

УДК 531.314.2:517.972.6

© 2001 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ

ЭФФЕКТИВНЫЙ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Излагается высокоточный экономичный численно-аналитический метод решения нелинейных краевых задач, порождаемых уравнениями Эйлера – Лагранжа и граничными условиями различных типов. Основу вычислительного алгоритма составляет нестандартный подход, связанный с использованием зависимости недостающего начального (или конечного) значения переменной от длины интервала, и оригинальным введением малого параметра краевой задачи. Предлагается рекуррентная процедура последовательного уточнения указанных значений и искомого решения, использующая численное интегрирование задачи Коши. Она обладает свойством квадратичной сходимости по отношению к малому параметру, характеризующему относительную невязку приближенного решения по аргументу. Метод разработан для граничных условий первого и второго родов, а также для нелинейных условий третьего рода. Предложена модификация алгоритма, использующая невязку по решению задачи Коши в конечной точке. Для тестирования алгоритма проведен расчёт и анализ существенно нелинейных модельных задач из области магнитной гидродинамики и распространения лучей в неоднородных средах, удовлетворяющих принципу Ферма.

1. Постановка задачи. Рассматривается класс механических систем, удовлетворяющих вариационному принципу вида [1–6]:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \rightarrow \min_y, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$
$$-\infty < a \leq x \leq b < \infty, \quad y' = dy/dx, \quad (y, y') \in G \quad (1.1)$$

Здесь y – скалярная функция аргумента x , подлежащая определению; параметры a , b , y_a , y_b считаются заданными; G – некоторая открытая область, в которой определена функция F . Отметим, что линейными преобразованиями переменных x , y соотношения (1.1) приводятся к форме, при которой $a = 0$, $b = l$ ($l = 1$), $y_a = y_b = 0$. Функция F в общем случае предполагается произвольной. Считаются выполненными условия гладкости по всем переменным и знакоопределенности второй производной $\partial^2 F / \partial y'^2$ (условие Лежандра). Эти условия обычно имеют место в задачах механики и не являются обременительными [1–6].

Выпишем условия стационарности функционала $J[y]$ (1.1), т.е. нелинейную краевую задачу для уравнения Эйлера – Лагранжа [1–7]:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(0) = y(l) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (y, y') \in G \quad (1.2)$$
$$f \equiv (\partial^2 F / \partial y'^2)^{-1} (\partial F / \partial y - \partial^2 F / \partial x \partial y' - y' \partial^2 F / \partial y \partial y')$$

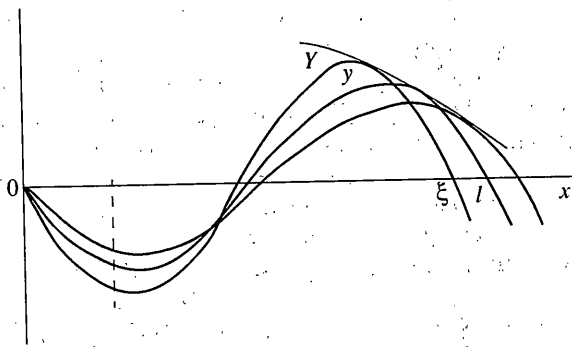
Стандартный прием решения вариационной задачи (1.1) заключается в построении множества решений $\{y_i(x)\}$ краевой задачи (1.2) и выборе функции $y_*(x)$ из условия $\min J[y_i]$. Следует отметить, что регулярные методы эффективного аналитического и численного исследования нелинейных краевых задач общего вида отсутствуют. Обычно в простых ситуациях применяются методы пристрелки, Релея – Ритца, Бубнова – Галеркина, квазилинеаризации, последовательных приближений, конечно-разностной аппроксимации и др. [1–9]. Однако для оперативных массовых высокоточных расчетов в широком диапазоне изменения параметров (в том числе параметров a, b, y_a, y_b , см. (1.1)), определяющих рассматриваемую механическую систему (параметрический синтез), указанные подходы недостаточны. Проблема значительно усложняется в случае большой размерности вектора параметров.

Предлагается разработать экономичный высокоточный метод ускоренной сходимости, основанный на нетрадиционном введении малого параметра и функциональном алгоритме типа алгоритма Ньютона [10, 11]. Предлагаемый подход кардинальным образом отличается от общеизвестных – он использует невязку по x . Ради определенности алгоритм применяется для решения краевых задач вида (1.2), а также для других граничных условий, см. п. 4. Метод допускает непосредственное распространение на другие классы задач, например, на изопериметрические.

Эффективное решение и параметрическое исследование одномерных задач типа (1.2) представляет несомненный интерес для приложений к различным проблемам математики, механики, физики (гидродинамики, акустики, электродинамики и др.) и управления. К таковым можно отнести многочисленные геометрические задачи (о геодезических, об экстремальных поверхностях вращения и т.п.), задачи о звуковом канале в атмосфере и океане [12], задачи распространения электромагнитных волн и оптических лучей в неоднородных средах [1, 5] (принцип Ферма) и ряд других. Особый интерес представляет исследование широкого класса задач статики, кинематики, динамики и оптимального управления движением [1–8]. Отметим, что исследование практически каждой нелинейной прикладной задачи представляет отдельную проблему, требующую разработки специальных подходов. В общем случае даже одномерной задачи (1.2) не удастся получить сколь-нибудь содержательные результаты. Необходимо выполнение некоторых дополнительных ограничивающих предположений, см. ниже.

Несколько конкретизируем постановку задачи и кратко опишем содержание предлагаемого подхода. Пусть установлено существование решения; тогда вычислительный аспект проблемы заключается в нахождении начального $y'(0) = y'_0$ (или конечного $y'(l) = y'_l$) значения производной $y'(x)$, определяющей это решение краевой задачи посредством интегрирования соответствующей задачи Коши. При этом предполагается грубая оценка y_0^* искомой величины y'_0 (или y_l^* для y'_l). Она может быть получена на основе указанных выше аналитических и численных методов вариационного исчисления, функционального анализа, дифференциальных уравнений и краевых задач. Ставится задача уточнения оценки и определения искомой производной y'_0 (или y'_l), и решения $y(x)$ с требуемой сколь угодно высокой точностью, т.е. сколь угодно малой невязкой по x, y , см. ниже. Предлагаемый метод позволяет за небольшое число итераций (обычно две – три) находить практически точные значения искомых величин.

