МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2001

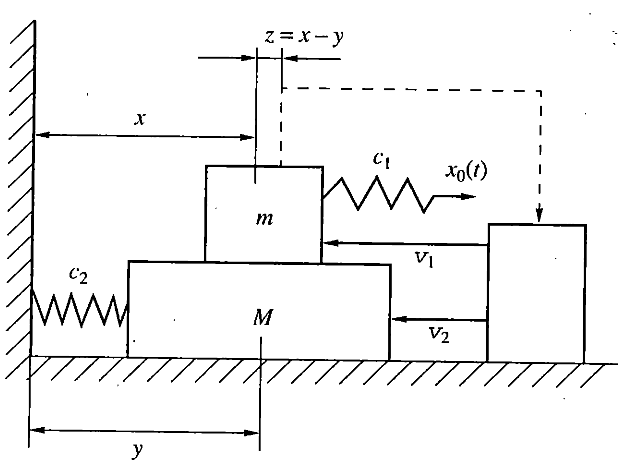
УДК 534.015

 М.Я. ИЗРАИЛОВИЧ

УПРАВЛЯЕМОЕ ГАШЕНИЕ ФРИКЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ С ОТНОСИТЕЛЬНЫМ СКОЛЬЖЕНИЕМ ТЕЛ

Рассматривается задача о синтезе управления, обеспечивающего снижение амплитуды автоколебаний, обусловленных скользящим взаимодействием двух масс, одна из которых упруго закреплена, а к другой через упругую связь приложено внешнее кинематическое воздействие, задающее ее рабочее перемещение. Решение получено на основе процедуры, включающей гармоническую линеаризацию нелинейной автоколебательной характеристики с разделением движений на быструю (автоколебательную) составляющую и медленную, соответствующую внешнему воздействию, определяющему кинематически задаваемое перемещение, и вариационных методов. Решение получено в замкнутой форме.

1. Рассматривается двухмассовая динамическая модель механической системы, (фиг.), в которой рабочее перемещение задается как кинематическое воздействие $x_0(t)$, прилагаемое к верхней массе. В системе возникают фрикционные автоколебания, обусловленные скользящим взаимодействием двух контактирующих масс. Динамика такой системы при конкретной характеристике фрикционных автоколебаний, задаваемой в виде $f(\dot{z}) = k_0 \operatorname{sign} \dot{z} - k_1\dot{z} + k_2\dot{z}^3$ и законе кинематического перемещения с постоянной скоростью $x_0(t) = vt$ подробно исследована в работе [1] на основе применения асимптотических методов. Поскольку высокочастотная автоколебательная составляющая создает динамические искажения при рабочем перемещении верхней массы, то является актуальной задача об уменьшении интенсивности автоколебаний



за счет активных управляющих воздействий, которая и рассматривается в настоящей работе.

Предполагается, что силовые управляющие воздействия, предназначенные для снижения интенсивности автоколебаний, прилагаются к обеим массам, как показано на фигуре. В соответствии с этим управления движения системы имеют вид

$$ms^2x + c_1(x - x_0) = f(sz) - v_1 \tag{1.1}$$

$$(Ms^2 + c_2)y = -f(sz) + v_2, \quad z = x - y \tag{1.2}$$

где s – оператор дифференцирования, $x_0(t)$ – заданный закон кинематического перемещения верхней массы, $f(sz)$ – нелинейная характеристика, описывающая источник возбуждения фрикционных автоколебаний при скольжении масс, v_1, v_2 – подлежащие определению силовые управляющие воздействия, которые предполагаются линейно зависимыми $v_1 = \eta u$, $v_2 = (1 - \eta)u$; η – константа. Такой способ задания управляющих воздействий обусловлен тем, что при приложении управления только к одной из масс, как показано ниже, система оказывается неуправляемой. Вместе с тем, нет необходимости задавать два независимых управляющих воздействия, так как это приведет к излишнему усложнению алгоритма управления. Достаточно задать два линейно зависимых управления, а входящий в линейную зависимость параметр η подобрать таким образом, чтобы обеспечить желаемые динамические свойства замкнутой системы, а именно, условие отсутствия режима, отличного от расчетного номинального.

