\mu-1}-k_\mu^2\tilde{\Delta}_{\mu-2}\quad (\mu=N,N-1,\ldots,2)\quad (l=1,2)$$

$$\Delta_{1i}=\sum_{n=1}^{i} D_{sln}k_{n+1}k_{n+2}\cdots k_i\Delta_g\Delta_l;\quad k_{n+1}\cdot k_{n+2}\cdots k_i=\begin{cases}1, & i<n+1\\ k_i, & i=n+1\end{cases}$$

$$\Delta_g=E_{sgj}\Delta_{g-1}-k_g^2\Delta_{g-2}\quad (g=n-1);\quad D_{s1n}=V_{sn}(a);\quad D_{s2n}=W_{sn}(a)$$

$$\Delta_l=E_{s(l+i)j}\Delta_{l-1}-k_{l+i}^2\Delta_{l-2}\quad (l=N-i)$$

$$\Delta_{2i}=\sum_{n=i+1}^{N} D_{sln}k_nk_{n-1}\cdots k_{i+1}\Delta_p\Delta_q;\quad y_{1i}=f_{si}(a);\quad y_{2i}=g_{si}(a)$$

$$k_n\cdot k_{n-1}\cdots k_{i+1}\big|_{n=i+1}=k_{i+1};\quad \Delta_p=E_{spj}\Delta_{p-1}-k_p^2\Delta_{p-2}\quad (p=i-1)$$

$$\Delta_q=E_{s(q+n)j}\Delta_{q-1}-k_{q+n}^2\Delta_{q-2}\quad (q=N-n);\quad \Delta_0=1;\quad k_{N+1}=y_{l0}\equiv 0$$

Вместе с тем для получения возможности проведения общих заключений о формах изучаемых колебаний, необходимо найти выражение для $y_{li}(a)$ в виде линейной комбинации [8]:

$$y_{li}=\sum_{n=1}^{N} C_n\varkappa_i^{(n)}\quad \left(l=1,2;\ i=\overline{1,N}\right) \tag{3.22}$$

где C_n требуется найти. Подставляем для этого равенства (3.22) в систему (3.19) и учитываем уравнения (2.3). В результате имеем

$$m_i\sum_{p=1}^{N} C_p\left(\omega_p^2-s^2\omega_j^2\right)\varkappa_i^{(p)}=D_{sli}\quad \left(i,j=\overline{1,N};\ l=1,2\right) \tag{3.23}$$

Умножая каждое из равенств (3.23) последовательно на $\varkappa_1^{(\lambda)}, \varkappa_2^{(\lambda)}, \ldots, \varkappa_N^{(\lambda)}$ $(\lambda = \overline{1, N})$, причем в каждой из N указанных операций λ фиксировано, с учетом условий ортонормирования (2.6) и (2.7) находим

$$C_\lambda M\left(\omega_\lambda^2 - s^2\omega_j^2\right) = \sum_{n=1}^{N} D_{sln}\varkappa_n^{(\lambda)} \tag{3.24}$$

Отсюда, в частности, при $s \neq 1$ получаем

$$C_\lambda = \left[M\left(\omega_\lambda^2 - s^2\omega_j^2\right)\right]^{-1} \sum_{n=1}^{N} D_{sln}\varkappa_n^{(\lambda)} \tag{3.25}$$

Тогда, подставляя (3.25) в равенства (3.22), после несложных преобразований находим

$$y_{li} = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{N}\left(\omega_r^2 - s^2\omega_j^2\right)^{-1}\varkappa_\mu^{(r)}\varkappa_i^{(r)}D_{sl\mu} \tag{3.26}$$

$$\left(i = \overline{1, N};\ l = 1, 2\right) \quad y_{1i} = f_{si}(a), \quad y_{2i} = g_{si}(a), \quad D_{s1\mu} = V_{s\mu}(a), \quad D_{s2\mu} = W_{s\mu}(a)$$

