

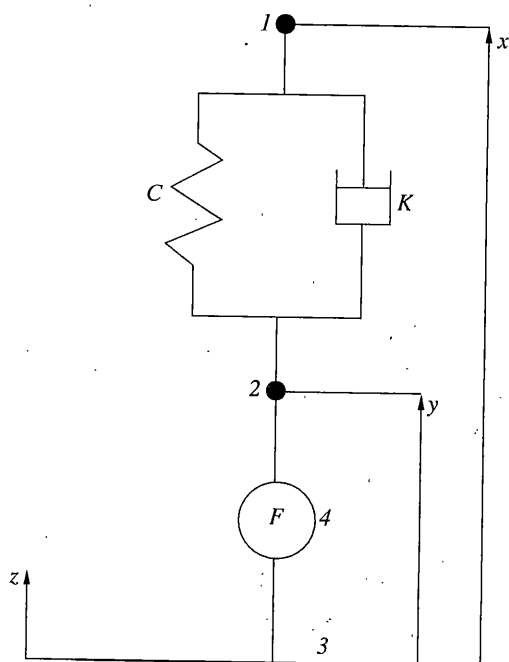
УДК 531.8

© 2001 г. Д.В. БАЛАНДИН, Н.Н. БОЛОТНИК

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРОТИВОУДАРНОЙ ИЗОЛЯЦИИ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Исследуются предельные возможности противоударной изоляции механической системы с двумя степенями свободы. Рассматривается возможность такого исследования на основе приближенной модели с одной степенью свободы. Приводится оценка погрешности аппроксимации.

1. Постановка задачи. Рассматривается механическая система (фиг. 1), состоящая из двух тел (материальных точек 1 и 2), соединенных пружиной и демпфером с линейными характеристиками. Тело 2 связано с подвижным основанием 3 при помощи противоударного изолятора (амортизатора) 4. Противоударный изолятор представляет собой управляющее устройство, генерирующее силу взаимодействия основания с телом 2 с целью уменьшения механических нагрузок в системе при ударном внешнем воздействии на основание. Предполагается, что основание и оба



Фиг. 1

тела системы могут двигаться прямолинейно вдоль одной и той же прямой. Движение тел 1 и 2 относительно основания описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{x} + \ddot{z}) + K(\dot{x} - \dot{y}) + C(x - y) &= 0 \\ m_2(\ddot{y} + \ddot{z}) + K(\dot{y} - \dot{x}) + C(y - x) &= F \end{aligned} \quad (1.1)$$

где m_1 и m_2 – массы тел 1 и 2 соответственно; x и y – координаты тел 1 и 2 соответственно относительно основания; z – координата основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета; K – коэффициент демпфирования ($K > 0$); C – коэффициент жесткости пружины ($C > 0$); F – управляющая сила, приложенная к телу 2 со стороны изолятора. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ тела 1 и 2 покоятся в положениях, отвечающих нулевым значениям координат x и y , т.е. уравнения (1.1) рассматриваются при начальных условиях

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (1.2)$$

Ускорение основания \ddot{z} считается заданной функцией времени. Функция $\ddot{z}(t)$ характеризует внешнее воздействие, приложенное к основанию.

Описанную систему можно рассматривать как упрощенную линейную модель вязкоупругого тела на подвижном основании, подвергающемся интенсивным ударным нагрузкам, которые могут привести к разрушению или серьезным повреждениям тела. Изолятор служит для уменьшения этих нагрузок. За критерии качества противоударной защиты принимаются максимум модуля смещения тела 2 относительно основания

$$J_1 = \max_{t \in [0, \infty)} |y(t)|$$

и максимум модуля силы, действующей на тело 1:

$$J_2 = \max_{t \in [0, \infty)} |m_1(\ddot{x}(t) + \ddot{z}(t))| = \max_{t \in [0, \infty)} |K(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) + C(x(t) - y(t))|$$

Критерий J_1 является геометрической характеристикой смещения вязкоупругого тела относительно основания, а J_2 характеризует внутреннюю силу (напряжение), действующую между составляющими тела.