В результате преобразований уравнений (1.1), (1.2) $x = (ms^2 + c1)^{-1}[f(sz) - \eta u + c_1x_0]$, $y = (Ms^2 + c_2)^{-1}[-f(sz) + (1 - \eta)u]$ определяется уравнение относительно z:

$$(ms^2 + c_1)(Ms^2 + c_2)z = [(m + M)s^2 + c_1 + c_2]f(sz) -$$

$$- [\eta(Ms^2 + c_2) + (1 - \eta)(ms^2 + c_1)]u + (Ms^2 + c_2)c_1x_0 \tag{1.3}$$

2. Проанализируем сначала динамику системы (1.3) при отсутствии управления. Анализ осуществляется методом гармонической линеаризации с разделением движения на медленную составляющую, соответствующую кинематическому перемещению $x_0(t)$, и автоколебательную высокочастотную составляющую [2]. При этом предполагается, что $x_0(t)$ является медленно меняющейся функцией, а производными $s^2x_0(t)$, $s^3x_0(t)$, $s^4x_0(t)$ можно пренебречь. С учетом этого решение уравнения (1.3) ищется в виде

$$z = z_0 + z_1 \tag{2.1}$$

где $z_0(t)$ – медленно меняющаяся составляющая, $z_1 = A \sin \psi$ – высокочастотная составляющая, $\psi = \omega t + \varphi$ – полная фаза.

Подставляя (2.1) в (1.3) при $u = 0$, осуществляя гармоническую линеаризацию нелинейности $f(sz)$, получим уравнения соответственно для z_0 и z_1:

$$c_1c_2z_0 = (c_1 + c_2)f_0 + c_1c_2x_0 \tag{2.2}$$

$$(ms^2 + c_1)(Ms^2 + c_2)z_1 = [(m + M)s^2 + c_1 + c_2]f_2s/\omega \tag{2.3}$$

$$f_0(A, \omega, sz_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(sz_0 + \omega A\cos\psi)d\psi \tag{2.4}$$

$$f_2(A, \omega, sz_0) = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(sz_0 + \omega A\cos\psi)\cos\psi d\psi \tag{2.5}$$

где f_0, f_2 – коэффициенты гармонической линеаризации нелинейности $f(sz)$.

При этом предполагается

$$f_1(A, \omega, sz_0) = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(sz_0 + \omega A\cos\psi)\sin\psi d\psi = 0$$

что имеет место для широкого класса характеристик автоколебательного типа $f(sz)$.

Из уравнения (2.2) определяется медленная составляющая решения

$$z_0(t, A, \omega) = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} f_0 + x_0(t) \tag{2.6}$$

В результате подстановки (2.6) в (2.5) определяется окончательное выражение для $f_2(A, \omega)$. Полагая в характеристическом уравнении уравнения (2.3) $s = j\omega$ и отделяя вещественные и мнимые части, получим

$$(c_1 - m\omega^2)(c_2 - M\omega^2) = 0 \tag{2.7}$$

$$[c_1 + c_2 - (m + M)\omega^2] f_2(A, \omega) = 0 \tag{2.8}$$

Из (2.7) определяется частота автоколебаний: $\omega_1 = \sqrt{c_1/m}$, либо $\omega_2 = \sqrt{c_2/M}$. Далее, из (2.8) следует, что амплитуда A и частота ω связаны уравнением

$$f_2(A, \omega) = 0 \tag{2.9}$$

где $f_2(A, \omega)$ в общем случае рассчитывается с учетом (2.6). Отсюда определяется амплитуда автоколебаний A.

3. При введении управляющего воздействия решение уравнения (1.2) также ищется в виде (1.3). Осуществляя гармоническую линеаризацию неизвестной функции $u(z, x_0)$, получим уравнения для z_0 и z_1:

$$c_1 c_2 z_0 = (c_1 + c_2) f_0 + c_1 c_2 x_0 - [(1 - \eta) c_1 + \eta c_2] u_0 \tag{3.1}$$

$$(ms^2 + c_1)(Ms^2 + c_2) z_1 = [(m + M)s^2 + c_1 + c_2] f_2 \frac{s}{\omega} z_1 -$$

$$-[(1 - \eta)(ms^2 + c_1) + \eta(Ms^2 + c_2)]\left(u_1 + u_2 \frac{s}{\omega}\right) z_1 \tag{3.2}$$

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\psi \tag{3.3}$$

$$u_1 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} u \sin\psi d\psi \tag{3.4}$$

$$u_2 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} u \cos\psi d\psi \tag{3.5}$$

Полагая в характеристическом уравнении уравнения (3.2) $s = j\omega$ и отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$(c_1 - m\omega^2)(c_2 - M\omega^2) = -b(\omega, \eta) u_1 \tag{3.6}$$

$$[c_1 + c_2 - (m + M)\omega^2] f_2 = b(\omega, \eta) u_2$$

$$b(\omega, \eta) = \eta(c_2 - M\omega^2) + (1 - \eta)(c_1 - m\omega^2) \tag{3.7}$$

