

УДК 539.8

© 2001 г. П.А. КРУЧИНИН, М.Х. МАГОМЕДОВ, И.В. НОВОЖИЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АВТОМОБИЛЬНОГО КОЛЕСА НА АНТИБЛОКИРОВОЧНЫХ РЕЖИМАХ ДВИЖЕНИЯ

Автомобиль – это сложная управляемая механическая система, спектр составляющих движений которой чрезвычайно широк – от многочасовых перемещений по трассе до высокочастотных колебаний конструкции. Поэтому при математическом моделировании движения автомобиля используются различные расчетные модели, в зависимости от целей исследования и области спектра учитываемых движений [1–3]. Ниже предлагается математическая модель, описывающая движение автомобиля на временах порядка десятка миллисекунд характерных для работы антиблокировочной системы (АБС). Моделью объясняются нежелательные высокочастотные колебания, возникающие при торможении [3–5], и не описываемые традиционными квазистатическими моделями Картера, Рокара, Фромма.

Рассмотрим продольное движение автомобиля по горизонтальной опорной поверхности. Введем неподвижную систему координат $Ox_0y_0z_0$ с началом на опорной поверхности. Ось x_0 этой системы ориентирована по направлению движения, а ось z_0 – вертикальна. Зададим трехгранник S_{xyz} , связанный с корпусом автомобиля, с началом в центре масс автомобиля в целом. Изменением геометрии масс из-за деформации элементов подвески далее будем пренебрегать.

Уравнения продольного движения автомобиля имеют вид

$$\begin{aligned} M \frac{dV_x}{dT} &= 2(P_1 + P_2) + F, & \frac{dX}{dT} &= V_x \\ M \frac{dV_z}{dT} &= -Mg + 2(N_1 + N_2), & \frac{dZ}{dT} &= V_z \\ J_y \frac{d\Omega_y}{dT} &= -2(P_1 + P_2)Z + N_2A_2 - N_1A_1, & \frac{d\vartheta}{dT} &= \Omega_y \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь T – время; M – масса автомобиля; X, Z – координаты центра масс; V_x, V_z – проекции его вектора скорости в осях трехгранника $Ox_0y_0z_0$; $2P_1, 2P_2$ – горизонтальные, а $2N_1, 2N_2$ – вертикальные составляющие главного вектора сил взаимодействия с дорожной поверхностью для передних и задних пар колес; F – сила лобового сопротивления; J_y и Ω_y – момент инерции и угловая скорость вращения корпуса относительно оси Sy ; A_1, A_2 – плечи соответствующих сил; ϑ – угол тангажа. Уравнения записаны в линейном приближении по малому углу ϑ .

Уравнения изменения моментов количества движения для передних и задних колес относительно их осей будут

$$I_{1y} \frac{d\Omega_{1y}}{dT} = -P_1R + L_1, \quad I_{2y} \frac{d\Omega_{2y}}{dT} = -P_2R + L_2 + M_l \quad (2)$$

Здесь I_{1y}, I_{2y} – осевые моменты инерции соответственно передних и задних колес; Ω_{1y}, Ω_{2y} – их угловые скорости; R – радиус колеса; L_1, L_2 – моменты тормозных сил; M_t – момент со стороны трансмиссии (для определенности рассматривается заднеприводной автомобиль).

Уравнение двигателя запишем в виде

$$I_0 \frac{d\Omega}{dT} = M_0(\Omega, \beta) - \frac{2}{n} M_t, \quad \Omega = \Omega_{2y} n \quad (3)$$

Здесь Ω – угловая скорость выходного вала двигателя; I_0 – его приведенный момент инерции, n – передаточное отношение системы, включающей абсолютно жесткую трансмиссию, коробку передач и дифференциал; $M_0(\Omega, \beta)$ – эффективный момент двигателя; β – приведенное положение педали газа.

Пренебрегая инерционностью деформируемых элементов пневматика, запишем уравнения квазистатического баланса контактных сил взаимодействия колеса с опорной поверхностью и упругих сил взаимодействия деформированной части пневматика с его недеформированной частью [2]:

$$P_i - K_{ix} \xi_i = 0, \quad N_i - K_{iz} \zeta_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

Здесь по установившейся в транспортной механике традиции [6, 7] предполагается, что деформированное состояние пневматиков задается конечномерным набором деформаций: ξ_i – в касательном и ζ_i – в нормальном к опорной поверхности направлениях; K_{ix}, K_{iz} – соответствующие коэффициенты упругости для передних ($i = 1$) и для задних ($i = 2$) колес.