Рассматриваемая система может также служить приближенной моделью активной противоударной системы для защиты водителя и пассажиров транспортных средств от травм при аварии. В этом случае основание связывается с рамой или кузовом транспортного средства, тело 1 – с водителем или пассажиром, тело 2 моделирует сиденье, а вязкоупругий элемент – механические свойства сиденья и ремней безопасности. Изолятор генерирует управляющую силу между кузовом (рамой) транспортного средства и сиденьем. В этом случае, J_1 – максимальная величина смещения сиденья относительно кузова, а J_2 – максимальная величина силы, действующей на водителя или пассажира.

Ставится задача оптимизации.

Задача 1. Для системы, описываемой дифференциальными уравнениями (1.1) с начальными условиями (1.2), при заданном внешнем воздействии $\ddot{z}(t)$ найти нижнюю грань критерия J_1 в классе кусочно-непрерывных управляющих функций $F = F(t)$ при условии, что критерий J_2 не превышает заданного числа P .

Иными словами, требуется найти

$$J_1^0 = \inf_F J_1(F)$$

при условии

$$J_2(F) \leq P \quad (1.3)$$

В задаче требуется минимизировать максимум модуля отклонения тела 2 (например, сиденья водителя или пассажира автомобиля) относительно основания при ограничении на максимальную величину силы, которую допустимо прилагать к телу 1 (защищаемый объект). Это типичная задача, которую приходится решать на исследовательской стадии проектирования противоударных устройств в технических системах. Например, при проектировании системы травмобезопасности автомобиля конструктор должен знать физические пределы, до которых можно уменьшить амортизирующее смещение сидений водителя и пассажиров, при условии, что сила, действующая на людей, находящихся в автомобиле, в случае столкновения с другим автомобилем или неподвижным препятствием при определенных скоростях не превысит уровня, переносимого людьми без серьезных или опасных для жизни травм.

В литературе по проблемам защиты от ударов задачи, подобные задаче 1, носят название задач о предельных возможностях противоударной изоляции (амортизации). В этих задачах не делается никаких предположений о конструкции изолятора или составе информации о состоянии системы, которая используется в цепи обратной связи управляющего устройства. Таким образом, решение этой задачи позволяет установить теоретически достижимый абсолютный минимум критерия качества проектируемой системы. После анализа предельных возможностей выбирается конструктивная схема изолятора и закон управления (как правило, с обратной связью), обеспечивающие качество противоударной защиты, достаточно близкое к предельно возможному. Этот этап иногда называется синтезом противоударного изолятора. В настоящей статье он не рассматривается.

Отметим, что основная цель анализа предельных возможностей – выяснить значение абсолютного минимума (нижней грани) критерия качества. Определение программного оптимального управления, реализующего этот минимум, не столь существенно. Отметим также, что в задаче 1 не наложено никаких ограничений на значения управляющей силы.

2. Схема решения. Вспомогательная задача. Удобно ввести вспомогательную управляющую переменную $U = K(\dot{x} - \dot{y}) + C(x - y)$ и представить уравнения движения (1.1) в виде

$$m_1 \ddot{x} + U = -m_1 \ddot{z} \quad (2.1)$$

$$U = K(\dot{x} - \dot{y}) + C(x - y) \quad (2.2)$$

$$m_2(\ddot{y} + \ddot{z}) - U = F \quad (2.3)$$

Ограничение (1.3) на максимально допустимую величину силы, действующую на тело 1, эквивалентно ограничению на вспомогательное управление

$$|U| \leq P$$

Рассмотрим задачу оптимального управления системой, описываемой уравнениями (2.1) и (2.2). Введем обозначения

$$\xi = x - y, \quad u = \frac{U}{m_1}, \quad k = \frac{K}{m_1}, \quad c = \frac{C}{m_1}, \quad v = -\ddot{z}, \quad u_* = \frac{P}{m_1} \quad (2.4)$$

и представим уравнения (2.2) и (2.3) в виде

$$\ddot{x} + u = v \quad (2.5)$$

$$k\ddot{\xi} + c\xi = u \quad (2.6)$$

Из начальных условий (1.2) следует, что

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \xi(0) = 0 \quad (2.7)$$

Хотя из (1.2) вытекает также, что $\dot{\xi}(0) = 0$, это условие не может налагаться при уравнении (2.6), поскольку это уравнение первого порядка и производная $\dot{\xi}$ однозначно выражается через ξ, u, k и c .