Допустим, что заданы амплитуда A^* автоколебаний (при этом $A^* < A_0$, где A_0 – значение амплитуды при отсутствии управления), частота автоколебаний ω и закон $z_0(t)$ изменения статической составляющей относительного смещения масс. В частном случае $z_0(t) = x_0(t)$. Требуется найти закон управления $u^*(z, sz, x_0)$, который обеспечивает такой режим, и при этом имеет минимальную интенсивность

$$V^* = \frac{1}{T} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T \int_0^{2\pi/\omega} u^2 dt_1 dt_2 \tag{3.8}$$

где T – время функционирования системы, $2\pi/\omega$ – период автоколебаний, t_1 – "быстрое" время, соответствующее автоколебательному процессу, t_2 – "медленное" время, соответствующее изменению $x_0(t)$. Аналогичное (3.8) выражение для интегральной квадратичной оценки интенсивности управления введено в [3] для задачи управления двухчастотными колебаниями с низкочастотной и высокочастотной составляющими.

Из уравнений (3.1), (3.6), (3.7) с учетом (3.3), (3.4), (3.5) определяются следующие линейные изопериметрические условия, налагаемые на искомое управляющее воздействие:

$$\int_0^{2\pi} u d\psi = 2\pi a_0, \quad \int_0^{2\pi} u \sin\psi d\psi = \pi A^* a_1, \quad \int_0^{2\pi} u \sin\psi d\psi = \pi A^* a_2 f_2^*$$

$$a_0 = \frac{(c_1 + c_2) f_0^* + c_1 c_2 (x_0 - z_0)}{b(0, \eta)} \tag{3.9}$$

$$a_1 = -\frac{(c_1 - m\omega^2)(c_2 - M\omega^2)}{b(\omega, \eta)}$$

$$a_2 = -\frac{c_1 + c_2 - (m + M)\omega^2}{b(\omega, \eta)}$$

Таким образом, решение этой задачи заключается в определении функции $u^*(\psi, x_0)$, минимизирующей функционал (3.8) при условиях (3.9). Ее решение определяется с использованием множителей Лагранжа и имеет вид

$$u^*(\psi, x_0) = a_0 + a_1 A^* \sin\psi + a_2 f_2^* A^* \cos\psi \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.8), получим

$$V^* = \bar{a}_0^2 + \tfrac{1}{2} A^{*2}(a_1^2 + a_2^2 \bar{f}_2^{*2}) \tag{3.11}$$

$$\bar{a}_0^2 = \frac{1}{T}\int_0^T a_0^2 dt, \quad \bar{f}_2^{*2} = \frac{1}{T}\int_0^T f_2^{*2} dt$$

$$f_0^* = f_0[A^*, \omega, sz_0(t)], \quad f_2^* = f_2[A^*, \omega, sz_0(t)]$$

поскольку величины a_0, f_0^*, f_2^* зависят в общем случае от $x_0(t)$, $z_0(t)$, $sz_0(t)$.

Допустим теперь, что задано ограничение на интенсивность управления V (3.8): $V < \bar{V}$, где $\bar{V}$ – заданная величина, и требуется найти закон управления u, обеспечивающий минимальную амплитуду автоколебаний $A^* = A_{\min}$. Тогда из (3.11) следует неравенство

$$\bar{a}_0^2 + \tfrac{1}{2} A^{*2}(a_1^2 + a_2^2 \bar{f}_2^{*2}) \le \bar{V} \tag{3.12}$$

Найдем минимальное значение A^*, удовлетворяющее неравенству (3.12). Отсюда $A^* = A_{\min}$.

Решение задачи синтеза осуществляется следующим образом. Поскольку $z = z_0 + A^* \sin\psi$, $sz = sz_0 + \omega A^* \cos\psi$, то отсюда и из (3.10) получим

$$u^*(z, x_0) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(f_2^* / \omega) s(z - z_0) \tag{3.13}$$

Анализ динамики замкнутой системы осуществляется путем подстановки синтезированного выше закона в уравнение (1.3) и анализа гармонически линеаризованного уравнения. При этом следует иметь в виду, что в замкнутой системе возможно существование режимов A, ω_1, z_0^1, отличных от расчетного A^*, ω, z_0.