2. Введение малого параметра и применение метода возмущений для решения нелинейной краевой задачи. Изложим существо (алгоритм) метода возмущений, основанного на оригинальном введении малого параметра ε задачи (1.2) и нестандартной рекуррентной процедуре уточнения величины производной $p = y'_0$. Отметим, что искомое решение $y(x, l)$ зависит в общем случае от величины параметра l (длины интервала), поэтому $p = p(l) = y'(0, l)$. Данное обстоятельство существенно используется в алгоритме. Напомним, что в линейных задачах на собственные значения и функции



Фиг. 1

ситуация другая: от длины интервала существенно зависят собственные значения [10, 11]. Авторам не известны другие исследования, в которых использовалась связь решений различных краевых задач с длиной интервала — одной из основных характеристик системы.

Итак, предположим известной оценку p^* величин p . Соответствующее ей решение задачи Коши

$$Y'' = f(x, Y, Y'), \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = p^*, \quad Y_{(0)} = Y(x, p^*)$$

$$0 \leq x \leq \xi, \quad \xi \leq l, \quad (Y_{(0)}, Y'_{(0)}) \in G \quad (2.1)$$

считается построенным в какой-либо из форм — аналитической, численной или в виде процедуры — с требуемой точностью, которая может варьироваться в зависимости от порядка итерации, см. п. 3, 4.

Близость величин p^* и p , а также решений $Y_{(0)}$ и y на некотором интервале $0 \leq x \leq l^*$, где $l^* = \max(l, \xi)$, будем характеризовать величиной числового параметра ε . Значения параметров ξ и ε определяются соотношениями

$$\varepsilon = 1 - \xi/l, \quad |\varepsilon| \leq 1, \quad \xi = \arg \min_i |\xi_i - l|, \quad \xi_i = \text{Arg}_x Y(x, p^*) \quad (2.2)$$

Нахождение величины ξ согласно (2.2) представляется необходимым для уверенного суждения о существовании искомого решения задачи. Она определяется сравнительно просто в процессе интегрирования уравнений для Y согласно (2.1). Значение ξ (2.2), выбираемое из некоторого множества корней $\{\xi_i\}$ функции $Y(x, p^*)$, далее предполагается невырожденным: $Y'(\xi, p^*) \neq 0$. Это означает, что в достаточно малой ε -окрестности значения $x = l$ существует единственный корень $\xi = \xi(p^*)$. Вследствие гладкости решения $Y_{(0)}$ по параметру p^* близость p^* и p влечет малость параметра ε . Обратное утверждение, вообще говоря, неверно из-за наличия фокальных точек. Так в элементарном примере $y'' = -(\pi n)^2 y$, $y(0) = y(1) = 0$ независимо от величины $y'(0)$ все решения $y_n = c_n \sin \pi n x$, $n = 1, 2, \dots$, проходят через точку $(0, 1)$. Далее такие критические ситуации исключаются.

Рассмотрим ситуацию общего положения и будем считать, что $x = l$ не является фокальной точкой, т.е. при изменении p^* происходит аналогичное перемещение точки ξ вблизи значения $x = l$ и наоборот. Аналитически это означает, что производная $dp/dl \neq 0$ есть величина порядка единицы по отношению к малому параметру ε , см. фиг. 1. Отсюда следует, что имеют место неравенства $e|\varepsilon| \leq |p - p^*| \leq g|\varepsilon|$, где e, g — положительные постоянные.

Аналогично вышеизложенному вводятся параметры ξ и $\varepsilon = \xi/l$, если известна оценка p^* производной $y'_l = p(l)$ на правом конце интервала $x = l$. Тогда уравнение (2.1)

должно быть проинтегрировано влево от $x = l$ до $x = \min(0, \xi)$, $|\xi| \ll l$, где ξ – ближайший к $x = 0$ корень функции $Y(x, p^*)$.

Отметим, что приведенные построения требуют гладкой продолжимости функции f по x и решения $Y_{(0)}$ при $\xi > l$ (или $\xi < 0$). Далее будет установлено, что эти построения весьма полезны для высокоточного определения невязки решения по x и последующего ее уменьшения. Алгоритм вычислений приводится также к модифицированной форме, не использующей требование продолжимости, см. п. 3, 4. В результате получается стандартная процедура непосредственного уточнения величины p , требующая, однако, высокоточного определения невязки приближенного решения $Y(l, p^*)$ (или $Y(0, p^*)$) по y .

Наряду с исходной нелинейной краевой задачей (1.2) рассмотрим "присоединенную" линейную краевую задачу для "функции чувствительности" $v = \partial y / \partial l$, где l – переменная длина интервала. Затем величину l можно зафиксировать и, в частности, положить $l = 1$. Для неизвестной v имеем соотношения

$$v'' = (\partial f / \partial y)v + (\partial f / \partial y')v', \quad v(0) = 0, \quad v(l) = -y'(l, l), \quad v'(0) = p'(l) \quad (2.3)$$

Выражения (2.3) получаются формальным дифференцированием равенств (1.2) по l ; уравнение для v есть уравнение в вариациях для y . Решение задачи (2.3) для дальнейших построений удобнее представить в другой форме, использующей решение задачи Коши для функции u и неизвестную величину $p'(l)$:

$$v = v(x, l) = -(p'(l)/u(l, l))u(x, l), \quad u(l, l) \neq 0 \quad (2.4)$$

$$u'' = (\partial f / \partial y)u + (\partial f / \partial y')u', \quad u = u(x, l), \quad u(0, l) = 0, \quad u'(0, l) = 1$$

Для определения функции $u(x, l)$ требуется решить задачу Коши с фиксированными данными при $x = 0$ согласно (2.4). Далее, чтобы не загромождать изложение, рассматривается случай $p(l) = y'(0, l)$. Недостающее начальное данное $v(0, l)$, как следует из (2.3), равно

$$v'(0, l) = p'(l) \equiv k(l), \quad k(l) = -y'(l, l)/u(l, l) \quad (2.5)$$

Соотношения (2.1)–(2.5) полагаются в основу рекуррентного алгоритма ускоренной сходимости типа Ньютона первого порядка [6, 11]. Для его построения воспользуемся элементарным выражением

$$p(l) \equiv p(\xi + \varepsilon l) = p(\xi) + k(\xi)\varepsilon l + \varepsilon^2 \dots, \quad p(\xi) = p^*, \quad k(\xi) = k^* \quad (2.6)$$

и применим его в численно-аналитической процедуре последовательного уточнения величины $p(l) = p^* + O(\varepsilon)$.