Рассмотрим, далее, механические системы, образованные совокупностью элементов подвески: от корпуса до деформированной части пневматиков. Запишем в линейном приближении уравнения движения центров масс этих систем в проекции на вертикальное направление

$$m_i \frac{d^2 Z_i}{dT^2} = K_{iz} \zeta_i + C_i \Delta Z_i + r_i \frac{d\Delta Z_i}{dT} - m_i g \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

Здесь m_i – приведенная масса системы, $Z_i = R - \zeta_i + l_i$ ($l_i = \text{const}$) – координата ее центра масс, ΔZ_i – деформация рессоры, C_i, r_i – приведенные жесткость рессоры и коэффициент демпфирования амортизатора.

Запишем в линейном приближении уравнения, связывающие деформацию рессор с положением корпуса

$$\Delta Z_1 = -A_1 \vartheta + \Delta Z + \zeta_1, \quad \Delta Z_2 = A_2 \vartheta + \Delta Z + \zeta_2, \quad \Delta Z = Z - Z_0 \quad (6)$$

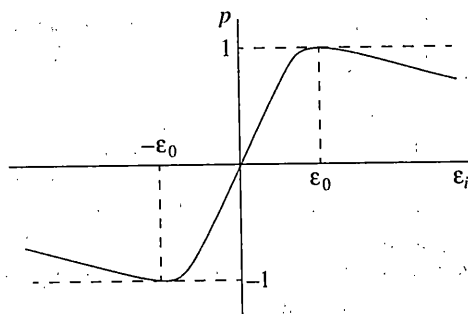
Здесь ΔZ – вертикальная составляющая смещения центра масс C от его невозмущенного положения Z_0 .

Выражение для касательной составляющей контактных сил в плоском движении в соответствии с [8, 9, 2, 3] запишем в виде

$$P_i = -v_i N_i p(\varepsilon_i) \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

$$\varepsilon_i = \frac{V_x - \Omega_{iy} R + \xi_i}{|\Omega_{iy}| R} \quad (8)$$

где v_i – коэффициент кулонова трения скольжения материала шины по дороге,



Фиг. 1

а ϵ_i – псевдоскольжение. Вид зависимости $p(\epsilon_i)$ представлен на фиг. 1. Для автомобильных шин указанная на графике фиг. 1 величина $\epsilon_0 \approx 0,1$.

При исследовании режимов торможения величина $\Omega_{iy}R$ в (8) положительна и изменяется в широких пределах: от $\Omega_{iy}R \sim V_x$ при движении с малым проскальзыванием (псевдопроскальзыванием), до $\Omega_{iy}R = 0$ при полной блокировке колес. Поэтому в (8) удобно опустить обозначение модуля и вместо аргумента ϵ_i в (7), (8) использовать величину

$$s_i = \frac{V_x - \Omega_{iy}R + \dot{\xi}_i}{V_x} \quad (9)$$

Из (8), (9) имеем ($\Omega_{iy}R > 0$):

$$\epsilon_i = \frac{V_x - \Omega_{iy}R + \dot{\xi}_i}{V_x} \cdot \frac{V_x}{\Omega_{iy}R} = \frac{V_s}{\Omega_{iy}R} s_i \quad (10)$$

Из (9) вычисляется

$$\frac{V_x}{\Omega_{iy}R} = \frac{1}{1 - s_i + \dot{\xi}_i / V_x}$$

Пренебрегая здесь $\dot{\xi}_i / V_x \ll 1$, ограничившись классом движения, удовлетворяющим этому условию, и подставляя результат в (10), получим

$$\epsilon_i = \frac{s_i}{1 - s_i} \quad (11)$$

Проделав в (7) замену (11), получим

$$P_i = -v_i N_i \phi(s_i) \quad (12)$$

где график функции $\phi(s_i)$ получается из графика $p(\epsilon_i)$ сжатием аргумента до единичного диапазона преобразованием (11). В пределах линейной зоны на фиг. 1 справедливо $\epsilon_i < \epsilon_0 \sim 0,1$. Здесь в соответствии с (11) будет $\epsilon_i \approx s_i$, и графики функций $p(\epsilon_i)$ и $\phi(s_i)$ отличаются слабо.