Задача 2. Для системы, описываемой уравнениями (2.5) и (2.6) с начальными условиями (2.7), при заданном внешнем воздействии $v(t)$ найти кусочно-непрерывное оптимальное управление $u = u_0(t)$, удовлетворяющее ограничению

$$|u| \leq u_*$$

и минимизирующее функционал

$$J_1(u) = \max_{t \in [0, \infty)} |y(t)| = \max_{t \in [0, \infty)} |x(t) - \xi(t)| \quad (2.8)$$

Решение задачи 2 позволяет найти минимальное значение критерия качества $J_1(F)$ в задаче 1. Очевидно, $J_1(u_0) = J_1^0$. Кроме того, зная решение задачи 2, нетрудно вычислить оптимальное управление $F = F_0(t)$ для задачи 1. Решение системы уравнений (2.5) и (2.6) с начальными условиями (2.7) и управлением $u = u_0(t)$ дает $x = x_0(t)$ и $\xi = \xi_0(t)$. Индекс 0 показывает, что это решение отвечает оптимальному управлению $u_0(t)$. В соответствии с (2.4) имеем $y = y_0(t) = x_0(t) - \xi_0(t)$. Подставляя $x_0(t), y_0(t), \dot{z}(t) = -v(t)$ и $U(t) = m_1 u_0(t)$ в уравнение (2.3), найдем оптимальное управление $F_0(t)$ в виде

$$F_0(t) = m_2(\ddot{y}_0(t) - v(t)) - m_1 u_0(t) \quad (2.9)$$

Отметим, что в моменты времени, когда оптимальное управление $u_0(t)$ претерпевает скачки, скорость $\dot{y}_0(t)$ также испытывает скачки. Пусть $v(t)$ кусочно-непрерывная функция. Тогда функция $\dot{x}_0(t)$, определяемая соотношением

$$\dot{x}_0(t) = \int_0^t [v(\tau) - u_0(\tau)] d\tau, \text{ непрерывна. В соответствии с (2.4) имеем } \dot{y}_0(t) = \dot{x}_0(t) - \dot{\xi}_0(t).$$

Из (2.6) вытекает, что функция $\dot{\xi}_0(t)$ терпит разрыв в моменты времени, когда $u_0(t)$ терпит разрыв. Следовательно, функция $\dot{y}_0(t)$ тоже меняется скачком в эти моменты времени. В силу этого оптимальное управление, определенное равенством (2.9), содержит импульсные составляющие, которые представляются дельта-функциями Дирака, сосредоточенными в точках разрыва оптимального управления u_0 для вспомогательной задачи (задача 2). Таким образом, может случиться, что нижняя грань критерия J_1 , которую требуется найти в задаче 1, не достигается в классе кусочно-непрерывных управлений.

3. Жесткая система. Рассмотрим предельный случай абсолютно жесткой связи между телами 1 и 2. В этом случае оба тела движутся как единое целое, подчиняясь дифференциальному уравнению

$$(m_1 + m_2)(\ddot{x} + \ddot{z}) = F \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (3.2)$$

В соотношениях (3.1) и (3.2) \ddot{x} есть общее ускорение тел 1 и 2 относительно основания. Без ограничения общности полагается $x(t) \equiv y(t)$. Таким образом, максимальная величина отклонения системы определяется соотношением

$$\tilde{J}_1 = \max_{t \in [0, \infty)} |x(t)| \quad (3.3)$$

а максимальная величина силы, приложенной к телу 1, — соотношением

$$\tilde{J}_2 = \max_{t \in [0, \infty)} |m_1(\ddot{x}(t) + \ddot{z}(t))| = \max_{t \in [0, \infty)} \left| \frac{m_1}{m_1 + m_2} F(t) \right|$$

Тильда обозначает величины, относящиеся к жесткой системе. Аналог задачи 1 для жесткой системы формулируется следующим образом.