Итак, на начальном этапе процедуры выполняются следующие операции: 1) определяется оценка p^* производной $y'(0, l)$; 2) с требуемой точностью проводится интегрирование (как правило, численное) задачи Коши (2.1) $Y_{(0)} = Y(x, p^*)$, $Y'_{(0)} = dY/dx$, причем $(Y_{(0)}, Y'_{(0)}) \in G$ вместе с некоторой окрестностью; 3) находится ближайший к $x = l$ корень ξ – нуль функции $Y(x, p^*)$ и согласно (2.2) вычисляется исходный малый параметр задачи ε , $|\varepsilon| \ll 1$; 4) совместно с задачей Коши (2.1) для Y интегрируется аналогичная задача для функции $U(x, p^*)$, определяющей приближенную "функцию чувствительности" $V(x, p^*)$:

$$U'' = (\partial f / \partial Y)_0 U + (\partial f / \partial Y')_0 U', \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = 1$$

$$U_{(0)} = U(x, p^*), \quad U'_{(0)} = dU/dx, \quad V_{(0)} = k^* U_{(0)} \quad (2.7)$$

Отметим, что в приближенных расчетах функции U, V используются вместо точных u, v , см. (2.3)–(2.5). Выражения типа $(\partial f / \partial Y)_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) означают, что для

Y, Y' подставляются j -е приближения $Y_{(j)}, Y'_{(j)}$; см. далее. Затем, 5) согласно (2.1), (2.6), (2.7) вычисляется оценка k^* для $k(l) = p'(l)$

$$k^* = -Y'(\xi, p^*)/U(\xi, p^*) = -Y'(l, p^*)/U(l, p^*) + O(\varepsilon), \quad U(l, p^*) \neq 0 \quad (2.8)$$

С помощью полученных в п. 1-5 начальных приближений величин $p^{(0)} = p^*, \xi^{(0)} = \xi, \varepsilon^{(0)} = \varepsilon$ и $k^{(0)} = k^*$ по формуле (2.5) определим уточненное значение $p^{(1)}$ производной $y'(0, l) = p(l)$:

$$p^{(1)} = p^{(0)} + \varepsilon^{(0)} k^{(0)}, \quad |p - p^{(1)}| \leq c\varepsilon^2, \quad c = \text{const}, \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (2.9)$$

Подстановка величины $p^{(1)}$ в (2.1) вместо $p^{(0)} = p^*$ позволяет построить приближенное решение $(Y_{(1)}, Y'_{(1)}) \in G$ с невязкой $O(\varepsilon^2)$ по значению функции $Y(l, p^{(1)})$ и по абсциссе $\xi^{(1)}$, т.е. $\varepsilon^{(1)} = 1 - \xi^{(1)}/l, |\varepsilon^{(1)}| \leq d\varepsilon^2$, где $\xi^{(1)}$ – ближайший к значению $x = l$ корень функции $Y_{(1)}, d = \text{const}$. Без потери точности по степеням ε при вычислении $k^{(0)}$ (2.8) можно положить $\xi = l$, т.е. пропустить интегрирование уравнений для функции Y, U до $x = l$. Как отмечалось, это свойство используется при модификации алгоритма, не требующей определения величин $\xi^{(j)}, \varepsilon^{(j)}$, на основе высокоточного с погрешностью $O(\varepsilon^{(j)2})$ определения – измерения или вычисления – невязки $Y(l, p^{(j)})$. В практических задачах корректировки систем наведения различного назначения эти высокоточные измерения могут быть затруднительными или невыполнимыми. Предлагаемый подход позволяет проводить требуемые уточнения величины p на основе достаточно точного определения (измерения или вычисления) величины невязки по x , что может быть существенно проще и эффективнее.

Изложим кратко стандартную схему метода возмущений для приближенного с требуемой степенью точности по малому параметру ε решения краевой задачи (1.2). Приведем ее к виду возмущенной задачи, порождающее (при $\varepsilon = 0$) решение которой известно и имеет вид (2.1). Для этого совершим близкое к тождественному преобразование аргумента x , переменных y, y' и параметра l следующим образом [10]:

$$s \equiv (\xi/l)x, \quad 0 \leq s \leq \xi, \quad y(x) \equiv z(s, \varepsilon), \quad y'(x) \equiv (\xi/l)z'(s, \varepsilon) \quad (2.10)$$

Отметим, что согласно (2.2) коэффициент преобразования $\xi/l = 1 - \varepsilon$ близок к единице при $|\varepsilon| \ll 1$. Посредством замены (2.10) приходим к возмущенной краевой задаче вида

$$z'' = (1 - \varepsilon)^{-2} f((1 - \varepsilon)^{-1}s, z, (1 - \varepsilon)z'), \quad z(0, \varepsilon) = z(\xi, \varepsilon) = 0 \quad (2.11)$$

В соотношениях (2.11) величина ξ фиксирована, а ε – малый параметр, изменяющийся в некоторых пределах: $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \varepsilon_0 \ll 1$. Полагая $\varepsilon = 0$, получим невозмущенную краевую задачу типа (1.2) на интервале $0 \leq s \leq \xi$, решение которой $z_{(0)}(s) = Y(s, p^*)$ определяется согласно (2.1), (2.2). Далее с помощью замены $z = z_{(0)} + \delta z$, где $\delta z \sim \varepsilon$, и тождественных преобразований уравнение (2.11) приводится к квазилинейному виду, а соответствующая краевая задача для δz решается последовательными приближениями по степеням ε . Эти построения представляются малопродуктивными, поэтому следует ограничиться подобающими замечаниями.

В значительной мере этот подход – теория и методы регулярных возмущений – был разработан с целью аналитического исследования нелинейных колебательных систем (методы Ляпунова – Пуанкаре [13, 14]). Для численных расчетов он представляется неэффективным, поскольку приводит к быстрому усложнению получающихся выражений с увеличением порядка приближения (номера итерации) и к накоплению ошибок округлений. Однако в общетеоретическом аспекте применение классических методов малого параметра представляет несомненный интерес для доказательства существования и единственности решения, оценки радиуса сходи-

мости по ε , построения некоторых полезных аналитических соотношений и условий устойчивости [6, 10, 13, 14].

3. Алгоритм метода ускоренной сходимости. Предлагается использовать изложенную в п. 2 процедуру уточнения величины $p(l)$ и искомого решения $y(x, l)$ рекуррентным образом. А именно, на основе уточненного значения $p^{(1)}$ (2.9) – операции 1 для следующей итерации – последовательно выполняются операции 2–5. Производится высокоточное интегрирование задач (2.1), (2.7) для $Y_{(1)}, U_{(1)}$ – операции 2, 4; затем в ε^2 -окрестности находится ближайший к $x = l$ корень (нуль) $\xi^{(1)} = \xi(p^{(1)})$ функции $Y(x, p^{(1)})$ и согласно (2.2) проводится итерация малого параметра ε : $\varepsilon^{(1)} = 1 - \xi^{(1)}/l$, $|\varepsilon^{(1)}| \leq d\varepsilon^2$ (операция 3). Наконец, с помощью простого соотношения (2.6) аналогично (2.8) определяется уточненное значение $k^{(1)} = k(p^{(1)}) = -Y'(\xi^{(1)}, p^{(1)})/U(\xi^{(1)}, p^{(1)})$ – заключительная операция 5.