В качестве уравнений движения автомобиля в продольной плоскости будем далее рассматривать соотношения (1) – (7), (9), (12). Здесь L_1 , L_2 , β – управления этим движением.

Упростим полученную систему. Возможности упрощения вызваны относительной малостью части переменных ($\vartheta \ll 1$; $\Delta Z_i \ll Z$, Z_0 ; ξ_i , $\zeta_i \ll R$) и сильным разнесением парциальных постоянных времени системы.

Из первого уравнения (1) оценивается характерное время $T_0 = MV_*/2(P_{1*} + P_{2*})$, за которое скорость автомобиля под действием характерных тормозных сил $2(P_{1*} + P_{2*})$ изменяется на характерную величину V_* . Полагая, что силы торможения не превосходят по величине веса автомобиля получим $T_0 > V_*/g$.

Отбросив во втором уравнении из (1) и в уравнениях (4) – (7) все слагаемые, кроме сил упругости рессор, получим оценку парциальной постоянной времени поступательных вертикальных упругих колебаний корпуса на рессорах: $T_1 = \sqrt{M/2(C_1 + C_2)}$. Близка по величине также и оценка для парциальной постоянной времени угловых колебаний корпуса на рессорах, полученная из третьего уравнения (1) и уравнений (4) – (7).

Из (5) оценивается парциальная постоянная времени колебаний неподрессоренных масс за счет упругости пневматика: $T_2 = \sqrt{m_*/K_{z*}}$, где m_* , K_{z*} – характерные значения m_i , K_{iz} . Выделяя для линейной зоны характеристики $\varphi(s_i)$ в уравнениях (2), (9), (12) слагаемые с Ω_y , Ω_y получим оценку парциальной постоянной времени в движении колеса под действием постоянной контактной силы: $T_3 = V_*/Rv_*N_*K_0$. Здесь $v_* \sim 1$, $N_* \sim Mg/4$ – характерные значения соответствующих величин, а $K_0 \sim 1/\varepsilon_0$ – коэффициент наклона характеристики $\varphi(s_i)$ в линейной зоне.

Сгруппировав в (4), (12), (9) слагаемые с ξ_i , ξ_i получим оценку парциальной постоянной времени деформации пневматика: $T_4 = v_*N_*K_0/K_{x*}V_*$, где K_{x*} – характерное значение K_{ix} .

Наконец, из (3) получим оценку постоянной времени двигателя: $T_5 = I_0(\partial M_0/\partial \Omega)_*$, где $(\partial M_0/\partial \Omega)_*$ – характерное значение наклона характеристики двигателя для устойчивого, падающего, участка характеристики при $\beta = \text{const}$.

Числовые значения параметров практически всех современных типов автомобилей таковы, что $\mu \sim T_*/T_0$, T_*/T_1 .

Рассмотрим антиблокировочную систему, характерные времена работы которой лежат в диапазоне малых постоянных времени. Нормализуем систему уравнений, описывающую движение автомобиля, на этом классе движения по методике из [2]. Переходя к безразмерному времени $t = T/T_*$, выберем нормализующий временной масштаб величиной порядка T_2 , T_3 , T_4 , T_5 . При этом в правых частях нормализованных уравнений, отвечающих медленным движениям с постоянными времени T_0 , T_1 , появляются малые множители $\mu \sim T_*/T_0$, T_*/T_1 .

Полагая $\mu = 0$ запишем приближенную, вырожденную по А. Пуанкаре, модель. Эта модель может быть получена из системы уравнений в исходных ненормированных переменных, если в ней положить V_x , Ω_y , ϑ , $\Delta z = \text{const}$. В соответствии с теоремой Пуанкаре погрешность вырожденной модели – величины порядка μ – обеспечивается на конечном интервале времени $T \sim T_*$.

Вырожденная модель может быть дополнительно упрощена. Это связано с тем, что возмущения быстрых движений по ζ_i входят в (5) только по медленным переменным v , ΔZ , для которых на классе быстрых движений принимается ϑ , $\Delta Z = \text{const}$. Уравнение (5) после затухания быстрых собственных движений по ζ_i можно при этом заменить статическим соотношением $K_{iz}\zeta_i + C\Delta Z_i - m_i g = 0$. Тогда в силу (4), (6) $N_i = \text{const}$. (Заметим, что высокочастотные неровности опорной поверхности, не учитываемые в (5) в силу исходных допущений, могут, вообще говоря, привести через множитель N в (7) к параметрическим возмущениям продольного движения.)