Задача 3. Для системы, описываемой дифференциальным уравнением (3.1) с начальными условиями (3.2), определить величину

$$\tilde{J}_1^0 = \inf_F \tilde{J}_1(F) \quad (3.4)$$

при условии, что

$$\tilde{J}_2(F) \leq P \quad (3.5)$$

где P – заданное положительное число. Нижнюю грань в (3.4) требуется найти в классе кусочно-непрерывных управлений $F(t)$.

Отметим, что в рассматриваемом случае из ограничения (3.5) вытекает ограничение

$$|F| \leq \frac{m_1 + m_2}{m_1} P$$

на управляющую силу. Введя обозначения

$$u = -\frac{F}{m_1 + m_2}, \quad v = -\ddot{z}, \quad u_* = \frac{P}{m_1}$$

можно сформулировать задачу 3 аналогично задаче 2.

Задача 4. Для системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + u = v \quad (3.6)$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (3.7)$$

при заданном внешнем воздействии $v(t)$ определить кусочно-непрерывное управление $u = \tilde{u}_0(t)$, такое что

$$\tilde{J}_1(\tilde{u}_0) = \min_u \tilde{J}_1(u)$$

при ограничении

$$|u| \leq u_*$$

Задача 4, которая иногда называется простейшей задачей оптимальной противоударной изоляции (амортизации), решалась многими авторами для различных $v(t)$, см., например, [1–5]. В следующем разделе показывается, что если жесткость C пружины, соединяющей тела 1 и 2, достаточно велика, то решение задачи 4 дает хорошее приближение к решению задачи 2 по критерию качества. Соответственно, решение задачи 3 дает хорошее приближение к решению задачи 1.

4. Оценка разности между решениями задачи о предельных возможностях противоударной изоляции для исходной системы с двумя степенями свободы и для ее аппроксимации жесткой моделью. Разность между минимумами максимума модуля смещения тела 1 для исходной системы с двумя степенями свободы и ее аппроксимации жесткой моделью оценивается неравенством

$$|J_1(u_0) - \tilde{J}_1(\tilde{u}_0)| \leq u_* / c \quad (4.1)$$

Это неравенство вытекает из сравнения задач 2 и 4. Соответственно, сравнение задач 1 и 3 приводит к неравенству

$$|J_1(F_0) - \tilde{J}_1(\tilde{F}_0)| \leq P / C \quad (4.2)$$

Прежде, чем доказывать соотношение (4.1), докажем оценку

$$|\xi(t)| \leq u_* / c \quad (4.3)$$

для решения уравнения (2.6) с начальным условием $\xi(0) = 0$. Это решение имеет вид

$$\xi(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \exp\left(-\frac{c}{k}(t-\tau)\right) u(\tau) d\tau$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|\xi(t)| \leq \frac{u_*}{k} \int_0^t \exp\left(-\frac{c}{k}(t-\tau)\right) d\tau = \frac{u_*}{c} \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{k}t\right)\right] \quad (4.4)$$

где u_* — максимально допустимая величина управляющей переменной u . Из неравенства (4.4) следует оценка (4.3). Таким образом, величина относительного смещения тел 1 и 2 не превышает статической деформации вязкоупругого элемента, соединяющего эти тела, при действии управляющей силы максимально допустимой величины.

В соответствии с определением величины ξ в (2.4) имеем

$$x = \xi + y, \quad y = x - \xi$$

Эти соотношения приводят к неравенствам

$$|x| \leq |y| + |\xi|, \quad |y| \leq |x| + |\xi|$$

С учетом последних неравенств и оценки (4.3) для $|\xi|$ получаем

$$|x(t)| \leq |y(t)| + \frac{u_*}{c}, \quad |y(t)| \leq |x(t)| + \frac{u_*}{c} \quad (4.5)$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ определяют решение системы (2.5)–(2.6) с начальными условиями (2.7) при управлении $u(t)$. Из неравенств (4.5) вытекают соотношения

$$\max_{t \in [0, \infty)} |x(t)| \leq \max_{t \in [0, \infty)} |y(t)| + \frac{u_*}{c}, \quad \max_{t \in [0, \infty)} |y(t)| \leq \max_{t \in [0, \infty)} |x(t)| + \frac{u_*}{c} \quad (4.6)$$