Если же в равенстве (3.24) положить $\lambda = j$ и $s = 1$, то

$$0 = \sum_{n=1}^{N} D_{1ln}\varkappa_n^{(j)} \tag{3.27}$$

Подставляя в (3.27) выражения (3.16) и (3.17), взятые при $s = 1$, и принимая во внимание условие нормировки (2.6), определяем

$$A(a) = \frac{1}{2M}\sum_{n=1}^{f}\alpha_{2n-1}a^{2n-1} \tag{3.28}$$

$$B(a) = \frac{1}{2M}\sum_{n=1}^{f}\beta_{2(n-1)}a^{2(n-1)} \tag{3.29}$$

$$\alpha_{2n-1} = -\frac{1}{\omega_j}\sum_{r=1}^{N}\varkappa_r^{(j)}C_{0nr}, \quad \beta_{2(n-1)} = -\frac{1}{M\omega_j}\sum_{r=1}^{N}\varkappa_r^{(j)}C_{1nr} \quad \left(n = \overline{1, f}\right)$$

$$C_{\gamma nr} = (0.25)^{n-1}C_{2n-1}^{n-1}\left(\varkappa_r^{(j)}\omega_j\right)^{2n-1}\Phi_{2n-1}\left(M_r\right)\cos\left(\omega_j\tau_r - \gamma \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$\gamma = 0; 1, \quad \varkappa_0^{(j)} = k_{N+1} = \tau_1 \equiv 0$$

Заметим, что в примененном варианте отыскания A и B отпадает необходимость прямого использования ограничения (3.20).

При найденных выражениях (3.28) и (3.29), интегрирование уравнений (3.2) и (3.3) сводится к квадратурам

$$\int_{t_0}^{t} d\psi(t) = \int_{t_0}^{t}\left[\omega_j + \varepsilon\sum_{n=1}^{f}\beta_{2(n-1)}a^{2(n-1)}(t)\right]dt \tag{3.30}$$

$$\int_{a_0}^{a(t)}\frac{da}{\sum_{n=1}^{f}\alpha_{2n-1}a^{2n-1}} = \frac{\varepsilon}{2M}\int_{t_0}^{t}dt, \quad a_0 = a\left(t_0\right) \tag{3.31}$$

Очевидно, что (3.30) и (3.31) интегрируются в замкнутом виде при $f = 2$ $(q = 4)$ и $f = 3$ $(q = 6)$. При этом, если при $f = 3$ полное качественное исследование выглядит проблематичным из-за чрезмерной сложности конечных формул, то оказывается вполне приемлемым детальный анализ результатов точного интегрирования (3.31) при $f = 2$. Действительно, как окончательный результат здесь имеем

$$a(t) = a_0\left\{\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}a_0^2\right)\exp\left[-\frac{\varepsilon\alpha_1}{M}(t-t_0)\right]-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}a_0^2\right\}^{-0.5} \quad (\alpha_1 \neq 0) \tag{3.32}$$

$$a(t) = a_0\left[1-\frac{\varepsilon}{M}\alpha_3 a_0^2(t-t_0)\right]^{-0.5} \quad (\alpha_1 = 0) \tag{3.33}$$

Непосредственно из анализа формул (3.32) и (3.33) вытекают следующие условия существования динамических режимов, допустимых в изучаемой механической системе:

1. Если $(\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_3 < 0) \vee (\alpha_1 < 0 \wedge \alpha_3 \leqslant 0) \vee (\alpha_1 < 0 \wedge \alpha_3 > 0 \wedge a_0^2 < |\alpha_1|\alpha_3^{-1})$, тогда в системе происходят устойчивые затухающие колебания.

2. Если $(\alpha_1 < 0 \wedge \alpha_3 > 0 \wedge a_0^2 = |\alpha_1|\alpha_3^{-1}) \vee (\alpha_1 > 0 \wedge \alpha_3 < 0 \wedge a_0^2 = \alpha_1|\alpha_3|^{-1}) \vee (\alpha_1 = 0 \wedge \wedge \alpha_3 = 0)$, то в исследуемой системе самовозбуждаются автоколебания со стационарной амплитудой $a_* = a_0$.