На основе найденных величин вычисляется следующее уточненное значение $p(l)$:

$$p^{(2)} = p^{(1)} + \varepsilon^{(1)} l k^{(1)}, \quad |p - p^{(2)}| \leq c\varepsilon^{(1)2} \leq cd^2\varepsilon^4 \quad (3.1)$$

Выражение $p^{(2)}$ (3.1) является основой (операцией 1) для проведения расчетов на следующей (второй) итерации, приводящей к невязкам $O(\varepsilon^4)$ по решению и граничному условию. Как и при вычислении $p^{(1)}$ (2.9), без потери точности по степеням ε в выражении для $k^{(1)}$ можно положить $\xi^{(1)} = l$. После второй итерации решение краевой задачи будет построено с погрешностью $O(\varepsilon^{1/2}) = O(\varepsilon^4)$. Далее процедура может быть неограниченно продолжена. Действительно, произвольное $(n+1)$ -е приближение строится по индукции рекуррентно на основе n -го приближения, т.е. чисел $p^{(n)}, \xi^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, k^{(n)}$ и функций $Y_{(n)}, Y'_{(n)}, U_{(n)}$. Следующие операции полностью определяют искомое $(n+1)$ -е приближение ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} p^{(n+1)} &= p^{(n)} + \varepsilon^{(n)} l k^{(n)}, \quad \xi^{(n+1)} = \xi(p^{(n+1)}) = \arg_x Y(x, p^{(n+1)}) \\ \varepsilon^{(n+1)} &= 1 - \xi^{(n+1)} / l, \quad |\varepsilon^{(n+1)}| \leq d(\varepsilon^{(n)})^2 \leq d^3(\varepsilon^{(n-1)})^4 \leq \dots \leq d^{-1}(d\varepsilon)^{\theta(n+1)}, \quad \theta(n) = 2^n \\ k^{(n+1)} &= k(p^{(n+1)}) = -Y'(\xi^{(n+1)}, p^{(n+1)})/U(\xi^{(n+1)}, p^{(n+1)}) = \\ &= -Y'(l, p^{(n+1)})/U(l, p^{(n+1)}) + O((\varepsilon^{(n+1)})^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$Y'' = f(x, Y, Y'), \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = p^{(n+1)}, \quad Y_{(n+1)} = Y(x, p^{(n+1)})$$

$$U'' = (\partial f / \partial Y)_{n+1} U + (\partial f / \partial Y')_{n+1} U', \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = 1, \quad U_{(n+1)} = U(x, p^{(n+1)})$$

Для определенных выражениями (3.2) искомых величин имеют место следующие оценки погрешностей:

$$\begin{aligned} |p - p^{(n+1)}| &\leq c |\varepsilon^{(n+1)}|, \quad |k - k^{(n+1)}| \leq c |\varepsilon^{(n+1)}|, \quad |\varepsilon^{(n+1)}| \leq d^{-1}(d\varepsilon)^{\theta(n+1)} \\ \max_x |y - Y_{(n+1)}| + l \max_x |y' - Y'_{(n+1)}| &\leq C |\varepsilon^{(n+1)}| \\ \max_x |u - U_{(n+1)}| + l \max_x |u' - U'_{(n+1)}| &\leq C |\varepsilon^{(n+1)}|, \quad x \in [0, \max(l, \xi^{(n+1)})] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, $(n+1)$ -й шаг итерационной процедуры полностью выполнен согласно (3.2), (3.3). Отметим, что операция высокоточного с погрешностью $O((\varepsilon^{(n+1)})^2)$ интегрирования задачи Коши для Y, U является необходимой в предлагаемом алгоритме. Используемое определение нуля $\xi^{(n+1)}$ функции $Y(x, p^{(n+1)})$ вблизи значения $x = l$ (в $\varepsilon^{(n+1)}$ -окрестности) может потребовать дополнительных вычислительных затрат. Их

можно избежать, если преобразовать основную формулу для уточнения $p(l)$, а именно, представить ее в виде

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} + P_{(n)}, \quad P_{(n)} = P(p^{(n)}) = -Y(l, p^{(n)})/U(l, p^{(n)}) \\ \varepsilon^{(n)} l Y'(\xi^{(n)}, p^{(n)}) = Y(l, p^{(n)}) + O(\varepsilon^{(n)2}) \quad (3.4)$$

При выводе формулы для $P_{(n)}$ (3.4) используются равенства $\xi^{(n)} = l(1 - \varepsilon^{(n)})$, $Y(\xi^{(n)}, p^{(n)}) = 0$, служащие определением $\xi^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$. В результате преобразования (3.4) алгоритм (3.2) упрощается, но при этом требуется высокоточное с погрешностью $O(\varepsilon^{(n+1)2})$ вычисление невязки по y . Определение величин $\xi^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ целесообразно производить а) на начальном этапе ($n = 0$) с целью исследования "геометрической картины" поведения приближенных траекторий (при $p = p^*$) вблизи $x = l$ и уверенного суждения о существовании решения краевой задачи и б) на конечном шаге итерационной процедуры для контроля невязки по x . В результате будет построено высокоточное решение, имеющее сколь угодно малые невязки по ординате y , касательной y' и абсциссе x , что весьма важно для ряда прикладных исследований. Как неоднократно отмечалось, корректировка решения на основе определения (измерения или вычисления) величин $\xi^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ часто является актуальной для практических задач (например, при корректировке "стрельбы").

Известно, что метод ускоренной сходимости позволяет весьма быстро получить практически точные значения искомых величин. Так при $\varepsilon d \approx 0,1$ достаточная для практики относительная погрешность порядка $10^{-4} - 10^{-8}$ достигается за две - три итерации. Методы типа пристрелки, последовательных приближений и т.п. требуют существенно большего числа итераций. Для достижения погрешности порядка 10^{-N} при $N \gg 1$ имеют место следующие оценки: $n \approx 3,3N$ ($n \approx 10 - 20$) по методу пристрелки, $n \approx N$ ($n \approx 4 - 8$) по методу последовательных приближений [15], $n \approx 1,4 \ln N$ ($n \approx 2 - 3$) по методу ускоренной сходимости. Изложенный алгоритм весьма экономичен и не приводит к накоплению ошибок округлений при численных расчетах на ЭВМ.

Наряду с рассмотренными условиями "первого рода" (1.2) для практики важно исследование краевых задач с граничными условиями других типов. Приведем весьма кратко аналогичные вышеизложенному алгоритмы их решения.

4. Решение краевых задач с другими типами граничных условий. Для исследования прикладных вариационных задач механики наряду с рассмотренным выше существенный интерес представляют случаи граничных условий "второго" и "третьего" родов, а также смешанных, например условий периодичности. В общей ситуации граничные соотношения могут быть также нелинейными по y , y' для $x = 0, l$. Рассмотрим некоторые из них.