Запишем окончательный вид приближенной модели для характерных времен порядка T_4 :

$$I_{1y} \frac{d\Omega_{1y}}{dT} = -P_1 R + L_1, \quad P_1 = K_{1x} \xi_1 \quad (13)$$

$$P_1 = -v_1 N_1 \varphi(s_1), \quad s_1 = \frac{V_x - \Omega_{1y} R + \dot{\xi}_1}{V_x}$$

$$I_{2y} \frac{d\Omega_{2y}}{dT} = -P_2 R + L_2 + M_t, \quad P_2 = K_{2x} \xi_2$$

$$P_2 = -v_2 N_2 \varphi(s_2), \quad s_2 = \frac{V_x - \Omega_{2y} R + \dot{\xi}_2}{V_x} \quad (14)$$

$$I_0 \frac{d\Omega_0}{dT} = M_0(\Omega, \beta) - \frac{2}{n} M_t, \quad \Omega = \Omega_{2y} n$$

$$V_x, N_1, N_2 = \text{const}$$

Система уравнений, описывающая движение автомобиля, распалась на две независимые подсистемы. Уравнения (13) описывают движение передних, а (14) – задних колес. Для переднеприводного автомобиля индексы меняются местами. Для полноприводной машины угловая скорость Ω связана со скоростями вращения как передних, так и задних колес, и система не распадается.

Особенно простой вид уравнения приобретают для линейного участка характеристики $\varphi(s_i)$. Тогда в (13), (14):

$$P_i = K_{ix} \xi_i, \quad P_i = -v_i N_i K_0 s_i \quad (15)$$

$$s_i = (V_x - \Omega_{iy} R + \dot{\xi}_i) / V_x$$

Исключив величины P_i, s_i получим соотношение

$$K_{ix} \xi_i + \frac{V_x - \Omega_{iy} R + \dot{\xi}_i}{V_x} v_i N_i K_0 = 0$$

по структуре совпадающее с уравнениями неголономных связей Келдыша [6, 7].

В случае исключения в (15) переменных s_i, ξ_i получим уравнение, описывающее инерционность формирования контактной силы за счет конечной жесткости пневматика

$$T_4^{(i)} \frac{d}{dT} P_i + P_i = -v_i N_i K_0 \frac{V_x - \Omega_{iy} R}{V_x}, \quad T_4^{(i)} = \frac{v_i N_i K_0}{K_{ix} V_x} \quad (16)$$

При этом уравнения (13), (14) для передних колес принимают вид

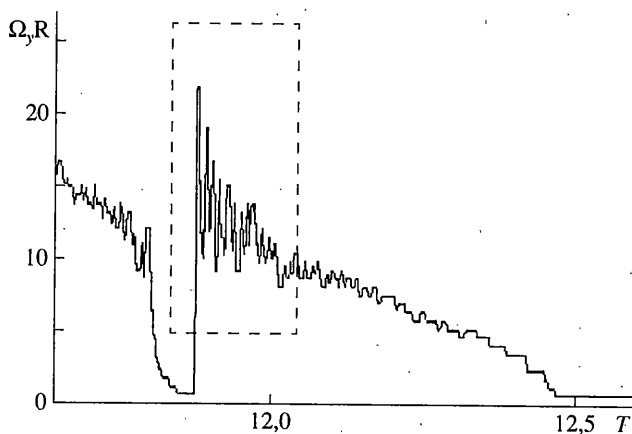
$$I_{1y} \frac{d\Omega_{1y}}{dT} = -P_1 R + L_1 \quad (17)$$

$$T_4^{(i)} \frac{dP_1}{dT} + P_1 = -v_1 N_1 K_0 \frac{V_x - \Omega_{1y} R}{V_x}$$