Поведение переменной x в этом решении совпадает с поведением переменной x в решении уравнения (3.6) с начальными условиями (3.7) при том же самом управлении $u(t)$. Это следует из того, что уравнения (2.5) и (3.6), а также начальные условия для x в (2.7) и (3.7), совпадают. С учетом определений (2.8) и (3.3) для критериев $J_1(u)$ и $\tilde{J}_1(u)$ соотношения (4.6) можно представить в виде

$$\tilde{J}_1(u) \leq J_1(u) + u_* / c \quad (4.7)$$

$$J_1(u) \leq \tilde{J}_1(u) + u_* / c \quad (4.8)$$

Подставив $u = u_0$ (оптимальное управление для задачи 2) в неравенство (4.7), получим

$$\tilde{J}_1(u_0) \leq J_1(u_0) + u_* / c \quad (4.9)$$

Поскольку \tilde{u}_0 — оптимальное управление для задачи 4, имеет место неравенство

$$\tilde{J}_1(\tilde{u}_0) \leq \tilde{J}_1(u_0) \quad (4.10)$$

Из (4.9) и (4.10) вытекает соотношение

$$\tilde{J}_1(\tilde{u}_0) - J_1(u_0) \leq u_* / c \quad (4.11)$$

Подставляя теперь $u = \tilde{u}_0$ (оптимальное управление для задачи 4) в (4.8), получаем

$$J_1(\tilde{u}_0) \leq \tilde{J}_1(\tilde{u}_0) + u_* / c \quad (4.12)$$

Так как u_0 – оптимальное управление для задачи 2, справедливо неравенство

$$J_1(u_0) \leq J_1(\tilde{u}_0) \quad (4.13)$$

Из (4.12) и (4.13) следует соотношение

$$J_1(u_0) - \tilde{J}_1(\tilde{u}_0) \leq u_* / c \quad (4.14)$$

Из неравенств (4.11) и (4.14) следует искомая оценка (4.1).

Для практического использования удобно представить эту оценку в виде

$$\frac{|J_1(u_0) - \tilde{J}_1(\tilde{u}_0)|}{\tilde{J}_1(\tilde{u}_0)} \leq \frac{u_*}{c \tilde{J}_1(\tilde{u}_0)} \quad (4.15)$$

В оценках (4.1) и (4.15) сравниваются предельные возможности изоляции двух различных систем, одна из которых учитывает конечную податливость связи между телами 1 и 2, а в другой эта связь полагается абсолютно жесткой. Критерии качества $J_1(u_0)$ для деформируемой системы и $\tilde{J}_1(\tilde{u}_0)$ для жесткой системы в этих оценках вычисляются при оптимальных управлениях для соответствующих систем. Представляет интерес также оценка, сравнивающая оптимальное значение $J_1(u_0)$ критерия качества деформируемой системы со значением $J_1(\tilde{u}_0)$ этого критерия в случае, когда управление \tilde{u}_0 , оптимальное для жесткой системы, приложено к деформируемой системе. Эта оценка имеет вид

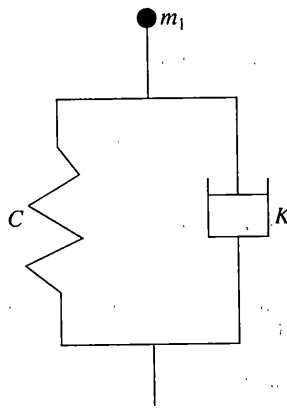
$$|J_1(u_0) - J_1(\tilde{u}_0)| \leq 2u_* / c \quad (4.16)$$

Неравенство (4.16) доказывается при помощи следующей цепочки выкладок:

$$\begin{aligned} |J_1(u_0) - J_1(\tilde{u}_0)| &= |J_1(u_0) - \tilde{J}_1(\tilde{u}_0) + \tilde{J}_1(\tilde{u}_0) - J_1(\tilde{u}_0)| \leq \\ &\leq |J_1(u_0) - \tilde{J}_1(\tilde{u}_0)| + |\tilde{J}_1(\tilde{u}_0) - J_1(\tilde{u}_0)| \end{aligned}$$