4.1. Краевые условия "второго рода". Пусть требуется найти решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям $y'(0) = y'(l) = 0$. Напомним, что случай ненулевых условий, см. (1.1), весьма просто сводится к изучаемому. Тогда по аналогии с п. 2, 3 для приближенного решения задач Коши типа (2.1), (2.7) должна быть найдена оценка h^* недостающего на левом ($x = 0$) или правом ($x = l$) концах значения y : $h(l) = y(0, l)$ или $h(l) = y(l, l)$. Соответствующие левому концу (ради определенности, аналогично правому) граничные условия для Y, U имеют вид

$$Y(0, h^*) = h^*, \quad Y'(0, h^*) = 0; \quad U(0, h^*) = 1, \quad U'(0, h^*) = 0 \quad (4.1)$$

Функции $Y_{(0)} = Y(x, h^*)$, $U_{(0)} = U(x, h^*)$ и их производные считаются построенными с требуемой точностью на некотором интервале $0 \leq x \leq l^*$, см. разд. 2, как решение задачи Коши с данными (4.1). Затем по аналогии с формулами (2.2) находится ближайший к $x = l$ корень $\xi = \xi(h^*)$ функции $Y(x, h^*)$, который считается простым. Применим для определения неизвестной $h = h(l)$ разложение типа (2.6):

$$h(l) = h(\xi) + \varepsilon l q(\xi) + O(\varepsilon^2), \quad h(\xi) = h^*, \quad q(\xi) = h'(\xi) \equiv q^* \quad (4.2)$$

Используя граничное условие для "функции чувствительности" $v = \partial y / \partial l$ вида $v(0, l) = -h'(l)$, получим представления

$$h^{(1)} = h^{(0)} + H_{(0)}, \quad h^{(0)} = h^*, \quad H_{(0)} = \varepsilon^{(0)} l q^{(0)}, \quad q^{(0)} = q^* \quad (4.3)$$

$$q^* = -Y''(\xi, h^*) / U'(\xi, h^*) = -Y''(l, h^*) / U'(l, h^*) + O(\varepsilon)$$

$$H_{(0)} = -\varepsilon l f(l, Y(l, h^*), 0) / U'(l, h^*) = -Y'(l, h^*) / U'(l, h^*) + O(\varepsilon^2), \quad U'(l, h^*) \neq 0$$

Итак, вычисление уточненной оценки $h^{(1)}$ (4.3) требует интегрирования задачи Коши для Y, U с условиями (4.1), нахождения корня ξ и арифметических операций. Как и ранее, модификация выражения для добавки $H_{(0)}$ (4.3) позволяет избавиться от процедуры высокоточного вычисления корня ξ , что упрощает и ускоряет процесс построения оценки $h^{(1)}$, а также последующих $h^{(n)}$ и $Y_{(n)} = Y(x, h^{(n)})$, однако требует определения невязки по y' с высокой точностью.

Дальнейшие итерации осуществляются по схеме, полностью аналогичной (3.2). Отличие заключается в операции определения корней $\xi^{(n)}$ и изменении выражений для коэффициентов $H_{(n)} = \varepsilon^{(n)} l q^{(n)}$, см. (4.3). Как и в случае краевых условий "первого рода" (1.2), данный алгоритм приводит к квадратичной сходимости по исходному малому параметру ε . Отметим, что при $f = f(x, y')$ краевая задача вырождается, а искомое решение y будет определено с точностью до произвольной постоянной. Использование предлагаемого подхода уточнения решения на основе вычисления или измерения величин $\xi^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ предпочтительнее в тех задачах, для которых высокоточное определение невязки по производной $y'(l)$ оказывается затруднительным, например в задачах наведения или придания требуемой ориентации объектов различного назначения.

4.2. Нелинейные краевые условия. Рассмотрим для определенности нелинейные граничные соотношения "третьего рода", разрешенные относительно $y(0), y(l)$ вида ($y = y(x, l)$):

$$y(0, l) = \varphi(y'(0, l)), \quad y(l, l) = \psi(l, y'(l, l)) \quad (4.4)$$

Считаем, что известна оценка p^* производной $p(l) = y'(0, l)$; тогда оценка h^* величины $h(l) = y(0, l)$ равна $h^* = \varphi(p^*)$, см. (4.4). И наоборот, если имеется оценка h^* , то величина p^* также определяется этим соотношением. Чтобы получить уточненные значения неизвестных $h(l)$ и $p(l)$, нужно решить две задачи Коши для уравнений (2.1), (2.7) со следующими данными на левом конце

$$Y(0, h^*, p^*) = h^*, \quad Y'(0, h^*, p^*) = p^* \quad (h^* = \varphi(p^*)) \quad (4.5)$$

$$1) U(0) = 1, \quad U'(0) = 0; \quad 2) U(0) = 0, \quad U'(0) = 1$$

Зависимость функции U (4.5) (и далее Y) от параметров h^*, p^* не указывается ради краткости, но она подразумевается. Используя аналогичный вышеизложенным подход, на основе известных функций $Y_{(0)}, Y_{(0)1}, U_{(0)2}$ получим уточненные значения p, h :

$$p^{(1)} = p^* + \varepsilon l k^*, \quad h^{(1)} = h^* + \varepsilon l q^* \quad (q = k\varphi'(p)) \quad (4.6)$$

$$k^* = K / D, \quad q^* = \varphi'(p^*) K / D, \quad K \equiv Y'_{(0)}(\xi) - \partial \psi^* / \partial \xi - (\partial \psi^* / \partial Y') Y''_{(0)}(\xi)$$

$$D \equiv (\partial \psi^* / \partial Y') [U'_{(0)1}(\xi) \varphi'(p^*) + U'_{(0)2}(\xi)] - U_{(0)1}(\xi) \varphi'(p^*) - U_{(0)2}(\xi) \neq 0$$

При необходимости контроля невязки по x предварительно должен быть найден корень ξ из второго соотношения (4.4): $Y_{(0)}(x) = \psi(x, Y'_{(0)}(x))$, ближайший к $x = l$. Функция ψ^* в (4.6) есть выражение $\psi(x, y')$ при $x = \xi, y' = Y'_{(0)}(\xi)$. Как и ранее,

комплексы εlk^* , εlq^* (4.6) могут быть преобразованы по аналогии с (3.4), (4.3) и представлены в форме, не требующей операции определения ξ , ε

$$\varepsilon lK = Y_{(0)}(l) - \psi(l, Y'_{(0)}(l)) + O(\varepsilon^2) \equiv \Psi(l, [Y_{(0)}(l)]) + O(\varepsilon^2) \quad (4.7)$$

$$p^{(1)} = p^* + \Psi(l, [Y_{(0)}(l)]) / D, \quad h^{(1)} = h^* + \varphi'(p^*) \Psi(l, [Y_{(0)}(l)]) / D$$