Для закона (3.13) коэффициенты гармонической линеаризации, с учетом этого определяются по формулам:

$$u_0^1 = a_0 + a_1(z_0^1 - z_0) + a_2(f_2^* / \omega)s(z_0 - z_0^1)$$
$$u_1^1 = a_1; \quad u_2^1 = a_2 f_2^* \omega_1 / \omega \tag{3.14}$$

Заменяя входящие в уравнения (3.1), (3.6), (3.7) величины ω, z_0 на ω_1, z_0^1, а u_0, u_1, u_2 на u_0^1, u_1^1, u_2^1 (3.14), получим следующие уравнения

$$c_1\left[c_2 + b(0,\eta)\left(a_1 + a_2\frac{f_2^*}{\omega}s\right)\right](z_0^1 - z_0) = (c_1 + c_2)(f_0^1 - f_0^*) \tag{3.15}$$

$$(c_1 - m\omega_1^2)(c_2 - M\omega_1^2) = \frac{b(\omega_1,\eta)}{b(\omega,\eta)}(c_1 - m\omega^2)(c_2 - M\omega^2) \tag{3.16}$$

$$-[c_1 + c_2 - (m+M)\omega_1^2]f_2^1 + \frac{b(\omega_1,\eta)}{b(\omega,\eta)}[c_1 + c_2 - (m+M)\omega^2]f_2^*\frac{\omega_1}{\omega} = 0 \tag{3.17}$$

$$f_0^1 = f_0(A,\omega_1,z_0^1), \quad f_2^1 = f_2(A,\omega,z_0^1)$$

Уравнение (3.16) – это биквадратное уравнение относительно ω_1. Преобразуем его к виду

$$\omega_1^4 + \{[\eta M + (1-\eta)m](c_1 - m\omega^2)(c_2 - M\omega^2)b^{-1}(\omega,\eta) - (c_1 M + c_2 m)\}\frac{\omega_1^2}{mM} + D = 0 \tag{3.18}$$

$$D(\eta,\omega) = \frac{\omega^2}{mM}\frac{\eta c_2 m(c_2 - M\omega^2) + (1-\eta)c_1 M(c_1 - m\omega^2)}{\eta(c_2 - M\omega^2) + (1-\eta)(c_1 - m\omega^2)} \tag{3.19}$$

Поскольку $\omega_1 = \omega$ является корнем уравнения (3.18), то второй корень ω_1 будет равен $\omega_1^2 = D/\omega^2$. Из анализа (3.19) следует $D(0, \omega) = (c_1/m)\omega^2$, $D(1, \omega^2) = (c_2/M)\omega^2$. Отсюда вытекает, что при действии управления только на нижнюю массу ($\eta = 0$) в замкнутой системе возможно возникновение режима с частотой $\omega_1 = \sqrt{c_1/m}$, а при действии только на верхнюю массу – с частотой $\omega_2 = \sqrt{c_2/M}$. При этом в обоих случаях, как видно из уравнений (3.16), (3.17), система становится неуправляемой, так как $b(\sqrt{c_1/m},0) = b(\sqrt{c_2/M},1) = 0$.

Далее, из анализа (3.19) следует

$$D(\eta,\sqrt{c_1/m}) = D(\eta,\sqrt{c_2/M}) = c_1 c_2/(mM)$$

Таким образом, в качестве значений задаваемой частоты автоколебаний ω нельзя выбирать значения собственных частот неуправляемой системы.

Условие, при котором в управляемой системе не возбуждаются автоколебания с частотой, отличной от задаваемой частоты ω, как следует из (3.19), имеет вид: $D = 0$. При этом уравнение (3.18), (3.16) имеет корни $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Как следует из (3.19), это будет при

$$\eta = \eta_1 = -\frac{c_1 M(c_1 - m\omega^2)}{c_2 m(c_2 - M\omega^2) - c_1 M(c_1 - m\omega^2)} \tag{3.20}$$

В результате подстановки значения $\omega_1 = \omega$ в уравнения (3.15), (3.17) получается система двух уравнений с двумя неизвестными A, z_0^1:

$$c_1[c_2 + b(0,\eta)(a_1 + a_2 f_2^* s/\omega)](z_0^1 - z) = (c_1 + c_2)[f_0(A,\omega,z_0^1) - f_0^*] \tag{3.21}$$

$$f_2(A,\omega,z_0^1) = f_2^* \tag{3.22}$$

Для анализа устойчивости режима автоколебаний используется наиболее компактная форма анализа устойчивости гармонического приближения, предложенная в [4]. В соответствии с предложенным в [4] критериям, режим устойчив, если

$$\frac{\partial Y}{\partial A}(\tilde{A},\tilde{\omega},\tilde{z}_0)>0 \tag{3.23}$$

где $Y(A,\,\omega,\,z_0)$ – мнимая часть характеристического уравнения, $\tilde{A},\tilde{\omega},\tilde{z}_0$ – медленно изменяющиеся в окрестности анализируемого режима A, ω, z_0 величины. В [4] показано, что критерий (3.23) эквивалентен энергетическому условию устойчивости, гармонического решения [5].