С учетом оценки (4.1) и неравенства $|\tilde{J}_1(\tilde{u}_0) - J_1(\tilde{u}_0)| \leq u_* / c$, вытекающего из (4.7) и (4.8), получается оценка (4.16). Из этой оценки видно, что если отношение u_* / c достаточно мало, то управление $\tilde{u}_0(t)$, оптимальное для жесткой системы, может рассматриваться как квазиоптимальное управление для исходной деформируемой системы.

5. Численный пример. Этот пример связан с проектированием устройства, предохраняющего правую ногу водителя автомобиля от перелома в случае лобового столкновения. Как правило, в момент столкновения, правая нога водителя нажимает на педаль тормоза. При лобовом столкновении автомобиля с другим автомобилем или неподвижным препятствием правая нога водителя подвергается большим осевым ударным нагрузкам, что и приводит к перелому. Для уменьшения опасных последствий удара предлагается участок пола вблизи тормозной педали делать податливым с целью изоляции ноги от сильных ударных нагрузок. Иными словами, автомобиль предлагается оборудовать специальным противударным изолятором. Пользуясь результатами, изложенными в предыдущих разделах, можно оценить минимальный ход изолятора, гарантирующий, что при определенных скоростях столкновения максимальная сила (напряжение), развиваемая в ноге, будет меньше предельного значения, при превышении которого возможен перелом.



Фиг. 2

Механические свойства ноги человека при столкновении автомобилей достаточно хорошо моделируются простой системой, состоящей из массы (материальной точки) и вязкоупругого элемента Фойгта [6]. Такая система изображена на фиг. 2. Эффективная масса m_1 , коэффициент демпфирования K и коэффициент жесткости C этой модели, полученные на основе идентификации по экспериментальным данным, имеют следующие значения [6]:

$$m_1 = 10 \text{ кг}, \quad K = 1.5 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}}{\text{м}}, \quad C = 1000 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad (5.1)$$

Эффективная масса m_1 учитывает как массу бедра, так и массу голени, в то время как коэффициенты K и C учитывают только вязкоупругие характеристики голени. Голень (в особенности большая берцовая кость) наиболее уязвима при лобовых столкновениях на малых и средних скоростях. Максимальная продольная сила, которую может выдержать голень при ударных нагрузках, оценивается величиной

$$P = 4 \text{ кН} \quad (5.2)$$

Для оценки минимального смещения податливого участка пола будем использовать модель, изображенную на фиг. 1. Параметры m_1 , K и C этой модели отождествляются с соответствующими параметрами модели ноги, приведенными в (5.1). Масса m_2 интерпретируется как масса подвижной части пола, к которой прилагается управляющая сила F . Рассмотрим случай, когда автомобиль наезжает на неподвижное препятствие со скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$ (36 км/ч). Удар считается мгновенным и абсолютно неупругим, т.е. автомобиль мгновенно останавливается. В этом случае функции \ddot{z} в (1.1) и v в (2.5), моделирующие внешнее воздействие, имеют вид

$$\ddot{z}(t) = -v_0 \delta(t), \quad v(t) = v_0 \delta(t) \quad (5.3)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Масса подвижной части пола полагается равной 5 кг ($m_2 = 5 \text{ кг}$).

В случае аппроксимации системы жесткой моделью (п. 3), решение задачи 4 дает (см., например, [2–5]):

$$\ddot{y}_0(t) = u_*, \quad \text{если } 0 \leq t \leq T = v_0 / u_* \quad (5.4)$$

$$\ddot{J}_1(\ddot{y}_0) = v_0^2 / (2u_*) \quad (5.5)$$

Оптимальное управление $\ddot{y}_0(t)$ тормозит тело 1 (защищаемый объект), которое в результате удара приобрело скорость v_0 относительно кузова автомобиля, с постоянным замедлением u_* до полной остановки в момент времени T , определенный

в (5.4). При $t > T$ оптимальное управление $\tilde{u}_0(t)$ определяется неоднозначно. Например, можно положить $\tilde{u}_0(t) \equiv 0$ при $t > T$. Для данных, представленных в (5.1) и (5.2), имеем $u_* = P/m_1 = 400$ м/с². Подстановка $v_0 = 10$ м/с и $u_* = 400$ м/с² в (5.5) дает $\tilde{J}_1(\tilde{u}_0) = 12.5$ см.