Величина Ψ (4.7) характеризует невязку в выполнении граничного условия при $x = l$. Значение коэффициента D может быть также вычислено при $\xi = l$ без потери точности по степеням ε . Значения ξ , ε определяют невязку решения по x и фактически свидетельствуют о его существовании. На основе уточненных величин $h^{(1)}$, $p^{(1)}$ вычисляются $Y_{(1)}$, $U_{(1)}$, а затем $h^{(2)}$, $p^{(2)}$ и $Y_{(2)}$, $U_{(2)}$, и т.д. Совершенно аналогично строится алгоритм метода ускоренной сходимости для краевых условий вида $\varphi(y(0)) = y'(0)$, $\psi(l, y(l)) = y'(l)$, а также более общих: $\varphi(y(0), y'(0)) = 0$, $\psi(l, y(l), y'(l)) = 0$.

Выводы. Изложенная рекуррентная процедура уточнения решения нелинейной краевой задачи весьма проста, экономична и не требует сложного программного обеспечения. Практически она приводит к удовлетворительным результатам при использовании программируемых микрокалькуляторов, позволяющих производить вычисления с точностью 10^{-6} – 10^{-8} ; требования к оперативной памяти невелики, см. решение примеров в п. 5. Применение современных ЭВМ с помощью разработанного алгоритма ускоренной сходимости позволит успешно проводить высокоточные массовые расчеты сложных нелинейных краевых задач (параметрический синтез систем). Конечно, качество вычислительного процесса существенно определяется аналитическими свойствами гладкости уравнений и точностью начального приближения, т.е. величиной ε . Неформальный предварительный этап построения начального приближения значительно облегчается применением вариационных подходов на основе функционала (1.1) и граничных условий с учетом физических интуитивных представлений о характере оптимальной траектории $y(x, l)$, а также с помощью различных процедур продолжения по параметрам задачи. Как показывает вычислительная практика, неудачный выбор пробной функции обычно приводит к одной дополнительной итерации.

Приведем иллюстративные расчеты нелинейных краевых задач, имеющих интересное механическое содержание, в значительной мере позволяющие осуществить тестирование алгоритма на основе аналитических соотношений.

5. Примеры. Исследуем некоторые существенно нелинейные краевые задачи с граничными условиями "первого рода", встречающиеся в различных разделах механики (гидродинамике, акустике и др.).

5.1. Рассмотрим нелинейную краевую задачу, представляющую интерес для магнитной гидродинамики [6, 7]:

$$\Delta u = \alpha \exp(\beta u), \quad u = u(x, y), \quad (x, y) \in \Pi \setminus \Gamma, \quad u|_{\Gamma} = 0 \quad (5.1)$$

Здесь Δ – двумерный оператор Лапласа, Π – некоторая связная область, для примера прямоугольник; Γ – граница области. Положительные параметры λ , β определяются физическими свойствами системы. Уравнение (5.1) содержит сильную экспоненциальную нелинейность по искомой функции u . Краевая задача может быть представлена в виде вариационной. Будем изучать упрощенный вариант задачи (5.1), когда неизвестная функция u не зависит от одной из переменных, например от y : $u = u(x)$ [7]. В результате получим одномерную сильно нелинейную краевую задачу типа (1.2), не содержащую u' :

$$u'' = e^u, \quad u = u(x); \quad u(0) = u(l) = 0 \quad (5.2)$$

Здесь произведено обезразмеривание ($\alpha, \beta = 1$); параметром задачи является

приведенная длина интервала l . Уравнение (5.2) допускает интегрирование в элементарных функциях ($u = u(x, l)$):

$$e^{-u/2} = (\sqrt{2}\omega)^{-1} \cos(\omega x + \delta), \quad \omega = \frac{1}{2}(2 - p^2)^{1/2}, \quad p = p(l) = u'(0, l) \quad (5.3)$$

$$p = -2(\frac{1}{2} - \omega^2)^{1/2}, \quad -\sqrt{2} \leq p \leq 0, \quad \cos \delta = \sqrt{2}\omega, \quad \cos(\omega l + \delta) = \sqrt{2}\omega$$

Последние два соотношения (5.3), определяющие неизвестные постоянные интегрирования δ, ω (или δ, p), являются следствием краевых условий (5.2). При $l = 1$ решение имеет вид [7]:

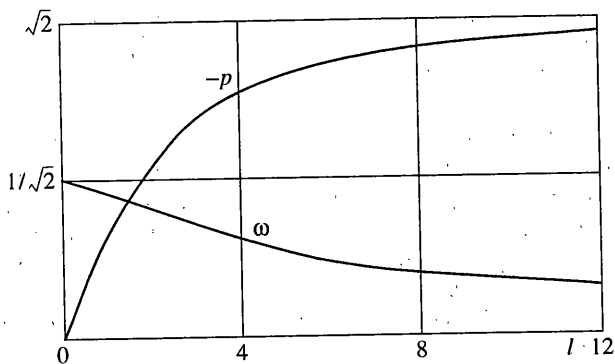
$$u(x, 1) = 2 \ln[(c^* / \sqrt{2}) \sec(\frac{1}{2} c^* (x - \frac{1}{2}))] \quad (5.4)$$

$$c^* = \operatorname{arg}_c[\sqrt{2} - c \sec(c/4)] \approx 1,336056 \quad (p(1) \approx -0,463633)$$

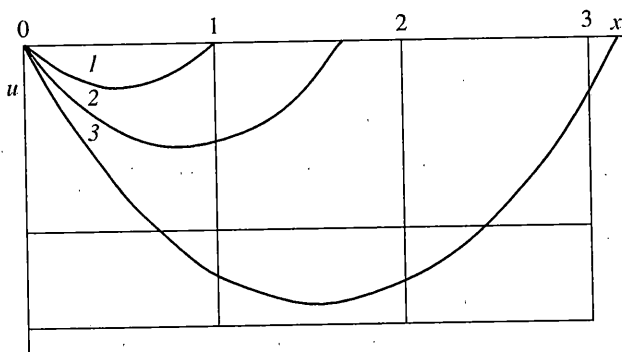
Заметим, что выражения типа (5.4) приведены [7] с целью иллюстрации эффективности расчетов по методу квазилинеаризации, также обладающему привлекательным свойством квадратичной сходимости. Однако этот метод применим лишь для весьма ограниченного класса краевых задач, обладающих свойством "монотонности последовательных приближений", в частности, для данной задачи. Условие "монотонности" приводит к существенному ограничению промежутка изменения аргумента x , см. фиг. 1, т.е. подход имеет локальную по отношению к x сходимости. Изложенный в п. 2-4 метод не связан этим весьма существенным ограничением и может применяться на произвольном ограниченном промежутке $x \in [0, l]$. Предполагается лишь малость параметра ε , что обусловлено удачным выбором начального приближения $p^* \approx p$.