3. Если $(\alpha_1 > 0 \wedge \alpha_3 < 0)$, тогда

a) $\forall a_0^2 > \bar{a}^2$, где $\bar{a}^2 = \alpha_1|\alpha_3|^{-1}$, плавно затухающие колебания переходят (при $t \to \infty$) в автоколебания с амплитудой $a_* = \bar{a}$;

b) $\forall a_0^2 < \bar{a}^2$ колебания с постепенно нарастающей амплитудой в конечном итоге также переходят в автоколебания с той же амплитудой a_*.

4. Если $(\alpha_1 > 0 \wedge \alpha_3 = 0)$, то для механической системы характерными оказываются возрастающие устойчивые колебания.

5. Если $(\alpha_1 < 0 \wedge \alpha_3 > 0 \wedge a_0^2 > |\alpha_1|\alpha_3^{-1}) \vee (\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_3 > 0) \vee (\alpha_1 > 0 \wedge \alpha_3 > 0)$, тогда в системе допустимы лишь неустойчивые колебания с возрастающей амплитудой.

4. Пример. Опираясь на полученные результаты, проведем инженерный расчет реальной конструкции со следующими физико-механическими и геометрическими параметрами: $N = 3$; $f = 2$ $(q = 4)$; $m_1 = 4.25$ кг; $m_2 = 2.125$ кг; $m_3 = 3$ кг; $l_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ м; $l_2 = 3 \cdot 10^{-2}$ м; $l_3 = 4 \cdot 10^{-2}$ м; $s = 5.3407074 \cdot 10^{-5}$ м^2 – рабочая площадь поперечного сечения каждого из 3-х стальных трубчатых соединительных звеньев с модулем Юнга $E = 1.96 \cdot 10^{11}$ н/м^2; $V_0 = 0.876$ м/с и $V_0 = 2.97$ м/с; $k_1 = 209355730$ н/м; $k_2 = 348926216$ н/м; $k_3 = 261694662.5$ н/м; $\omega_j = 9339.783814$ с$^{-1}$; $\varkappa_1^{(j)} = 0.426461197\sqrt{\mathrm{M}}$; $\varkappa_2^{(j)} = 0.22922327\sqrt{\mathrm{M}}$; $\varkappa_3^{(j)} = -0.196128161\sqrt{\mathrm{M}}$.

В качестве математической модели силы сухого трения скольжения выберем [9]: $\Phi(z_i) = 1 + (z_i - 1)^2[1 + (z_i - 1)^3]^{-0.5}$. Тогда для ряда фиксированных значений относительной скорости находим отвечающие им значения производных $\Phi^{(n)}(z_{0i})$ $(n = \overline{1,4})$ и полученные результаты представим в виде табл. 1.

На следующем этапе вычисляем $\Phi_s(M_i)$, найденные значения приведены в табл. 2 для $V_0 = 0.876$, $V_0 = 2.970$. Заметим, что поскольку выбор принадлежности каждого из приведенных в табл. 2 значений "условной скорости" M_i к той или иной колеблющейся массе случаен, то при нахождении по формулам

$$\alpha_1 = -\sum_{i=1}^{3}\varkappa_i^{(j)^2}\Phi_1(M_i)\cos\omega_j\tau_i \quad \text{и} \quad \alpha_3 = -0.75\,\omega_j^2\sum_{i=1}^{3}\varkappa_i^{(j)^4}\Phi_3(M_i)\cos\omega_j\tau_i$$

знаков у параметров α_1 и α_3 для каждой из заданных коростей V_0, ограничимся изучением только двух наиболее характерных вариантов среди всех возможных. Результаты при этом оказались следующими:

(*a*) если $(V_0 = 0.876 \wedge M_1 = 0.476 \wedge M_2 = 0.276 \wedge M_3 = 0.076) \vee (V_0 = 2.97 \wedge M_1 = 2.57 \wedge \wedge M_2 = 2.37 \wedge M_3 = 2.17)$, тогда $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_3 > 0 \forall\tau_n$ $(n = 2, 3)$. Реализованное условие

Таблица 1

z_{0i}	$\Phi^{(1)}(z_{0i})$	$\Phi^{(2)}(z_{0i})$	$\Phi^{(3)}(z_{0i})$	$\Phi^{(4)}(z_{0i})$
0.40	–1.635303100	5.637840000	–29.12579830	149.944950
0.60	–0.869303269	4.718013467	–6.321027045	44.9788172
0.80	–0.404038780	2.064710800	–1.241124500	13.0403360

Таблица 2

z_{0i}	M_i	$\Phi_1(M_i)$	$\Phi_3(M_i)$	M_i	$\Phi_1(M_i)$	$\Phi_3(M_i)$
0.40	0.476	–0.4439701770	–7.041332983	2.57	–340.8765363	–59.37212053
0.60	0.276	–0.3497232630	–1.015521085	2.37	–92.35349997	–16.71312829
0.80	0.076	0.24975106100	0.0416764940	2.17	–23.36259056	–4.509400770

отвечает критерию 5 теоретических выводов. Следовательно, в механической системе при вышеуказанных комбинациях V_0 и M_i ($i = \overline{1,3}$) допустимы лишь неустойчивые возрастающие колебания.

(b) если ($V_0 = 0.876 \wedge M_1 = 0.076 \wedge M_2 = 0.276 \wedge M_3 = 0.476$), то $\alpha_1 < 0 \forall \tau_n$, а $\alpha_3 \gtreqless 0$ в зависимости от величины τ_n. Если же ($V_0 = 2.97 \wedge M_1 = 2.17 \wedge M_2 = 2.37 \wedge M_3 = 2.57$), тогда $\alpha_1 \gtreqless 0$ в зависимости от τ_n, а $\alpha_3 > 0 \forall \tau_n$. Полученные здесь комбинации знаков у α_1 и α_3 указывают на возможность появления в системе только тех видов колебаний, что указаны в критериях 1, 2 и 5.

Таким образом установлено, что даже в случае, когда колебания каждой из масс происходят в условиях одновременного воздействия на них отрицательного сухого трения скольжения, самовозбуждение автоколебаний в системе вовсе не гарантировано. Для их реализации достаточно осуществления таких из случайных коррелятивностей между факторами M_i, a_0, $\Phi_s(M_i)$ и τ_n ($i = \overline{1,3}$; $s = 1, 3$; $n = 2, 3$), при которых комбинации знаков у α_1 и α_3 оказываются адекватными перечисленным в критериях 2 и 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 501 с.
2. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
3. *Жирнов Б.М.* Об автоколебаниях механической системы с двумя степенями свободы при наличии запаздывания // Прикл. механика. 1973. Т. 9. № 10. С. 83–87.
4. *Мельниченко И.П., Жирнов Б.М.* Одночастотные автоколебания фрикционной механической системы с N степенями свободы с учетом запаздывания // Прикл. механика. 1974. Т. 10. № 2. С. 120–125.
5. *Жирнов Б.М.* Одночастотные резонансные колебания фрикционной автоколебательной системы с запаздыванием при внешнем возмущении // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 9. С. 102–109.
6. *Жирнов Б.М.* Автоколебания груза на движущейся транспортной ленте // Динамика и прочность машин. 1990. № 51. С. 48–55.
7. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1981. 720 с.
8. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 559 с.
9. *Жирнов Б.М.* О резонансных процессах в механической автоколебательной системе с запаздыванием // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 2. С. 90–97.

Киев

Поступила в редакцию
9.09.1999