Воспользуемся неравенствами (4.1) или (4.2) для оценки разности между минимумом максимальной величины смещения тела 1 для исходной системы двух тел и для ее аппроксимации жесткой моделью. С учетом (5.1) и (5.2) получаем $|J_1(u_0) - \tilde{J}_1(\tilde{u}_0)| \leq 0.4$ см.

Относительная разность в сравнении с величиной $\tilde{J}_1(\tilde{u}_0)$ составляет 3.2%.

Вычислим управление F , входящее в уравнения (1.1), соответствующее квазиоптимальному вспомогательному управлению

$$\tilde{u}_0(t) = \begin{cases} u_*, & \text{если } 0 \leq t \leq T = v_0 / u_* \\ 0, & \text{если } t > T \end{cases} \quad (5.6)$$

полученному в результате решения задачи 4. Для этого воспользуемся формулой (2.9), сделав в ней следующие подстановки:

$$F_0(t) = F(t), \quad u_0(t) = \tilde{u}_0(t), \quad v(t) = v_0 \delta(t), \quad y_0(t) = \tilde{x}_0(t) - \tilde{\xi}_0(t) \quad (5.7)$$

где $\tilde{x}_0(t)$ и $\tilde{\xi}_0(t)$ – решение уравнений (2.5) и (2.6) с начальными условиями (2.7) при управлении (5.6) и внешнем воздействии (5.3). Опуская подробности построения решения, приведем окончательные выражения для функции $\tilde{x}_0(t)$ и $\tilde{\xi}_0(t)$:

$$\tilde{x}_0(t) = \begin{cases} v_0 t - u_* t^2 / 2, & \text{если } 0 \leq t \leq T \\ v_0^2 / (2u_*), & \text{если } t > T \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\tilde{\xi}_0(t) = \begin{cases} \frac{u_*}{c} \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{k} t\right) \right], & \text{если } 0 \leq t \leq T \\ \frac{u_*}{c} \left[\exp\left(\frac{c}{k} T\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{c}{k} t\right), & \text{если } t > T \end{cases} \quad (5.9)$$

В соответствии с (5.7)–(5.9) функция $y_0(t)$ представляется в виде

$$y_0(t) = \begin{cases} v_0 t - \frac{u_* t^2}{2} - \frac{u_*}{c} \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{k} t\right) \right], & \text{если } 0 \leq t \leq T \\ \frac{v_0^2}{2u_*} - \frac{u_*}{c} \left[\exp\left(\frac{c}{k} T\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{c}{k} t\right), & \text{если } t > T \end{cases}$$

Функция $y_0(t)$ бесконечно дифференцируема на полуоси $[0, \infty)$ всюду за исключением точек $t = 0$ и $t = T$. Двукратное дифференцирование этой функции дает

$$\dot{y}_0(t) = \begin{cases} v_0 - u_* t - \frac{u_*}{k} \exp\left(-\frac{c}{k} t\right), & \text{если } 0 < t < T \\ \frac{u_*}{k} \left[\exp\left(\frac{c}{k} T\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{c}{k} t\right), & \text{если } t > T \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\ddot{y}_0(t) = \begin{cases} -u_* + \frac{u_* c}{k^2} \exp\left(-\frac{c}{k} t\right), & \text{если } 0 < t < T \\ \frac{u_* c}{k^2} \left[1 - \exp\left(\frac{c}{k} T\right) \right] \exp\left(-\frac{c}{k} t\right), & \text{если } t > T \end{cases}$$

Из (5.10) вытекают соотношения

$$\dot{y}_0(+0) = v_0 - \frac{u_*}{k}, \quad \dot{y}_0(T-0) = -\frac{u_*}{k} \exp\left(-\frac{c}{k}T\right)$$

$$\dot{y}_0(T+0) = \frac{u_*}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{k}T\right) \right]$$