В вычислительном аспекте рассматриваемый пример интересен тем, что решение краевой задачи (5.2) согласно (5.3) существует для произвольных значений параметра $l > 0$, но для весьма узкого диапазона значений p или ω . Оно имеет указанный выше монотонный характер; случай $l = 1$ изучен в [7]. Продолжим исследование задачи для произвольных значений $l > 0$, связанных с параметром $\omega, \omega^2 \leq 1/2$, соотношением $\sqrt{2}\omega \sec(1/2 \omega l) = 1$, которое переходит в приведенное (5.4) при $l = 1, \omega = c/2$. Решение этого трансцендентного уравнения можно получить графически посредством кривой $l = (2/\omega) \operatorname{arc} \cos(\sqrt{2}\omega)$. Связь заданного параметра l и искомой величины $p(l) = u'(0, l)$ осуществляется дополнительным соотношением из (5.3): $\omega = \frac{1}{2}(2 - p^2)^{1/2}$. Графики зависимостей $p(l), \omega(l)$ представлены на фиг. 2. Соответствующие значениям $l = 1; 1,6855; 3,1416$ (значения $p = -0,4636; -0,7; -1$) семейство решений $u(x, l)$ (кривые 1-3) приведено на фиг. 3. При изменении параметра ω от $\omega = 0$ до $\omega = 1/\sqrt{2}$ величина p монотонно изменяется от $p = -\sqrt{2}$ до $p = 0$. Эти вариации параметров ω, p отвечают изменению l от $l = \infty$ до $l = 0$. Вне указанных промежутков $\omega \in [0, 1/\sqrt{2}]$ или $p \in [-\sqrt{2}, 0]$ краевая задача решения не имеет. Нетрудно установить, что решение $u(x, l)$ задачи (5.2) симметрично относительно середины интервала $x = l/2$, см. (5.3), (5.4) и фиг. 3.

Расчеты по методу ускоренной сходимости (п. 2, 3) подтвердили с требуемой точностью (невязка порядка 10^{-7}) результаты расчетов [7] при $l = 1$ и отвечают точным значениям при $l > 0$. Согласно п. 2 с помощью вариационного подхода предварительно была получена грубая оценка $p^* = -0,37$ (относительная погрешность порядка 25%) для пробной функции $u^*(x) = -0,12 \sin \pi x$ при $l = 1$, см. (5.4) и фиг. 2, 3. Для достижения указанной точности потребовалось две итерации (параметр $\varepsilon \approx 0,2$). Отметим, что в задачах подобного типа удобно использовать процедуру продолжения по параметрам, в данном случае по параметру l с применением экстраполяции для построения высокоточной начальной оценки p^* , отвечающей новым значениям параметров.



Фиг. 2



Фиг. 3

5.2. Рассмотрим класс задач динамики точки или распространения лучей (звуковых, оптических) в неоднородных средах, а также других, удовлетворяющих принципу Ферма [1, 5]. Приведем типичную постановку вариационной задачи о движении материальной точки в силовом поле, сообщаемом ей скорость $v(x, y) > 0$. Требуется найти гладкую кривую, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_f, y_f) , такую, чтобы время T скольжения точки вдоль этой кривой "без трения" было наименьшим [1-7]:

$$T[y] = \int_{x_0}^{x_f} (1 + y'^2)^{1/2} v^{-1}(x, y) dx \rightarrow \min_y, \quad y(x_0, f) = y_0, f \quad (5.5)$$

Если рассматривается однородное поле сил тяготения, для которого $v = (2gy)^{1/2}$, где g – ускорение этих сил (задача о брахистохроне), то имеется аналитическое решение в параметрической форме (циклоида), найденное Бернулли [1]. Далее для простоты рассматривается случай $v = v(y)$; тогда уравнение Эйлера – Лагранжа для функционала (5.5) полностью интегрируется аналитически посредством несобственной квадратуры

$$x - x_0 = \pm \int_{y_0}^y [c^2 - v^2(z)]^{-1/2} v(z) dz, \quad y(x_f) = y_f \quad (5.6)$$

Зависимость x и y неоднозначная; неизвестная постоянная c определяется из неявного соотношения (5.6) при $x = x_f$, $y = y_f$ как функция трех положительных параметров $x_f - x_0$, y_0 , y_f и, возможно, других, входящих в выражение функции $v(y)$. Большое число параметров усугубляет трудности аналитического или численного

решения задачи и его исследования. Предпочтительнее применение изложенных выше в п. 2, 3 подходов на основе численно-аналитического метода ускоренной сходимости на всех этапах решения и его анализа.

Рассмотрим подробнее модельную задачу о распространении луча (звукового или оптического) в среде, плотность которой зависит только от координаты y ; обозначим через $v = v(y)$ скорость звука или света ($v > 0$). Предположим, что в точке $x = x_0 = 0$, $y = y_0 \geq 0$ имеется источник излучения, а в точке $x = x_f = l > 0$, $y = y_f \geq 0$ – приемник. Требуется найти траекторию луча – гладкую кривую, соединяющую обе точки. Будем считать, что при $y < 0$ среда непроницаема для лучей и поглощает их: $v(y) \equiv 0$, $y < 0$. Возможны другие ограничения геометрического характера; такие ситуации часто встречаются на практике. Считается, что при $y \geq 0$ скорость $v(y) > 0$ и аппроксимируется линейной функцией $v(y) = v_0(1 + ay)$, где $v_0 > 0$, a – постоянные параметры среды. Введением безразмерных нормированных переменных и параметров функционал $T[y]$ (5.5) и краевая задача приводятся к виду

$$T[y] = \int_0^1 (1 + y'^2)^{1/2} (1 + ay)^{-1} dx \rightarrow \min_y, \quad y \geq 0, \quad l = 1 \quad (5.7)$$

$$y'' + a(1 + y'^2)(1 + ay)^{-1} = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y(1) = y_f, \quad y_{0,f} \geq 0$$

Согласно (5.6) краевая задача (5.7) допускает явное аналитическое решение (x – неоднозначная функция y):