В соответствии с (3.23) из (3.17) вытекает следующие простые условия устойчивости

$$\partial f_2/\partial A < 0 \tag{3.24}$$

$$c_1 + c_2 - (m + M)\omega^2 > 0 \tag{3.25}$$

Для окончательного определения закона управления (3.14) значения величин A^*, ω следует выбирать таким образом, чтобы уравнения (3.21), (3.22) имели единственное решение A^*, ω, z_0 и при этом выполнялись неравенства (3.24), (3.25).

4. В качестве примера рассмотрим систему с характеристикой фрикционного взаимодействия $f(sz) = k_0 sz - k_1(sz)^3$, где k_0, k_1 – известные константы. Закон кинематического перемещения $x_0(t)$ предполагается равномерным $x_0 = vt$. В данном случае

$$f_0 = k_0 s z_0 - k_1(s z_0)^3 - \tfrac{3}{2} k_1 s z_0 \omega^2 A^2 \tag{4.1}$$

$$f_2 = k_0\omega - 3k_1(s z_0)^2\omega - \tfrac{3}{4} k_1\omega^3 A^2 \tag{4.2}$$

Решение уравнения (2.2) ищется в виде $z_0 = \alpha_1 + \alpha_2 z$. Подставляя это выражение в (2.2), найдем

$$z_0(t) = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}(k_0 v - k_1 v^3 - \frac{3}{2}k_1 v\,\omega^2 A^2) + vt \tag{4.3}$$

В соответствии с (2.7), (2.9), (4.2), (4.3) в неуправляемой системе возможно возникновение автоколебаний с двумя частотами $\omega_1^2 = c_1/m$, $\omega_2^2 = c_2/m$ и амплитудами

$$A_0^{12} = \frac{k_0 - 3k_1 v^2}{\tfrac{3}{4} k_1 \omega_{12}^2} \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что автоколебания в неуправляемой системе возникают, если $v < \sqrt{k_0/3k_1}$. В противном случае они отсутствуют.

Поскольку, в силу (4.2), $\partial f_2/\partial A = -\tfrac{3}{2}k_1\omega^3 A < 0$, то из (3.25) следует, что для первой частоты условие устойчивости имеет вид $c_1 + c_2 - (m + M)c_1/m > 0$, откуда получается $\omega_2 > \omega_1$. Для второй частоты из (3.25) следует $c_1 + c_2 - (m + M)c_2/M > 0$, откуда: $\omega_2 < \omega_1$. Таким образом, устойчив режим автоколебаний с меньшей частотой $\omega_{\min} = \min\omega_i$ $(i = 1,\,2)$. Полагаем для управляемой системы $\dot{z}_0 = v$, также как и для неуправляемой системы. Поскольку $\dot{z}_0 = v$, то в силу (4.2) уравнение (3.22) имеет единственное положительное решение $A = A^*$. Отсюда следует $f_0(A^*,\dot{z}_0^1,\omega) = f_0^*$, поэтому из уравнения (3.21) получим $z_0^1 = z_0$, т.е. в замкнутой системе возможна реализация только расчетного режима A^*, ω, z_0.

Для значений параметров $k_0 = 1$, $k_1 = 0{,}25$, $m = 1$, $c_1 = 40$, $M = 100$, $c_2 = 900$, $v = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, при этом устойчив режим с частотой $\omega_1 = 2$. Соответствующая амплитуда автоколебаний A_0^1, рассчитываемая по формуле (4.4) $A_0^1 = 0.353$.

Задаваемая частота автоколебаний выбирается исходя из неравенства (3.25) $\omega = 2.8$. В соответствии с (3.20) значение параметра $\eta = -0.128$.

Значения параметров закона управления (3.13), рассчитываемые как функции задаваемой амплитуды автоколебаний A^* определяются по формулам $a_0 = 4.26 - 1673A^{*2}$, $a_1 = -199.8$, $f_2^* a_2 = -27 + 161A^{*2}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 97-01-00538 и № 00-1-00217).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ветюков М.М., Нагаев Р.Ф.* Автоколебания в двухмассовой системе с относительным скольжением тел // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 5. С. 34–40.
2. *Попов Е.П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973. 583 с.
3. *Израилович М.Я.* Управляемое виброгашение двухчастотных колебаний // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 3. С. 3–11.
4. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
5. *Вульфсон И.И., Коловский М.З.* Нелинейные задачи динамики машин. Л.: Машиностроение, 1968. 282 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.12.1999