Следовательно, функция $\dot{y}_0(t)$ претерпевает разрывы первого рода в точках $t = 0$ и $t = T$. Величины этих разрывов определяются соотношениями

$$\dot{y}_0(+0) - \dot{y}_0(-0) = v_0 - \frac{u_*}{k}, \quad \dot{y}_0(T+0) - \dot{y}_0(T-0) = \frac{u_*}{k} \quad (5.11)$$

Напомним, что $\dot{y}_0(0) = 0$ в соответствии с начальными условиями (1.2). Наличие разрывов первого рода у скорости $\dot{y}_0(t)$ означает, что ускорение $\ddot{y}_0(t)$ имеет импульсные составляющие, описываемые дельта-функциями Дирака, сосредоточенными в точках разрыва функции $\dot{y}_0(t)$. Коэффициенты этих дельта-функций суть скачки скорости, определяемые равенствами (5.11). В соответствии со сказанным функцию $\ddot{y}_0(t)$ на интервале $[0, \infty)$ можно представить в виде

$$\ddot{y}_0(t) = -\ddot{u}_0(t) + \left(v_0 - \frac{u_*}{k} \right) \delta(t) + \frac{u_*}{k} \delta(t-T) + \frac{u_* c}{k^2} w(t) \quad (5.12)$$

$$w(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{c}{k}t\right), & \text{если } 0 \leq t \leq T \\ \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{k}T\right) \right] \exp\left(-\frac{c}{k}t\right), & \text{если } t > T \end{cases}$$

Подставляя в выражение (2.9) $\ddot{y}_0(t)$ из (5.12), $u_0(t) = \ddot{u}_0(t)$ из (5.6) и $v(t) = v_0 \delta(t)$, окончательно получим

$$F(t) = -(m_1 + m_2) \ddot{u}_0(t) - \frac{m_2 u_*}{k} \delta(t) + \frac{m_2 u_*}{k} \delta(t-T) + \frac{m_2 u_* c}{k^2} w(t)$$

Таким образом, построенное квазиоптимальное управление $F(t)$ для исходной системы (1.1) имеет две импульсные компоненты, одинаковые по величине и противоположные по направлению. Первый импульс подается в начальный момент времени, а второй в момент времени $T = u_0 / u_*$.

6. Выводы. Если статическая деформация системы двух тел под действием силы, равной максимально допустимой силе для вязкоупругого элемента, существенно меньше, чем абсолютный минимум максимального отклонения, рассчитываемый по жесткой модели, то жесткая модель дает приемлемую аппроксимацию исходной системы. Чем больше коэффициент жесткости элемента, соединяющего тела, тем точнее аппроксимация жесткой моделью по критерию качества изоляции. В этом случае оптимальное управление для жесткой модели можно рассматривать как квазиоптимальное управление для исходной системы с двумя степенями свободы.

Авторы благодарят профессора У. Пилки (W. Pilkey) (Университет штата Вирджиния, США), обратившего внимание на проблему анализа предельных возможностей противоударной изоляции ноги водителя автомобиля в случае лобового столкновения. Эта проблема стала отправной точкой исследования, составившего содержание настоящей статьи. Авторы благодарят профессора Дж. Крэнделла (J. Crandell) (Университет штата Вирджиния, США), предоставившего числовые данные, использованные в примечении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурецкий В.В. Об одной задаче оптимального управления. Изв. АН СССР // Механика. 1965. № 1. С. 159–162.
2. Sevin E., Pilkey W. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington: Gov. Print. Off., 1971. 162 p.
3. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 319 с.
4. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
5. Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach, 2001. 436 p.
6. Crandall J.R., Kuppa S.M., Klopp G.S., Hall G.W., Hurwitz S.R., Pilkey W.D. Injury mechanisms and criteria for the human foot and ankle under axial impacts to the foot // Intern. J. Crashworthiness. 1998. V. 3. № 2. P. 147–161.

Москва

Поступила в редакцию
23.09.1999