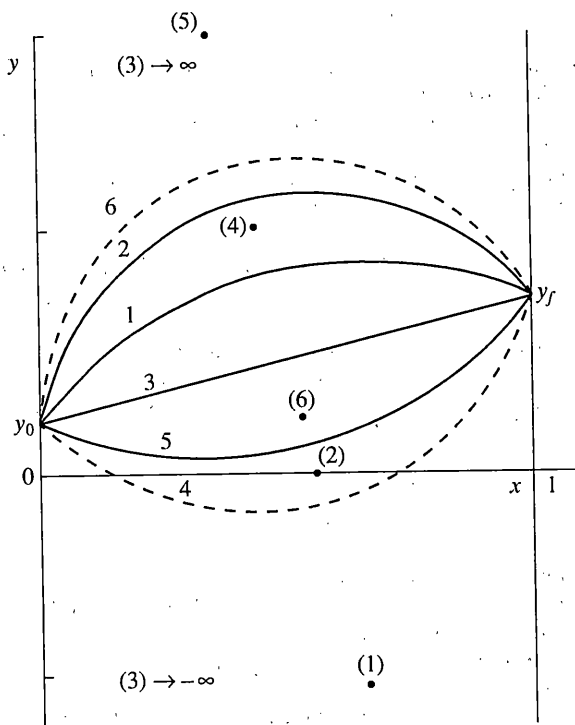
$$ax = \mp [c^2 - v^2(z)]^{1/2} \Big|_{z=y_0}^{z=y} \quad (5.8)$$

Кривая $y(x)$ (5.8) имеет вид дуги окружности. Неизвестная c определяется через x_f , y_0 , y_f и параметр a из соотношения (5.8), взятого при $x = 1$, $y = y_f$. Аналитическое представление для $y = y(x, y_0, y_f, a)$ оказывается весьма громоздким. Однако ему можно придать простую геометрическую интерпретацию [7]. Для этой цели введем координату $\eta = a^{-1} + y$ вместо y ; при этом $\eta_{0,f} = a^{-1} + y_{0,f}$. На плоскости (x, η) имеем две точки $(0, \eta_0)$ и $(1, \eta_f)$. В переменных x, η решение задачи (5.7), (5.8) (без учета ограничения $\eta \geq a^{-1}$) есть дуга окружности, соединяющая эти точки, центр которой лежит на оси x . В исходных переменных x, y центр окружности лежит на оси, сдвинутой на $-a^{-1}$: вниз при $a > 0$, вверх при $a < 0$, см. фиг. 4. Очевидно, что при $a \geq 0$ решение существует и единственно, см. кривые 1–3. Если же $a < 0$, то решение существует не всегда: линия визирования должна быть достаточно "высоко" или величина $|a|$ достаточно мала, см. кривую 5. В противном случае "классическая" траектория не существует – дуга окружности 4 пересекает ось x , а в случае кривой 6 не выполняется условие $v > 0$ ($y \leq -a^{-1}$); $a = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$).

Из элементарных геометрических соотношений сравнительно просто могут быть определены неизвестные параметры $c(y_0, y_f, a)$, $p(y_0, y_f, a)$, а тем самым и траектории $y(x, y_0, y_f, a)$. Для иллюстрации эффективности вычислений по методу ускоренной сходимости рассмотрим частный случай граничных условий: $y_{0,f} = 0$, т.е. излучатель и приемник находятся на оси x ; тогда параметр среды $a \geq 0$ (при $a < 0$ решение не существует). Геометрические построения упрощаются и приводят к выражениям

$$a^2 = 4(c^2 - 1), \quad p^2(a) = c^2 - 1, \quad p(a) = a/2 \quad (5.9)$$

Зависимость $p(a)$ (5.9) устанавливается практически точно с помощью численных расчетов. Действительно, при $a = 1$ имеем $p^{(1)} = 0,5$; возьмем для $p(1)$ грубую оценку $p^* = 0,45$. После первой итерации устанавливаем, что $p^{(1)} = 0,5 + O(10^{-7})$. Аналогичные выражения получаются для других значений параметра $a \geq 0$.



Фиг. 4

Таким образом, использование тестовых примеров, имеющих механическое содержание, свидетельствует о высокой эффективности численно-аналитического метода ускоренной сходимости для решения нелинейных краевых задач, порождаемых вариационными принципами механики, в частности, принципом Ферма [1]. Представляет интерес дальнейшее изучение задачи о звуковом или электромагнитном "канале" для более сложной зависимости $u(y)$, например в океане или атмосфере [12]. Для приложений весьма важной является общая ситуация $u = u(x, y)$, требующая привлечения современных вычислительных средств.

Наряду с эффективной разработкой алгоритмов решения одномерных задач принципиальное значение имеет развитие конструктивных подходов к исследованию многомерных нелинейных краевых задач, в том числе для уравнений более высокого порядка с учетом изопериметрических условий и ограничений.

Выше посредством решения модельных задач, имеющих ясное механическое содержание, проиллюстрированы вычислительные возможности предложенного подхода. Авторы использовали данный метод при исследовании нелинейных краевых задач, описывающих стационарные течения вязкой жидкости [16] и вязкопластической среды [17] в плоском конфузоре, для широкого диапазона определяющих параметров. Эти задачи допускают вариационную формулировку. Изложенным выше методом получены неизвестные ранее результаты, получение которых с помощью известных методов представляется проблематичным.

Авторы благодарят Ф.Л. Черноусько за обсуждение результатов работы и А.А. Чайковского за помощь в оформлении графиков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды 99-01-00222, 99-01-00276).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вариационные принципы механики (ред. Л.С. Полак). М.: Физматгиз, 1959, 932 с.
2. *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. V. 1. Springer, Berlin, 1968. = *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
3. *Ахиезер Н.И.* Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат, 1955. 247 с.
4. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424 с.
5. *Young L.C.* Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. Philadelphia: W.B. Saunders Co., 1969. = *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
6. *Collatz L.* Funktionalanalysis und numerische mathematik. Berlin: Springer-Verlag, 1964. = *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 447 с.
7. *Bellman R.E., Kalaba R.E.* Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems. N.Y.: American Elsevier Publ. Co., INC., 1965. = *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 188 с.
8. *Чернуосько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
9. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
10. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Эффективный метод исследования колебаний существенно неоднородных распределенных систем // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 466–478.
11. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Эффективное решение обобщенной задачи Штурма-Лиувилля // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 3. С. 323–326.
12. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.
13. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
14. *Poincaré H.* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. 3 vols. Paris. 1892, 1893, 1899. = *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.; Т. 2. М.: Наука, 1972. 999 с.
15. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Эффективное численно-аналитическое решение вариационных задач механики // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 5. С. 624–627.
16. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А., Нестеров С.В.* Численно-аналитическое исследование стационарного течения вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 1. С. 44–48.
17. *Климов Д.М., Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А.* Течение вязкопластической среды с малым пределом текучести в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 1. С. 37–41.

Москва

Поступила в редакцию
18.10.1999