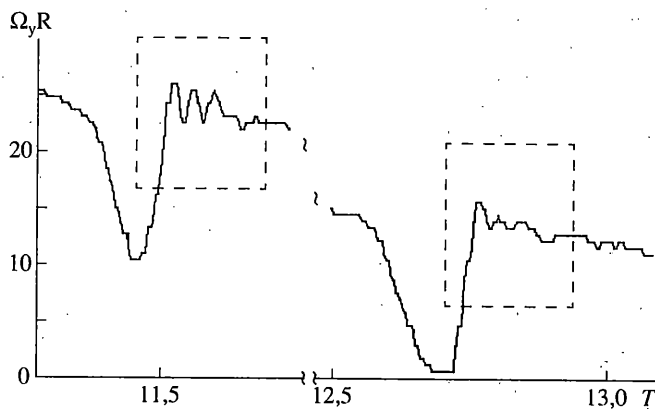
и для задних колес вид

$$I_{2y} \frac{d\Omega_{2y}}{dT} = -P_2 R + L_2 + M_t, \quad I_0 \frac{d\Omega_0}{dT} = M_0(\Omega, \beta) - \frac{2}{n} M_t$$

$$T_4^{(i)} \frac{dP_2}{dT} + P_2 = -v_2 N_2 K_0 \frac{V_x - \Omega_{2y} R}{V_x}, \quad \Omega = \Omega_{2y} n \quad (18)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

При движении с расторможенными колесами ($L_1, L_2 = 0$) и выключенным сцеплением ($M_t = 0$) собственное движение и передних и задних колес описываются однотипными уравнениями второго порядка. При выполнении условия $4v_i^2 N_i^2 K_0^2 R^2 / K_{ix} I_{iy} V_x^2 > 1$ эти движения имеют колебательный характер с частотой

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_{ix} R^2}{I_{iy}} - \frac{K_{ix}^2 V_x^2}{4v_i^2 N_i^2 K_0^2}} \quad (19)$$

Из (19) следует, что частота таких колебаний растет при снижении скорости V_x , что совпадает с качественными выводами работы [3]. При увеличении коэффициента v_i кулонова трения частота также растет.

На фиг. 2, 3 представлены экспериментальные графики изменения во времени ($T[c]$) угловых скоростей ($\omega_y R$ [км/ч]) передних колес автобуса Мерседес-303 снабженного антиблокировочной системой типа WABCO. Ступенчатый характер графиков объясняется дискретностью съема информации.

Штрихами на этих графиках выделены интервалы времени, на которых после сброса АБС тормозного усилия колесо под действием контактной силы выходит

на режим свободного качения. Эти интервалы отвечают собственным колебаниям системы (17). График на фиг. 2 с крутым фронтом кривой выхода на режим свободного качения получен при движении по сухому асфальту, график на фиг. 3 с пологим фронтом – мокрому асфальту.

На всех графиках явно отмечается, что режим свободного качения устанавливается после затухания высокочастотного переходного процесса, сопоставимого с решениями систем уравнений (17) и (18). Трудности идентификации параметров v_r , $K_{ix}, \dots$, соответствующих эксперименту, затрудняют возможности точного сравнения расчетных и экспериментальных данных. Задание этих величин из диапазона, известного по литературе [1], дает в соответствии с (19) частоты порядка сотни герц, что совпадает с порядком частот на графиках фиг. 2, 3.

В пределах точности определения частот по фиг. 2, 3 можно также заключить, что частоты колебаний, по крайней мере не убывают с уменьшением скорости автобуса и увеличиваются при движении по поверхности с лучшим сцеплением. Эти выводы также согласуются с формулой (19).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 98-01-00961).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамика системы "дорога – шина – автомобиль – водитель" / Под ред. А.А. Хачатурова. М.: Машиностроение, 1976. 535 с.
2. Novozhilov I.V. Fractional Analysis. Methods of Motion Decomposition. Birkhäuser, Boston-etc.: 1997. 231 p.
3. Clover C.L., Bernard J.E. Longitudinal tire dynamics // Vehicle Syst. Dynam. 1998. V. 29. № 4. P. 231–259.
4. Карузин О.И., Малюгин П.И., Федотов А.И. Особенности работы антиблокировочной системы в условиях помех // Надежность и активная безопасность автомобиля. М.: МАМИ, 1985. С. 31–38.
5. Gustafsson F. Monitoring tire-road friction using the wheel slip // IEEE Control Systems. 1998. V. 18. № 4. P. 42–49.
6. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Труды ЦАГИ. 1945. № 564. 34 с.
7. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 271 с.
8. Rasejka H.B. In-plane and out-of-plane dynamics of pneumatic types // Vehicle Syst. Dynam. 1981. V. 8. № 4–5. P. 221–251.
9. Новожиллов И.В. Качение колеса // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 50–55.

Москва

Поступила в редакцию
25.10.1999